TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA 3°· 4° medio

Gladys Osorio Railef
Patricio Norambuena Morales
María Patricia Romante Flores
Daniela Gaete Pino
Juan Díaz Vergara
Jocelyn Celedón Montiel
Katherine Morales Valderrama
Natalia Ortiz Solís
Patricia Ramírez Fuenzalida
Robbie Barrera Yáñez
Yasna Hurtado Lobos

REUTILIZABLE
TEXTO ESCOLAR

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN. PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN.

sm

TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA 3° · 4° medio

Robbie Barrera Yáñez
Licenciado en Educación de Física y Matemática
Profesor de Estado en Física y Matemática

María Patricia Romante Flores
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Patricio Norambuena Morales
Licenciado en Educación Matemática y Computación

Gladys Osorio Railef
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Katherine Morales Valderrama
Licenciada en Educación Matemática y Computación

Juan Díaz Vergara
Licenciado en Educación de Física y Matemática
Profesor de Estado en Física y Matemática

Natalia Ortiz Solís
Licenciada en Educación Matemática y Computación
Profesora de Estado en Matemática y Computación

Daniela Gaete Pino
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Patricia Ramírez Fuenzalida
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Yasna Hurtado Lobos
Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Jocelyn Celedón Montiel
Profesora de Estado de Matemática y Computación

En el desarrollo del Texto del estudiante de Matemática 3° y 4° medio SM, participó el siguiente equipo:

Dirección editorial
Arlette Sandoval Espinoza

Coordinación área Matemática
Carla Frigerio Cortés

Edición
Gladys Osorio Railef
María Patricia Romante Flores
Patricio Norambuena Morales

Ayudante de edición
Lisset Donoso Vera

Autoría
Gladys Osorio Railef
Patricio Norambuena Morales
María Patricia Romante Flores
Daniela Gaete Pino
Juan Díaz Vergara
Jocelyn Celedón Montiel
Katherine Morales Valderrama
Natalia Ortiz Solís
Patricia Ramírez Fuenzalida
Robbie Barrera Yáñez
Yasna Hurtado Lobos

Consultoría
Daniela Bravo Valdivia
Gabriel Soto Ridd
Katherine Morales Valderrama
Johanna Camacho González

Corrección de estilo y prueba
Víctor Navas Flores

Desarrollo de solucionario
Luz Fuentes Acevedo
Tomás Bralić Muñoz
David Martin Sotomayor
Lisset Donoso Vera
Esteban Fernández Ortega
Katherine Morales Valderrama
Paulina González Núñez
Yaritza Dinamarca

Dirección de arte y diseño
Carmen Gloria Robles Sepúlveda

Coordinación de diseño
Gabriela de la Fuente Garfias

Iconografía
Vinka Guzmán Tacla

Diseño y diagramación
Williams Gálvez Baettig

Fotografías
Banco de imágenes SM
Shutterstock
Wikimedia Commons

Ilustración
Sebastían Lizama
Tomás Reyes Reyes

Jefatura de planificación
Andrea Carrasco Zavala

Gestión de derechos
María Loreto Ríos Melo

Este texto corresponde al tercer y cuarto año de Educación Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 193/2019, del Ministerio de Educación de Chile.

ISBN: 978-956-363-723-6 / Depósito legal: 309650
Tercer año de uso facultativo.
Cantidad de uso autorizada: 177.689
Cantidad de ejemplares impresos: 159.920

En este libro se utilizan de manera inclusiva términos como "los niños", "los padres", "los hijos", "los apoderados", "profesores" y otros que refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

En este texto se utilizaron las siguientes familias tipográficas: Aspira nar, Unit Slab Pro y JollyGood Proper.

Presentación

Te damos la bienvenida a tu Texto de Matemática

La matemática es una herramienta fundamental para explicar la mayoría de los avances de nuestra sociedad: es dinámica y creativa, utiliza un lenguaje universal y ha sido desarrollada como medio para aprender a pensar y para resolver problemas.

El texto que tienes en tus manos es un material pensado en ti. Su finalidad es que sigas desarrollando tu capacidad de análisis y estudio para facilitar tu tránsito al mundo laboral y profesional, y que desde allí contribuyas a la comunidad local, nacional y global.

¿Qué aprenderás?

Conocerás el uso de la matemática en diversas situaciones que te permitirán desarrollar y aplicar tus habilidades de argumentar y comunicar, modelar, resolver problemas y representar, además de potenciar tus habilidades tecnológicas.

¿Para qué aprenderás?

Para aplicar los conceptos adquiridos, procedimientos y habilidades en la resolución de problemas reales en diferentes contextos promoviendo el modelamiento matemático de situaciones para tomar decisiones fundamentadas.

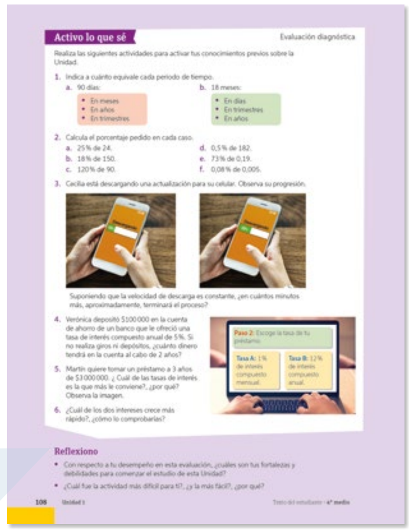
¿Cómo aprenderás?

A partir de actividades individuales y colaborativas que integran tus habilidades, conocimientos y actitudes, mediante el uso de herramientas digitales (*softwares*, aplicaciones, graficadores, simuladores, entre otros) y en entornos virtuales, como las redes sociales.

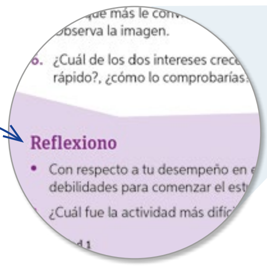
A partir de proyectos que promueven el trabajo colaborativo y que permiten profundizar y desarrollar el conocimiento, razonamiento y pensamiento matemático, fortaleciendo así la creatividad, la comunicación y la valoración de opiniones.

Inicio de Unidad

Evaluación diagnóstica

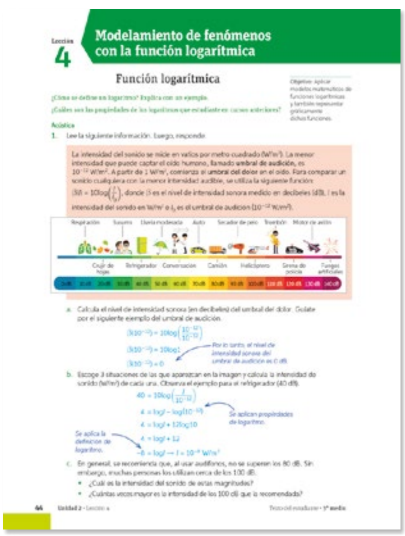


Reflexión



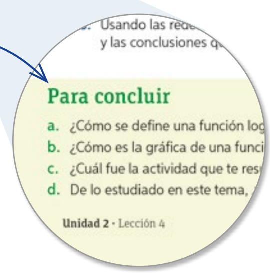
Desarrollo de Unidad

Inicio y desarrollo de Lección



Metacognición

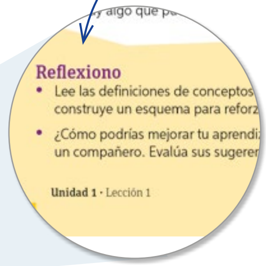
Cierre de Tema



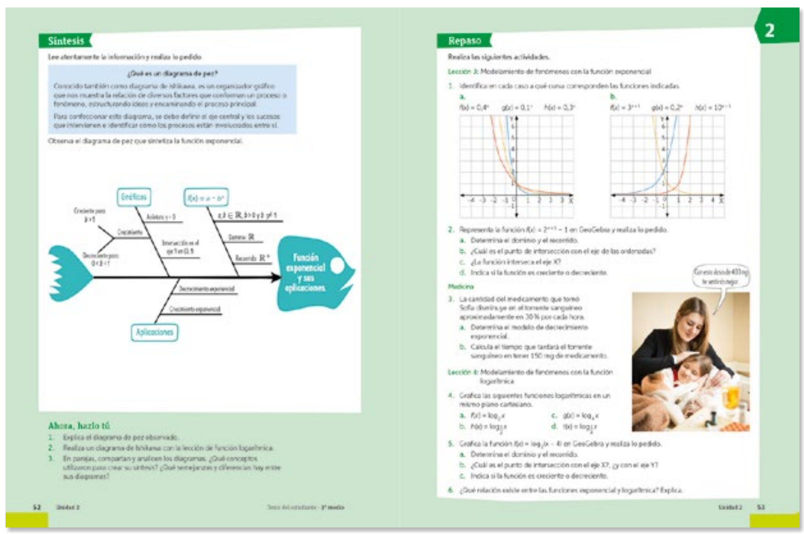
Cierre de Lección

Evaluación intermedia

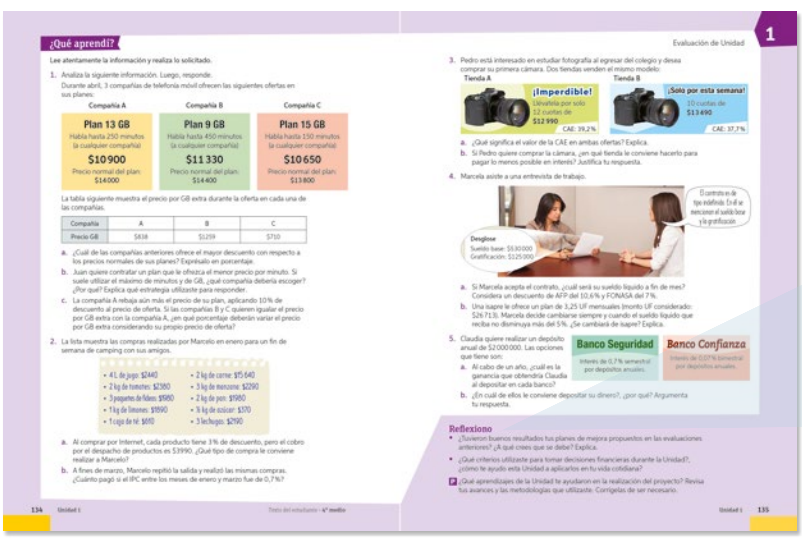
Evaluación de estrategias y plan de mejora

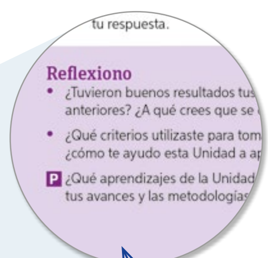


Cierre de Unidad



Evaluación de Unidad





Reflexión

Texto del estudiante 3° medio

ÍNDICE

Unidad 1

LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA

Estadística y probabilidades

En parejas, observen la imagen. Luego, respondan:

1. ¿Cómo describirías la estatura de los jugadores de la selección chilena de fútbol de 2011 (camisetas rojas)? Comparte tu respuesta con tu curso.
2. ¿Qué medida de tendencia central piensan que los ayudaría a determinar si las estaturas de los jugadores son homogéneas? Justifiquen su respuesta.
3. Si el promedio de las estaturas de la actual selección chilena es aproximadamente 177,3 cm y los jugadores de las camisetas blancas son parte del equipo, ¿quién de ellos se acerca más a la estatura promedio?, ¿quién se aleja más?
4. Si el arquero debe elegir a 5 jugadores para poner en la barrera del tiro libre, ¿qué criterio creen que utilizará para determinar a quienes elegir? Den argumentos que fundamenten tu respuesta.

Marcelo Díaz (centrocampista)
Estatura: 1,66 m

Gary Medel (defensa)
Estatura: 1,71 m

Alexis Sánchez (delantero)
Estatura: 1,69 m

Arturo Vidal (centrocampista)
Estatura: 1,80 m

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos.
- Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales.

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Calcula el promedio, la mediana y la moda de los siguientes datos.

Edad (en años) de un grupo de 10 personas

10 – 25 – 34 – 20 – 44 – 23 – 44 – 43 – 21 – 18

2. Calcula las medidas de tendencia central para los datos organizados en la siguiente tabla:

Masa corporal estudiantes de 1° medio	
Masa corporal (kg)	Frecuencia
[50, 55[	6
[55, 60[	13
[60, 65[	9
[65, 70[	8
[70, 75]	4

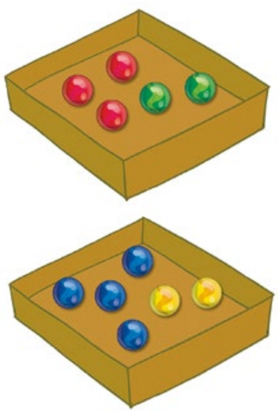
Educación Física y Salud

3. El promedio de estatura de 7 jugadores de un equipo de básquetbol es igual a la estatura del jugador de la imagen. Al ordenarlos del más alto al más bajo, cada uno mide 2 cm menos que el anterior. ¿Cuánto mide el más bajo?

4. Calcula e interpreta los cuartiles del siguiente conjunto de datos:

2	11	8	15	7	12	7	13	14	12	7	0
11	0	7	4	7	5	8	4	8	6	1	6

5. Lucía está remodelando su habitación. Para ello, pintará las paredes de verde, rosado o amarillo, la puerta café o blanca y colgará una copia de un cuadro de Picasso o Dalí. ¿De cuántas maneras diferentes puede remodelar su habitación realizando todos los cambios?



6. Se dispone de 2 cajas con fichas de colores, como muestra la figura, y se extrae al azar una ficha de cada una.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja y una azul?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja y una amarilla?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha verde y una no azul?

Reflexiono

- Con respecto a tu desempeño en esta evaluación, ¿qué te resultó más fácil y más difícil de responder?, ¿por qué?
- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de ellos crees que debes repasar antes de continuar?

Lección 1

Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos

Medidas de dispersión

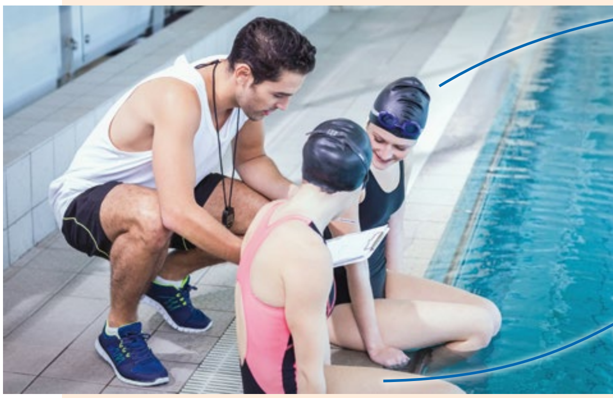
Objetivo: Analizar los datos de situaciones usando medidas de dispersión y tomar decisiones a partir de ello.

¿Cómo calculas el promedio o media aritmética de un conjunto de datos?

¿A qué piensas que se refiere el concepto de dispersión referido a un conjunto de datos?

1. Observa la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

El entrenador de un equipo de natación debe elegir su representante para la próxima competencia de 100 m en estilo libre. Para ello, cuenta con información consistente en el tiempo, en segundos, de las dos postulantes en las 5 últimas carreras en este estilo.



Competencias de Daniela	
N.° de carrera	Tiempo (s)
1	64
2	58
3	68
4	62
5	65

Competencias de Bárbara	
N.° de carrera	Tiempo (s)
1	69
2	63
3	65
4	50
5	70

a. ¿Cuál es el tiempo promedio de Daniela en las últimas 5 carreras de 100 m estilo libre?, ¿y el de Bárbara?

b. ¿Cómo son los promedios de Daniela y Bárbara?

c. ¿A quién debiera elegir el entrenador para participar en la competencia?, ¿por qué?

*La **media aritmética** de un conjunto de datos $\{x_1, x_2,..., x_n\}$ es*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Las **medidas de dispersión** sirven para determinar si los datos se encuentran en torno a la media o si están muy dispersos. Para cuantificar la dispersión, estudiaremos las medidas más conocidas: el **rango**, la **desviación media**, la **varianza** y la **desviación estándar**.

El **rango** (R) corresponde a la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de la distribución. Esta medida indica de alguna manera cuán dispersos están los datos de la distribución.

$$R = X_{máx} - X_{mín}$$

Por ejemplo: en el caso anterior, si se denotan por R_1 y R_2 los rangos de los tiempos de Daniela y Bárbara respectivamente, se tiene:

$$R_1 = X_{máx} - X_{mín} = 68 - 58 = 10 \rightarrow R_1 = 10 \text{ s}$$
$$R_2 = X_{máx} - X_{mín} = 70 - 50 = 20 \rightarrow R_2 = 20 \text{ s}$$

Esto da indicios de que los tiempos de Daniela pueden ser menos dispersos que los de Bárbara. Sin embargo, no es posible concluir de inmediato: debemos disponer de más información.

2. Analiza los pasos que realiza el entrenador para comparar los tiempos de las competencias de Daniela con respecto a su tiempo promedio.

Paso 1: Calcula las desviaciones de los tiempos de Daniela, tal como se muestra a continuación:

Tiempos de Daniela

Tiempo (s)	x	64	58	68	62	65
Desviación con respecto a la media	$x - \overline{x}$	0,6	−5,4	4,6	−1,4	1,6

*La **desviación** puede ser calculada con respecto a cualquier valor, no solo con respecto al promedio.*

Paso 2: Calcula la suma de las desviaciones medias:

$$0{,}6 + (-5{,}4) + 4{,}6 + (-1{,}4) + 1{,}6 = 0$$

Paso 3: Calcula la **desviación media** de la siguiente manera:

$$\frac{|64 - 63{,}4| + |58 - 63{,}4| + |68 - 63{,}4| + |62 - 63{,}4| + |65 - 63{,}4|}{5}$$

$$= \frac{0{,}6 + 5{,}4 + 4{,}6 + 1{,}4 + 1{,}6}{5}$$

$$= \frac{13{,}6}{5} = 2{,}72 \text{ s}$$

*La **desviación media** permite determinar en cuánto varían, en promedio, los datos de una distribución con respecto a la media aritmética.*

a. ¿Cuáles son las desviaciones con respecto a la media aritmética en los tiempos obtenidos por Bárbara?

b. ¿Qué resultado se obtiene al sumar las desviaciones de Bárbara?, ¿es el mismo que en el caso de Daniela? ¿Qué puedes concluir al respecto?

- La **desviación de una variable x con respecto a su media aritmética** está dada por $D = x_i - \overline{x}$.
- La **desviación media** $\left(D_{\overline{x}}\right)$ corresponde a la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones $\left(x_i - \overline{x}\right)$ de los n datos, esto es:

Para **datos no agrupados** se tiene:

$$D_{\overline{x}} = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + |x_3 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n}$$

Para **datos agrupados** se tiene:

$$D_{\overline{x}} = \frac{|x_{mc1} - \overline{x}| \cdot f_1 + |x_{mc2} - \overline{x}| \cdot f_2 + |x_{mc3} - \overline{x}| \cdot f_3 + \ldots + |x_{mcn} - \overline{x}| \cdot f_n}{n}$$

Donde x_{mci} es la marca de clase del intervalo i, $\overline{x}$ es la media aritmética de la variable, f_i es la frecuencia absoluta del intervalo i y n es el número total de datos.

3. Calcula la desviación media de los tiempos de Bárbara.

4. Según los resultados de las actividades 2 y 3, ¿qué datos son más dispersos: los de Daniela o los de Bárbara?, ¿por qué?

Si se calcula la desviación con respecto a un valor distinto de la media aritmética, ¿la sumatoria de las desviaciones es igual a cero?, ¿por qué?

5. El entrenador continúa su análisis para tomar una adecuada decisión. Para ello, sigue estos pasos:

Paso 1: Calcula la media de los cuadrados de las diferencias entre cada tiempo de Daniela y el promedio. Obtiene así la **varianza** (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{(64 - 63{,}4)^2 + (58 - 63{,}4)^2 + (68 - 63{,}4)^2 + (62 - 63{,}4)^2 + (65 - 63{,}4)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{0{,}36 + 29{,}16 + 21{,}16 + 1{,}96 + 2{,}56}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{55{,}2}{5} = 11{,}04 \text{ s}^2$$

Paso 2: Calcula la raíz cuadrada del valor anterior y obtiene la **desviación estándar** (σ):

$$\sigma = \sqrt{11{,}04} \approx 3{,}32 \text{ s}$$

La **varianza** y la **desviación estándar** permiten cuantificar la dispersión dada por la desviación media.

- La varianza (σ^2) corresponde a la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los n datos. Se expresa en unidades cuadradas.

Para **datos no agrupados** se tiene:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Para **datos agrupados** se tiene:

$$\sigma^2 = \frac{(x_{mc1} - \bar{x})^2 \cdot f_1 + (x_{mc2} - \bar{x})^2 \cdot f_2 + (x_{mc3} - \bar{x})^2 \cdot f_3 + ... + (x_{mcn} - \bar{x})^2 \cdot f_n}{n}$$

Donde x_{mci} es la marca de clase del intervalo i, $\bar{x}$ es la media aritmética de la variable, f_i es la frecuencia absoluta del intervalo i y n es el número total de datos.

- La **desviación estándar** (σ) se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de la varianza. Se expresa en la misma unidad que la variable, por lo que nos puede dar una idea más cercana de lo disperso que es el conjunto.

¿Puede ser negativo el valor de la varianza?, ¿por qué?

a. Calcula la varianza de los tiempos de Bárbara.

b. Calcula la desviación estándar de los tiempos de Bárbara.

c. Compara la dispersión entre los datos de Daniela y los de Bárbara. ¿Dónde es mayor la dispersión?

*A **mayor dispersión**, mayor valor de la varianza; a **menor dispersión**, menor valor de la varianza.*

d. Finalmente, con toda la información obtenida acerca de los tiempos de ambas nadadoras, responde:

¿Qué decisión debe tomar el entrenador?, ¿quién debería participar en la próxima competencia: Daniela o Bárbara?

6. Las temperaturas (en grados Celsius) durante dos semanas en Talca fueron las siguientes:

Temperatura semana 1 (°C)	30	31	30	25	21	20	22
Temperatura semana 2 (°C)	30	29	29	27	26	20	27

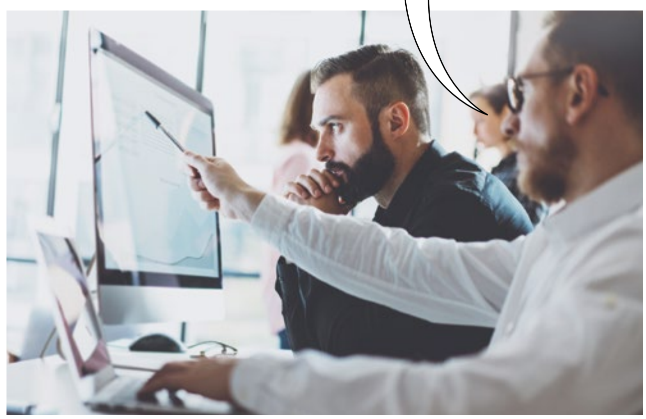
a. Calcula e interpreta las medidas de dispersión.

b. ¿Qué ocurriría con la dispersión de los datos si las temperaturas se tomaran en distintas estaciones del año? Justifica.

Economía

7. La cantidad de cheques cobrados diariamente en todas las sucursales de un banco el mes anterior se registran en la siguiente tabla:

Cantidad de cheques	Frecuencia
[0, 200[	12
[200, 400[	15
[400, 600[	20
[600, 800[	45
[800, 1000]	21



¿Deberá preocuparse el jefe de operaciones del banco por la cantidad de empleados que se necesitará el mes siguiente?, ¿qué decidirá?

8. La chef de un restaurante acaba de recibir un encargo de barras de chocolate de su proveedor, pero aún no los acepta. Los gramos de cada barra se muestran en el recuadro.

178,60	204,12	206,95
221,13	192,78	209,79
226,80	209,79	215,46
229,63	215,46	218,30

¿Qué decisión tomará la chef?, ¿por qué? Argumenta y comunica tu respuesta a tus compañeros.

4 y 5

Para concluir

a. ¿Qué significa, con respecto a tu rendimiento académico, que tus notas tengan una dispersión muy alta? Explica.

b. ¿Por qué es importante determinar la dispersión de un conjunto de datos?

c. ¿Qué fue lo que más te costó aprender en este tema?, ¿y lo más fácil?

Comparación de conjuntos de datos

Objetivo: Comparar dos o más conjuntos de datos utilizando medidas de tendencia central, de dispersión y posición para tomar decisiones.

¿Cómo se calcula la mediana para un conjunto par y uno impar de datos?

¿Qué son los cuartiles?, ¿cómo se pueden calcular? Explica.

1. Observa la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Un equipo de fútbol femenino necesita una delantera, para lo cual tiene dos candidatas. En los últimos 10 partidos del campeonato, las delanteras registraron las siguientes cantidades de goles:

Navas: 1, 0, 3, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 3

Flores: 1, 1, 2, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 2

La DT observa que ambas marcaron 12 goles en 10 partidos, con un promedio de 1,2 goles por partido. Entonces decide usar otros indicadores.

a. Analiza el procedimiento utilizado por la DT del equipo.

- Calcula el rango de goles marcados por ambas jugadoras:

  $R_{Navas} = 4 - 0 = 4$ $\qquad$ $R_{Flores} = 2 - 0 = 2$

  El mayor rango que presenta Navas puede indicar que en algunos partidos anota muchos goles, pero en otros no anota, mientras que los de Flores están más repartidos.

- Calcula la varianza y la desviación estándar:

Varianza	$\sigma^2_{Navas} = 2,16$	$\sigma^2_{Flores} = 0,36$
Desviación estándar	$\sigma_{Navas} \approx 1,47$	$\sigma_{Flores} = 0,6$

  Estos indicadores confirman que los goles de Flores presentan menor dispersión, lo que se refleja en que cada partido marca una cantidad de goles similar, lo que no ocurre con Navas.

- Calcula los indicadores de posición: mediana y cuartiles.

Para utilizar estos indicadores en la comparación de conjuntos de datos, es importante que estos sean del mismo tipo, se encuentren en las mismas unidades y sus promedios sean iguales o similares.

			$Q_1 = 0$			$M_e = 0,5$		$Q_3 = 3$		
Navas	0	0	0	0	0	1	1	3	3	4
Flores	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
			$Q_1 = 1$			$M_e = 1$		$Q_3 = 2$		

Se puede confirmar que la dispersión es menor en el caso de Flores, observando que las diferencias entre la mediana y los cuartiles Q_1 y Q_3 es menor que en el caso de Navas.

b. ¿A cuál de las jugadoras escogerá la DT? Comenten en grupos y argumenten su respuesta.

c. Si se sabe que la delantera va a jugar pocos partidos, en los que debe marcar una gran cantidad de goles, ¿a quién debería escoger? Justifica.

Si se desea **comparar dos o más conjuntos de datos**, se pueden utilizar medidas de tendencia central, como el promedio y la mediana; medidas de dispersión, como el rango, varianza, desviación estándar; y medidas de posición, como los cuartiles. Así podemos juzgar cuál de ellos tiene un **promedio más representativo**, es decir, aquel conjunto cuyos valores son más cercanos al promedio.

Por ejemplo, en la situación anterior, la jugadora escogida por la DT dependerá de lo que busque. Si consideramos los promedios de goles por partido, en ambos casos es el mismo, pero el promedio de Flores resulta mucho más **representativo**, ya que presenta una cantidad de goles por partido más **homogénea** (parecida, similar).

- ¿A qué jugadora habrías escogido tú? Argumenta tu respuesta y comunícala a tus compañeros.

TIC

2. Dada la información de la tabla, realiza los siguientes pasos.

Calificaciones del Tercero A en una prueba de Matemática								
6,7	4,9	6,2	3,5	6,6	6,2	5,2	2,2	4,9
5,5	4,6	6,0	5,2	4,8	7,0	6,5	2,0	4,5

Paso 1: Abre una hoja de cálculo y copia las calificaciones de la tabla en una columna o varias.

Paso 2: En una celda en blanco, escribe la función **=PROMEDIO()**. En el párentesis debes seleccionar todas las calificaciones.

Paso 3: En una segunda celda en blanco, escribe la función **=MAX() – MIN()** para calcular el rango de las calificaciones. Para ello, en cada paréntesis debes seleccionar todas las celdas que contengan datos. Luego, presiona Enter.

Paso 4: En otra celda en blanco, escribe la función **=VAR.P()** para calcular la varianza de los datos. Selecciona todas las celdas de los datos y pulsa Enter.

Paso 5: Escribe **=DESVEST.P()** en otra celda en blanco y selecciona la información. Esta función permite calcular la desviación estándar de los datos entregados. Obtendrás lo que se muestra a continuación:

F2 | =DESVEST.P(A2:B10)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Calificaciones		Promedio	Rango	Varianza	Desviación estándar	
2	6,7	5,5	5,138889	5	1,9512654	1,396877028	
3	4,9	4,6					
4	6,2	6					
5	3,5	5,2					
6	6,6	4,8					
7	6,2	7					
8	5,2	6,5					
9	2,2	2					
10	4,9	4,5					
11							

a. Inventa un conjunto de calificaciones de 18 estudiantes que tengan igual promedio que el conjunto anterior.

b. ¿Cómo es la dispersión de los datos en cada conjunto?

c. Si tuvieras que premiar a uno de los 2 cursos por su buen rendimiento, ¿a quién escogerías? Argumenta.

El **coeficiente de variación** (*CV*) permite realizar comparaciones entre conjuntos con respecto a la dispersión de sus datos, e incluso entre variables que se miden con diferentes unidades de medida. Matemáticamente, corresponde al cociente entre la desviación estándar y la media aritmética. Esto es:

$$CV = \frac{\sigma}{|\overline{x}|}$$

Para expresar el CV en porcentaje, basta con multiplicar el cociente obtenido por 100.

- Mientras **menor** sea el coeficiente de variación, el conjunto es más **homogéneo** (los datos son más parecidos entre sí).
- Mientras **mayor** sea el coeficiente de variación, el conjunto es más **heterogéneo** (los datos se diferencian más entre sí).

3. Resuelve la situación utilizando los pasos de la actividad 2.

Para participar en una olimpiada de Ciencias, el profesor debe elegir un curso de un colegio. Las calificaciones de los 45 estudiantes de los dos cursos entre los que se escogerá al representante del colegio en la olimpiada se ordenaron en las siguientes tablas:

Calificaciones curso A
5,9 – 4,0 – 2,5 – 1,8 – 6,0 – 2,9 – 5,7 – 4,3 –
4,3 – 3,4 – 2,0 – 5,3 – 4,5 – 7,0 – 5,9 – 5,9 –
5,0 – 3,3 – 4,4 – 3,5 – 1,0 – 5,8 – 6,4 – 4,6 –
2,7 – 5,5 – 4,6 – 4,8 – 3,6 – 5,5 – 4,8 – 6,0 –
6,0 – 4,0 – 6,5 – 5,8 – 2,2 – 6,7 – 4,9 – 5,2 –
4,9 – 7,0 – 5,0 – 6,6 – 2,5

Calificaciones curso B
4,4 – 4,0 – 3,5 – 2,8 – 5,3 – 3,9 – 4,7 – 4,3 –
7,0 – 3,4 – 4,0 – 5,3 – 4,5 – 7,0 – 4,9 – 4,4 –
5,0 – 2,4 – 5,8 – 3,5 – 2,0 – 5,8 – 6,4 – 2,6 –
1,9 – 5,9 – 4,6 – 4,8 – 6,4 – 5,5 – 5,8 – 6,0 –
7,0 – 4,0 – 5,6 – 6,0 – 4,2 – 6,7 – 4,9 – 5,2 –
5,8 – 6,8 – 7,0 – 6,8 – 4,9

a. ¿Cuál es el rango de las calificaciones del curso A?, ¿y del curso B?

b. ¿Cuál es el promedio y la desviación media de las calificaciones del curso A?, ¿y del B?

Para calcular la desviación media usa la función =DESVPROM().

c. ¿Cuál es la varianza de los datos obtenidos para cada curso?, ¿y la desviación estándar?

d. ¿Cuál es el coeficiente de variación para ambos cursos?, ¿qué función usarías en Excel para calcularlo?

e. ¿Qué curso tiene calificaciones homogéneas? Justifica tu respuesta.

f. Con los resultados anteriores, ¿qué decisión debe tomar el profesor? Argumenta tu respuesta.

Botánica

4. Aplica las medidas de dispersión en la siguiente situación y responde.

Lisset desea comprobar la efectividad de un fertilizante para plantas. Para ello, cultivó 2 maceteros con 20 plantas cada uno. Luego de 2 semanas, los tamaños (en centímetros) de las plantas eran los siguientes:

Sin fertilizante
11 – 10 – 15 – 12 – 13 – 12 – 13 – 10 – 11 – 14 – 13 – 11 – 14 – 12 – 15 – 10 – 12 – 14 – 13 – 12

Con fertilizante
15 – 12 – 15 – 14 – 14 – 13 – 14 – 11 – 11 – 15 – 13 – 12 – 13 – 13 – 15 – 11 – 13 – 16 – 14 – 12

a. ¿Hace crecer más las plantas el fertilizante? Justifica tu respuesta.

b. Si el fertilizante mantiene el promedio de los tamaños pero disminuye la dispersión, ¿podría decirse que es efectivo?

c. Si desea que el tamaño de sus plantas sea homogéneo, ¿debe agregar fertilizante en sus plantas? Argumenta.

6 y 7

Actividad de aplicación Pruebas estandarizadas.

Objetivo: Investigar la importancia de la desviación estándar.

¿Qué haremos? Analizar una prueba estandarizada.

Planifiquemos e investiguemos

Paso 1: Organícense en grupos de 2 o 3 integrantes e investiguen acerca del cálculo del puntaje en una prueba estandarizada como la PSU o el SIMCE sitios oficiales como el DEMRE o MINEDUC.

Analicemos y concluyamos

Paso 2: Luego de su investigación planteen y respondan algunas preguntas como por ejemplo:

- ¿Qué significa que una evaluación se encuentre “estandarizada”?
- ¿Es siempre el puntaje buen indicador en la evaluación?
- ¿Qué criterios utilizarían para comparar los puntajes de dos años seguidos?
- ¿Qué criterios utilizarían para comparar los puntajes obtenidos por instituciones o personas de dos regiones distintas?

Paso 3: Compartan y comuniquen a otros grupos el análisis que realizaron con respecto a las preguntas anteriores.

Para concluir

a. ¿Por qué es importante no solo utilizar el promedio al comparar conjuntos de datos? Explica.

b. ¿Se podrá usar siempre el coeficiente de variación para comparar dos conjuntos de datos? ¿Qué alternativas crees que podrían utilizarse en los casos en que no?

Antes de continuar

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

Industria automotriz

1. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.

- Tiempo (en segundos) que demora en frenar el auto A.
  12, 9, 8, 9, 10, 11, 9, 7
- Tiempo (en segundos) que demora en frenar el auto B.
  11, 8, 7, 10, 10, 10, 8, 10

   a. ¿Cuál es el rango y la desviación media para cada tipo de automóvil?
   b. ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar para cada tipo de automóvil?
   c. ¿En cuál de los dos conjuntos de datos los valores se acercan más a la media?
   d. Si una persona quiere comprar, entre estos automóviles, el que brinde mayor seguridad, ¿qué decisión debería tomar? Explica.

2. Utilizando su coeficiente de variación, determina qué conjunto es más homogéneo.
   a. X = {203, 75, 5, 235, 193, 165, 47, 240, 37, 0}
      Y = {3, 0, 1, 5, 5, 6, 1, 4, 3, 2}
   b. X = {2, 0, 0, 2, 2, 2, 0, 2, 0, 0}
      Y = {47, 16, 2, 46, 44, 32, 4, 36, 1, 12}

3. En algunos países de Latinoamérica, las notas van de 1 a 10. Jorge tiene un amigo ecuatoriano, Matías, con el que compara sus notas de Ciencias Naturales.

Jorge	4,5	5,0	5,2	6,7	6,1	5,8
Matías	6,2	7,8	3,1	9,6	5,4	7,7

   a. ¿Es útil usar el rango para comparar la dispersión de sus notas? Justifica.
   b. ¿Qué medida(s) de dispersión puede(n) resultar más conveniente(s) en este caso? Justifica tu respuesta.
   c. Aplica los indicadores que escogiste y señala quién tiene un rendimiento más regular en la asignatura. Argumenta tu respuesta.

8

Reflexiono

- De los contenidos estudiados en esta lección, ¿en cuál me siento más débil? ¿En qué contenido me siento mejor preparado? Explica.
- ¿Cómo podrías mejorar tu aprendizaje de la lección? Crea un plan y compártelo con un compañero. Evalúa sus sugerencias y corrígelo.

Lección 2

Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionadas

Probabilidad condicionada

Objetivo: Comprender el concepto de probabilidad condicionada y aplicarlo en la toma de decisiones.

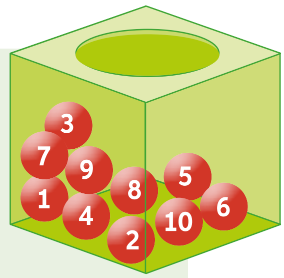
¿Qué entiendes por un experimento aleatorio? Menciona 3 ejemplos.

¿Cómo se define la regla de Laplace? ¿Qué condición deben cumplir los sucesos elementales para poder aplicar la regla de Laplace?

1. Analiza la siguiente situación y realiza lo solicitado.

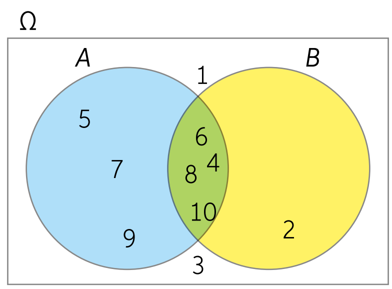
Se extrae una bolita al azar desde una urna que contiene 10 bolitas, como se muestran en la imagen. Si se sabe que la bolita extraída tiene un número mayor que 3, ¿cuál es la probabilidad de que sea par?

Considera los sucesos: A = extraer una bolita con un número mayor que 3 y B = extraer una bolita con un número par.



a. Observa el diagrama de Venn y analiza el razonamiento.

La probabilidad de que ocurra B, dado que ocurrió A, es decir, $P(B/A)$, corresponde a la probabilidad de extraer bolitas numeradas con 4, 6, 8 o 10 (casos favorables), considerando los valores mayores que 3, es decir: 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 (casos posibles).



b. Calcula el cociente entre $P(A \cap B)$ y $P(A)$. ¿Qué obtienes?

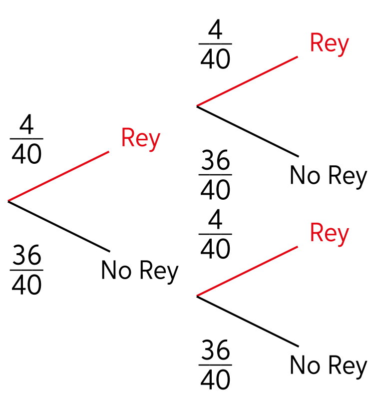
La **probabilidad condicionada $P(B/A)$** es la probabilidad de que ocurra un suceso B dado que ocurrió otro A y se calcula con la siguiente expresión:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ con } P(A) \neq 0$$

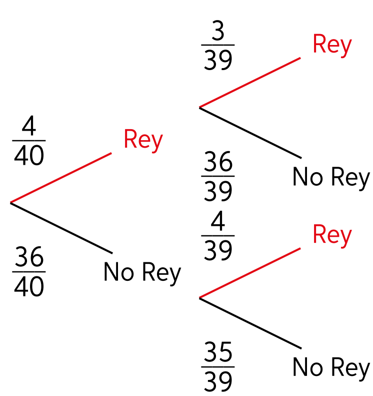
2. Se extraen al azar dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos reyes?

a. Observa los diagramas de árbol para los siguientes casos.

Extracción CON REPOSICIÓN



Extracción SIN REPOSICIÓN



b. ¿En qué caso obtener rey en la primera extracción condiciona el resultado de obtener rey en la segunda extracción?, ¿y en cuál no lo condiciona?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos reyes de la baraja española al extraer dos cartas sin reposición?, ¿y al extraerlas con reposición? Calcula.

Dos sucesos *A* y *B* son **independientes**, si la realización de *A* no condiciona la realización de *B*, es decir, $P(B/A) = P(B)$. Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Dos sucesos *A* y *B* son **dependientes** si la realización de *A* condiciona la realización de *B*, es decir, $P(B/A) \neq P(B)$. Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

- Considera las extracciones sin reposición y con reposición. ¿En qué caso los sucesos son siempre dependientes y en cuál son siempre independientes?

Deporte

3. La siguiente tabla de contingencia muestra la cantidad de participantes en una corrida de cierta localidad según las siguientes categorías:

Las tablas de contingencia son aquellas en las que se resume y organiza la información según dos o más criterios.

	Masculino	Femenino	Total
Adolescente	25	15	40
Adulto	125	70	195
Sénior	75	90	165
Total	225	175	400

Si se elige una persona al azar, calcula:

a. La probabilidad de que sea una corredora, sabiendo que pertenece a la categoría sénior.

b. La probabilidad de que sea de la categoría adulto, sabiendo que es un corredor.

c. Si se decide realizar otra corrida y premiar a alguien que pertenezca a la categoría (género-edad) que tenga más inscritos, ¿qué tipo de corredor es probable que reciba el premio?

4. Un estudio médico indica que, de una población de 1000 pacientes, 400 tienen diabetes, 500 son hombres y 200 de estos sufren hipertensión. Además, 230 hombres tienen diabetes y 100 mujeres, hipertensión. Calcula la probabilidad de que uno de estos pacientes:

a. Tenga diabetes si es mujer.

b. Tenga diabetes si es hombre.

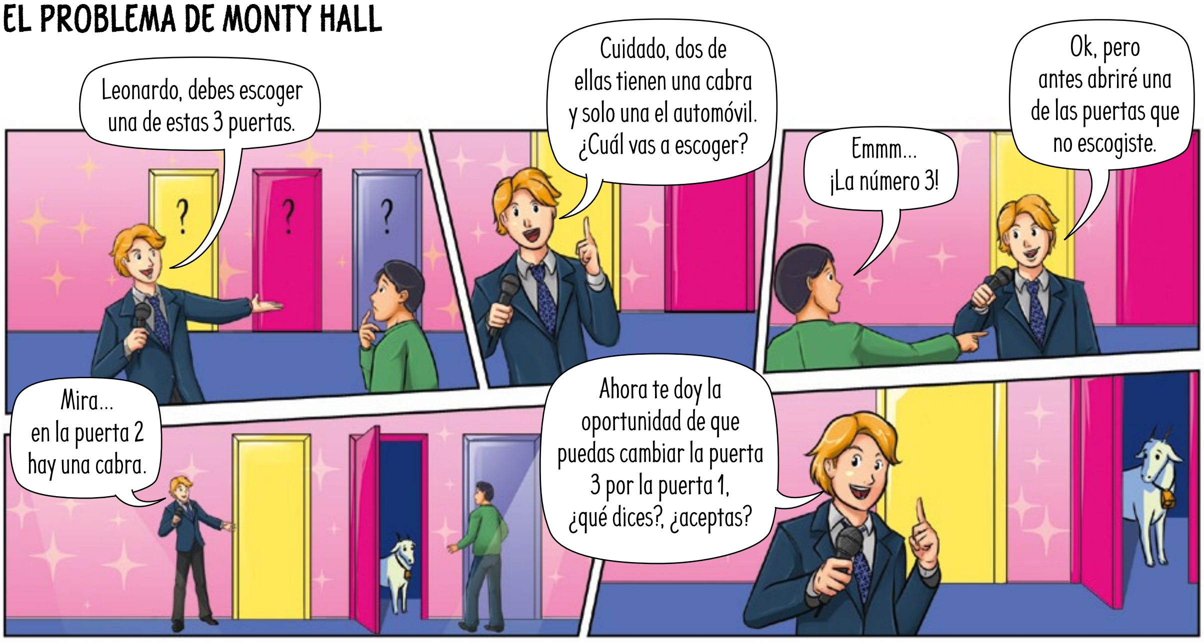
c. Tenga hipertensión si es mujer.

d. Tenga hipertensión si es hombre.

- Si se decide realizar una campaña de salud para tomar conciencia de las cifras anteriores, ¿a quién debería estar dirigida la campaña si el objetivo es llegar a más del 35 % de la población? Argumenta.

5. Reúnanse en parejas y analicen la siguiente situación considerando que la puerta 1 es la amarilla, la 2 es la rosada y la 3 es la morada.

EL PROBLEMA DE MONTY HALL



a. En el lugar de Leonardo, ¿qué escogerían: cambiar de puerta o mantenerla?, ¿por qué? Argumenten y comenten su respuesta con el resto del curso.
b. Antes de que Leonardo escoja una puerta, ¿cuál es la probabilidad de que escoja la puerta que tiene el automóvil?, ¿y cuál de escoger la que tiene una cabra?
c. Consigan los materiales que aparecen en el recuadro y sigan los pasos.

Paso 1: Con las tijeras, corten 3 tarjetas idénticas para simular las condiciones del concurso.

Paso 2: Identifiquen las tarjetas con los números 1, 2 y 3. Luego, por el reverso de una, escriban la palabra “automóvil” y en las otras escriban “cabra”.

Paso 3: Con las tarjetas, reproduzcan la situación varias veces, cuenten los resultados y en su cuaderno completen la siguiente tabla:

Materiales
- Hoja de oficio o cartulina.
- Tijeras.

	Resultado	
Tarjeta	Gana	Pierde
Se mantiene		
Se cambia		

d. Según su análisis, ¿qué le conviene más a Leonardo?
e. Justifiquen utilizando probabilidades: ¿por qué es mejor una opción u otra?, ¿coincide con la idea que tenían inicialmente?

Actividad de aplicación — El problema de Monty Hall y la toma de decisiones

Objetivo: Investigar y profundizar en el estudio probabilístico.

¿Qué haremos?: Crear un concurso similar al problema de Monty Hall

Monty Hall

Planifiquemos e investiguemos

Paso 1: Reúnanse en grupos de 3 integrantes. Luego, ingresen el código **T20M3MP023A** en www.enlacesmineduc.cl.

Paso 2: Además de la información dada en el sitio web anterior, pueden buscar e indagar en otras páginas confiables de Internet o consultando la bibliografía que su profesor les recomiende. A partir de la información encontrada, respondan las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el contexto del problema de Monty Hall?

b. ¿Cuáles son los resultados de los siguientes casos según la decisión del concursante?

Si el concursante mantiene su elección

Caso	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3
A	Automóvil	Cabra	Cabra
B	Cabra	Automóvil	Cabra
C	Cabra	Cabra	Automóvil

Si el concursante cambia su elección

Caso	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3
A	Automóvil	Cabra	Cabra
B	Cabra	Automóvil	Cabra
C	Cabra	Cabra	Automóvil

c. Según la explicación matemática, el problema se basa en probabilidades condicionadas. ¿Cómo están definidos los sucesos?

d. ¿Cuál es la expresión que permite calcular la probabilidad de que un concursante gane?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante gane si mantiene su elección?, ¿y la probabilidad de que gane si la cambia?

Paso 3: Comenten con sus compañeros:

- ¿Cuál es la mejor estrategia: mantener o cambiar la elección?
- Al plantear el problema de Monty Hall, la gran mayoría de las personas piensan que el concursante, después de elegir por primera vez la puerta, tiene el 50 % de probabilidades de ganar al momento de cambiar su opción. ¿Por qué creen que sucede esto? Argumenten.

Presentemos

9 y 10

Paso 4: Inventen un concurso de un programa de televisión donde ocurra el mismo fenomeno que en el problema de Monty Hall. Realizen una presentación con sus compañeros como participantes.

Para concluir

a. Explica con tus palabras lo que entiendes por el concepto de probabilidad condicionada.

b. ¿En qué otras situaciones se podrían tomar decisiones a partir de la probabilidad condicionada? Justifica tu respuesta.

Probabilidad total

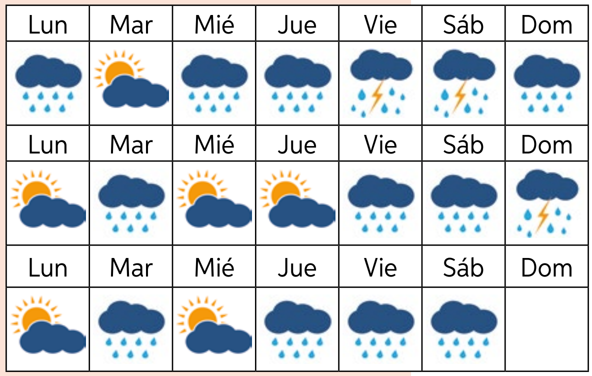
Objetivo: Comprender el teorema de la probabilidad total y aplicarlo en la toma de decisiones.

¿Qué expresión permite calcular la probabilidad condicionada?

Cuando los sucesos son independientes, ¿qué sucede con la expresión anterior?

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Se sabe que la probabilidad de que cierto autobús sufra un accidente durante un día lluvioso es 0,07 y durante un día seco 0,004. En un periodo de 20 días el tiempo ha sido el siguiente:



a. ¿Cuántos días ha llovido?, ¿cuántos han sido días secos?, ¿cuál es la probabilidad de cada uno?

b. ¿Cuál será la probabilidad de que se produzca un accidente? Analiza el siguiente procedimiento.

- Se definen los siguientes sucesos:

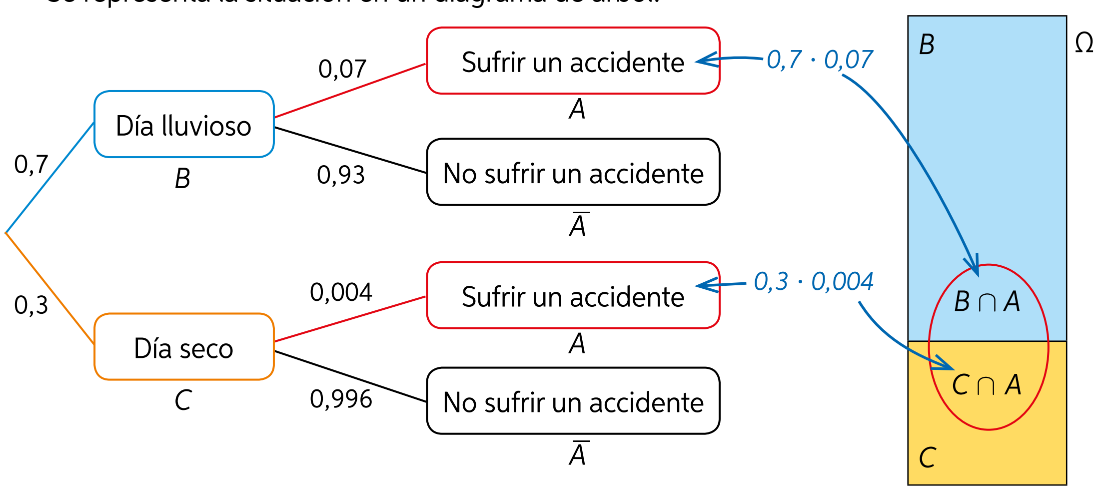
  A = Sufrir un accidente

  $\overline{A}$ = No sufrir un accidente

  B = Día lluvioso

  C = Día seco

- Se representa la situación en un diagrama de árbol:



¿Cómo se obtuvieron los valores de las primeras ramas del árbol (0,7 y 0,3)?

- A partir de la información del diagrama, se determina la probabilidad de que ocurra un accidente. Esto es:

P(sufrir accidente) = P(sufrir accidente en día lluvioso) + P(sufrir accidente en día seco)

Lo anterior expresado en notación conjuntista es:

Se aplica la definición de probabilidad condicionada.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap C)$$
$$P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(C) \cdot P(A/C)$$

A esta igualdad se la conoce como ***probabilidad total.***

- Se calcula la probabilidad pedida reemplazando los valores:

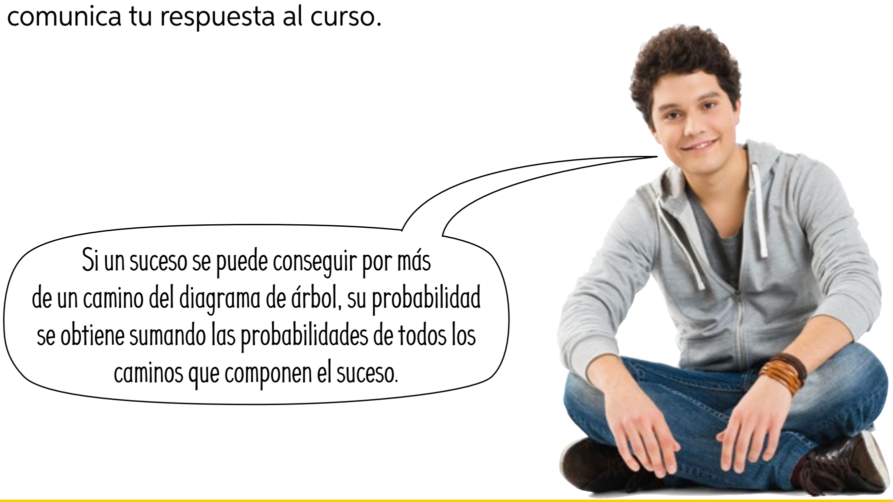
$$P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}07 + 0{,}3 \cdot 0{,}004$$
$$P(A) = 0{,}049 + 0{,}0012$$
$$P(A) = 0{,}0502$$

- Por lo tanto, la probabilidad de que se produzca un accidente es 0,0502, lo que representa un 5,02 %. Esto significa que, de cada 100 viajes realizados, en 5 de ellos podría ocurrir un accidente.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el autobús NO sufra un accidente? Calcula e interpreta su resultado.

d. A partir de los resultados anteriores, ¿qué decisión tomarías: te subes o no a este autobús?, ¿por qué?

2. Lee atentamente la afirmación de Fabián. ¿Estás de acuerdo con él? Argumenta y comunica tu respuesta al curso.



El **teorema de la probabilidad total** nos permite calcular la probabilidad de un suceso a partir de probabilidades condicionadas.

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos (una partición del espacio muestral) tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de $P(B/A_i)$, entonces la **probabilidad del suceso** ***B*** viene dada por la siguiente expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

¿Por qué las probabilidades de la situación del autobús son condicionadas? Argumenta tu respuesta.

3. Emilia guarda todos sus calcetines sueltos en un cajón. El color y la cantidad de estos se muestra a continuación:

4 pares de calcetines azules	2 pares de calcetines verdes
	

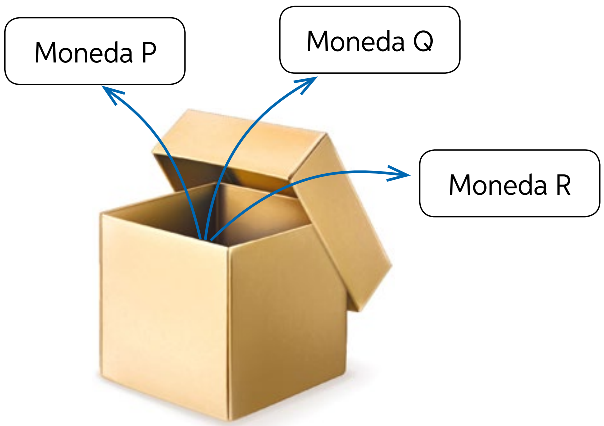
Para el cálculo considera el total de calcetines que hay de cada color.

Emilia decide colocarse cierto día dos calcetines de diferente color y los saca del cajón con los ojos cerrados.

a. Representa las probabilidades de cada suceso en un diagrama de árbol.

b. Calcula la probabilidad de que los calcetines sean de distinto color.

4. En un concurso hay una caja que contiene las siguientes monedas:



La moneda P es normal (tiene cara y sello).
La moneda Q tiene cara por los dos lados.
La moneda R está truncada de forma tal que la probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{3}$.

El concursante debe apostar por cara o por sello. Ganará si los resultados al extraer la moneda y al lanzarla coinciden con su apuesta.

a. Construye un diagrama de árbol con las probabilidades del experimento "extraer al azar una moneda y lanzarla al aire".

b. ¿Qué le conviene apostar al concursante: cara o sello? Aplica el teorema de la probabilidad total.

5. Investiga de qué trata el teorema de Bayes y explícaselo a un compañero ejemplificando con la actividad 1 (situación del autobús). Luego, responde:

a. ¿Qué semejanzas y diferencias existen con el teorema de la probabilidad total?

b. ¿Pudiste explicar con facilidad el teorema a tu compañero o necesitaste la ayuda de tu profesor? Justifica tu respuesta.

11 y 12

Para concluir

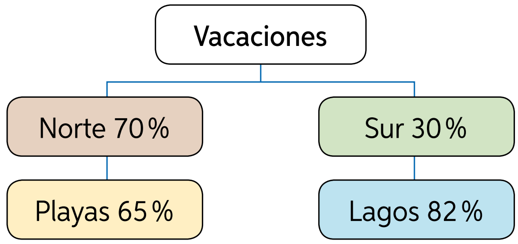
a. ¿En qué situaciones puedes aplicar el teorema de la probabilidad total? Da un ejemplo diferente de los estudiados en este tema.

b. Señala las ventajas que tiene el uso del diagrama de árbol para el cálculo de las probabilidades.

Antes de continuar

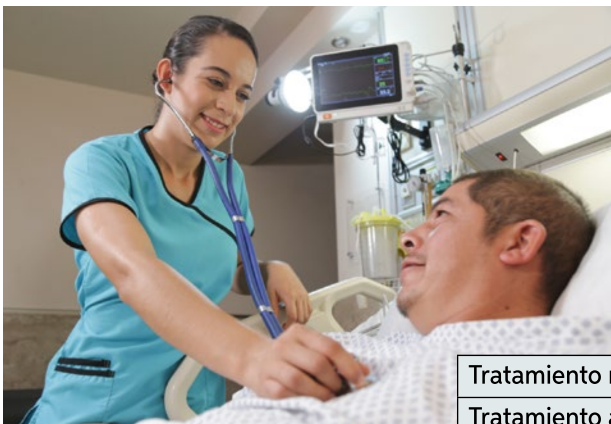
Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Mientras planea sus vacaciones, Rosa comenzó a pensar en los lugares que ha visitado y realizó el siguiente esquema:
   a. Construye un diagrama de árbol con las probabilidades de los sucesos considerando que el comportamiento de Rosa se podría repetir según sus estadísticas.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que vaya a un lugar que no sea playa, dado que ya ha decidido ir al norte?



Medicina

2. Para curar una enfermedad un grupo de doctores ha aplicado un nuevo tratamiento a una serie de pacientes en el cual obtuvieron los resultados reflejados en la siguiente tabla:



	Curados	No curados	Total
Tratamiento nuevo	60	21	81
Tratamiento antiguo	43	36	79
Total	103	57	160

Si se elige un paciente al azar, calcula la probabilidad de que:

a. Se haya curado.
b. No se haya curado.
c. Se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento nuevo.
d. No se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento nuevo.
e. Se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento antiguo.
f. No se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento antiguo.
g. ¿Qué decisión debe tomar el grupo de doctores: seguir con el nuevo tratamiento o volver al antiguo?

13

3. Explica la utilidad del teorema de la probabilidad total.

Reflexiono

- ¿Qué representaciones de la probabilidad condicionada te parecieron más adecuadas para cada problema? Explica y compara tu respuesta.
- De acuerdo con el desempeño obtenido en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Crea un plan de mejora.

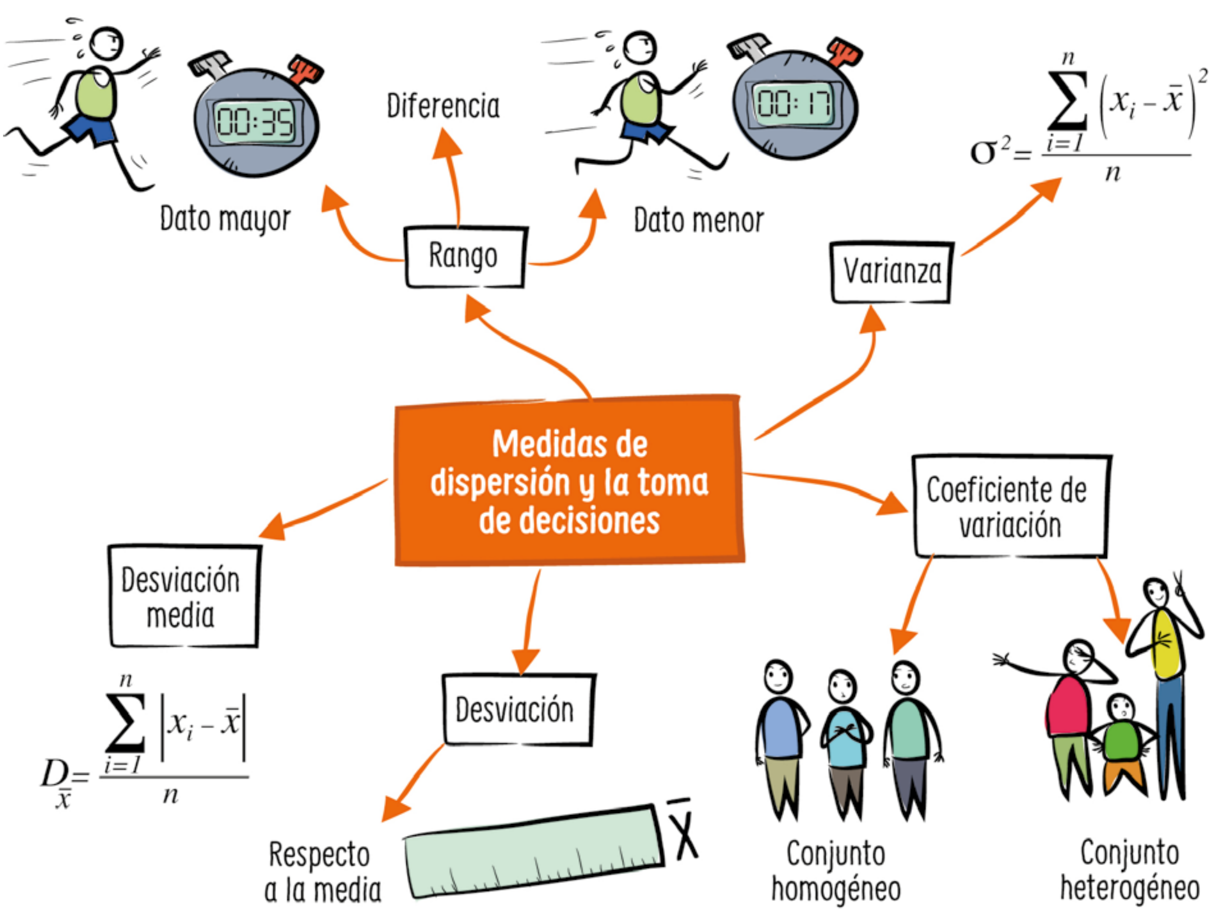
Síntesis

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es un mapa mental?

Un mapa mental es un organizador visual que sirve para ordenar las informaciones o los conceptos y las relaciones que establecen entre sí. Parte de una idea central, la más importante o general, alrededor de la cual se van situando las ideas secundarias o los conceptos más concretos, y las relaciones que las unen.

A continuación, se presenta un ejemplo de mapa mental con algunos de los conceptos estudiados durante la Unidad.



Ahora, hazlo tú

1. Elabora un mapa mental para sintetizar lo estudiado en la Lección Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales.
2. Comparte con tu curso el mapa mental que elaboraste y responde:
   - ¿Qué consideraron tus compañeros y tú para elaborar sus respectivos mapas mentales?
   - ¿Qué similitudes y diferencias reconoces entre los diversos mapas elaborados?
   - Los conceptos que fueron comunes, ¿con qué dibujo se representaron?

Repaso

Realiza las siguientes actividades.

Lección 1: Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión

1. Define con tus palabras los siguientes conceptos:
   a. Dispersión.
   b. Rango.
   c. Varianza.
   d. Desviación media.
   e. Conjunto homogéneo.
   f. Conjunto heterogéno.

2. Se realizó una encuesta a estudiantes de dos colegios. La pregunta fue la siguiente: ¿Cuántas veces comes fruta en el día? Los resultados se organizaron en las tablas que se muestran a continuación:

Colegio A

N° de veces que comes fruta en el día	f
0	120
1	375
2	235
3	180
4	90

Colegio B

N° de veces que comes fruta en el día	f
0	90
1	240
2	280
3	120
4	80
5	10

   a. Calcula el rango de cada muestra. ¿Cómo interpretarías los resultados?
   b. En cada caso, calcula la varianza y la desviación estándar.
   c. ¿En qué colegio el consumo de fruta es más homogéneo?
   d. ¿Qué medida de dispersión usaste para dar la respuesta a la pregunta anterior?
   e. Cierta institución quiere aplicar un programa de alimentación saludable en el colegio que presente el mayor coeficiente de variación. ¿Qué decisión tomará dicha institución?

Lección 2: Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales

3. Se realiza una rifa entre 450 números vendidos. Si el número ganador es múltiplo de 5, ¿cuál es la probabilidad de que gane una persona que compró los números 155 y 420?

4. En una sala de clases están reunidos 30 hombres y 25 mujeres. 4 hombres son ingenieros, 3 son técnicos, 8 son estudiantes de Pedagogía y los demás son estudiantes de Bachillerato. Entre las mujeres, 6 son ingenieras, 10 son estudiantes de Pedagogía y el resto son estudiantes de Bachillerato.
   a. Construye una tabla de contingencia.
   b. Calcula la probabilidad de escoger a una mujer si se sabe que es ingeniera.
   c. Calcula la probabilidad de elegir a un estudiante de bachillerato si se sabe que es hombre.

5. Explica con tus palabras el teorema de la probabilidad total.

¿Qué aprendí?

Realiza las siguientes actividades para evaluar los conocimientos aprendidos durante esta Unidad.

1. Los precios, sin redondear, de la bencina de 95 octanos durante 7 semanas pasada en dos bencineras se registraron en la siguiente tabla.

Precio de la bencina por litro durante 7 semanas en dos bencineras

	Semana						
	1	2	3	4	5	6	7
Precios ($) Bencinera 1	649,6	648,7	652,9	663,9	662,5	661,3	662,4
Precios ($) Bencinera 2	663,7	646,8	645,8	663,2	661,7	660,1	698,5

   a. Calcula el rango, el promedio y la desviación estándar para el precio de la bencina en cada bencinera.
   b. Si una persona quiere comprar en la bencinera que presenta la menor variación en el precio, ¿por cuál debería optar? Argumenta.
   c. ¿Qué medida de dispersión te ayudó a responder la pregunta anterior?

2. La directora de un colegio otorgará una beca al estudiante de 1° medio cuyo buen rendimiento se haya mantenido durante el primer semestre. Para calcular el mejor promedio, se consideraron las asignaturas que se muestran a continuación.

Calificaciones de Gladys

Matemática 6,3
Lenguaje, Comunicación y Literatura 6,8
Historia, Geografía y Ciencias Sociales 6,4
Ciencias Naturales 6,5

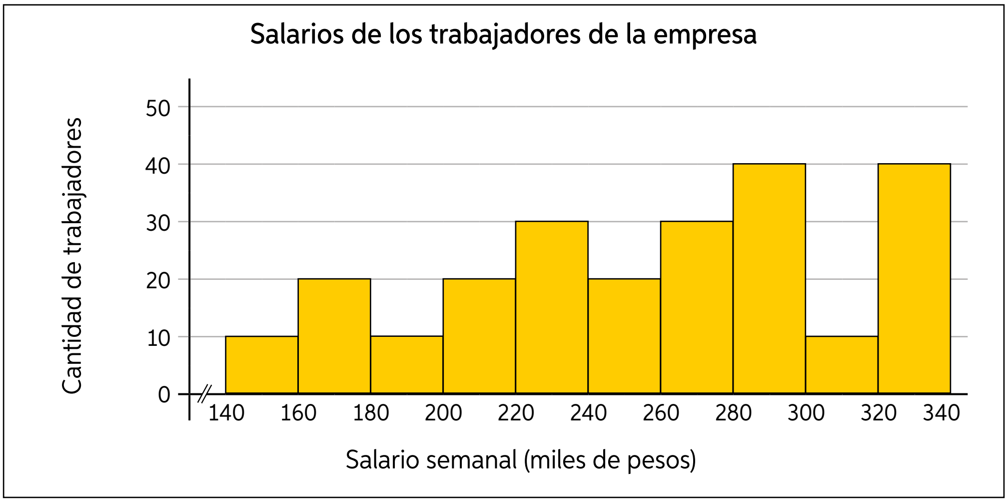
Calificaciones de Manuel

Matemática 6,1
Lenguaje, Comunicación y Literatura 6,9
Historia, Geografía y Ciencias Sociales 6,2
Ciencias Naturales 6,8

   a. ¿Cuál es el promedio semestral de Gladys y Manuel?
   b. Calcula el rango, la varianza y la desviación estándar de las notas de cada estudiante.
   c. ¿Las notas de qué estudiante presentan mayor dispersión?
   d. A partir de los resultados anteriores, ¿qué decisión tomará la directora si solo un estudiante debe ser elegido? Justifica tu respuesta.

3. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

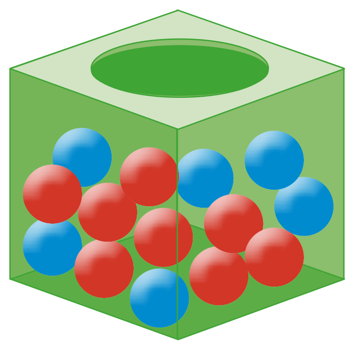
En el siguiente histograma se representa la distribución de los salarios semanales, en miles de pesos, de los trabajadores en una empresa.



a. ¿Cuál es el salario promedio de los trabajadores de la empresa? ¿Cuál es el coeficiente de variación?

b. Se sabe que, en una empresa similar, los trabajadores reciben en promedio $120 000 semanales aproximadamente, con una varianza de $5 000. ¿Qué empresa presenta sueldos más homogéneos?

4. Una urna contiene bolitas rojas y azules. La cantidad que hay de cada color se muestra en la imagen. Si se extraen dos bolitas sucesivas de esta urna, calcula:



a. La probabilidad de que la primera sea roja y la segunda azul, sabiendo que las extracciones se realizan sin reposición.

b. La probabilidad de que ambas sean azules, sabiendo que las extracciones se realizan con reposición.

c. La probabilidad de que ambas sean rojas, sabiendo que las extracciones se realizan sin reposición.

Tránsito

5. En un control de tráfico fueron multados 18 conductores: seis por no llevar puesto el cinturón de seguridad y los restantes por sobrepasar la velocidad máxima permitida. Si se eligen al azar dos de los conductores multados, ¿cuál es la probabilidad de que ambos hayan sido multados por exceso de velocidad?

Reflexiono

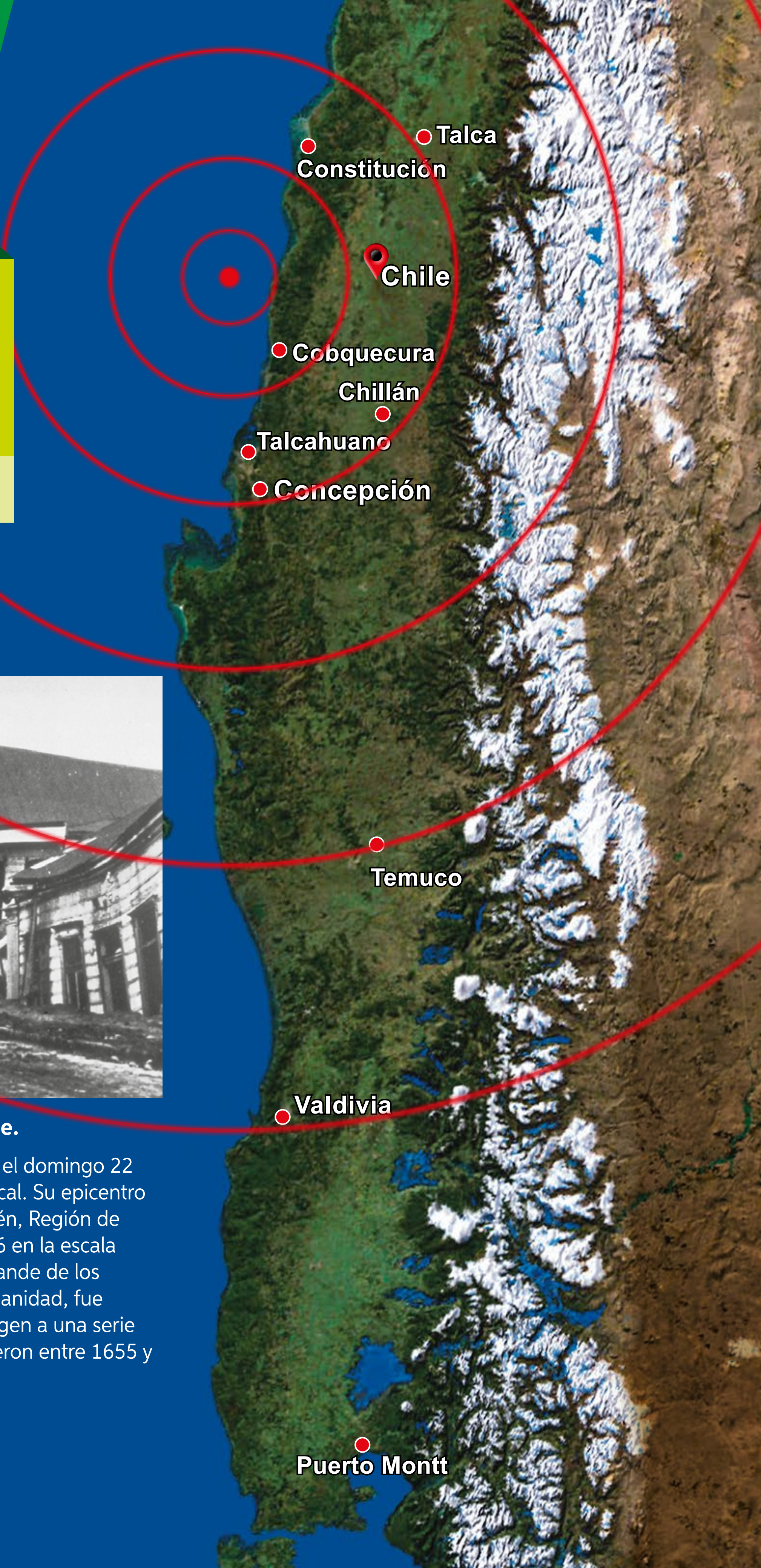
- ¿Tuvieron buenos resultados tus planes de mejorar propuestos en las evaluaciones anteriores? ¿A qué crees que se debe? Explica.
- ¿Qué tan interesante te resultó esta Unidad? ¿Para qué crees que es útil aprender sus contenidos? Fundamenta tus respuestas.

P ¿Qué decisiones en situaciones de incerteza tomaste en la realización del proyecto de Unidad? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste.

Unidad 2

MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR Y PREDECIR

Álgebra y funciones



Terremoto de Valdivia, 1960, Chile.

El **gran terremoto** de Valdivia ocurrió el domingo 22 de mayo de 1960 a las 15:11 hora local. Su epicentro se registró en las cercanías de Traiguén, Región de la Araucanía y su magnitud fue de 9,6 en la escala de Richter. Este terremoto, el más grande de los cuantificados en la historia de la humanidad, fue percibido en todo el planeta y dio origen a una serie de maremotos. Se estima que fallecieron entre 1655 y 2190 personas.

La escala de Richter describe la magnitud de la energía liberada por un sismo. Pese a ser modificada para intensidades superiores a 7, se puede relacionar la magnitud de un sismo y la energía liberada en él mediante la siguiente expresión:

$$\log E = 1{,}5M + 11{,}8$$

donde *E* es la cantidad de energía liberada expresada en ergios y *M* es la magnitud del sismo en la escala de Richter. A su vez, aplicando la definición de logaritmo, la energía liberada en función de la magnitud del sismo es:

$$E = 10^{11{,}8 + 1{,}5M}$$

En parejas, respondan:

1. ¿Qué les llamó la atención de las imágenes anteriores?, ¿por qué?
2. ¿Cómo se relaciona el título de la Unidad, “Modelamiento matemático para describir y predecir”, con la información presentada en estas páginas? Expliquen.
3. ¿Qué otros modelos matemáticos conocen que sean aplicados en otras disciplinas? Mencionen al menos 2.
4. Una persona le dice a otra que el terremoto de Valdivia fue casi 1 grado más fuerte que el de 2010. ¿Piensan que es correcta esta afirmación?, ¿qué significará esta diferencia de magnitud en términos de energía liberada? Discútanlo en grupos y retomen esta pregunta al finalizar el estudio de esta Unidad.

Terremoto de Chile, 2010.

El segundo terremoto más grande registrado en Chile se produjo el sábado 27 de febrero de 2010 a las 03:34 hora local. Su epicentro se registró frente a las costas de la Región de Ñuble y su magnitud fue de 8,8. La duración del sismo fue de más de 4 minutos en las cercanías y de más de 2 minutos en Santiago.

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

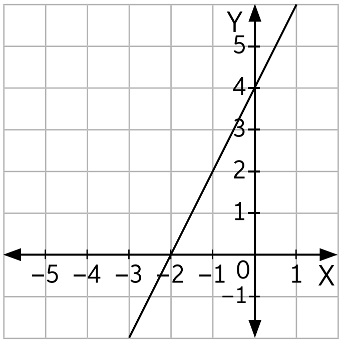
- Modelamientos de fenómenos con la función exponencial.
- Modelamientos de fenómenos con la función logarítmica.

Activo lo que sé

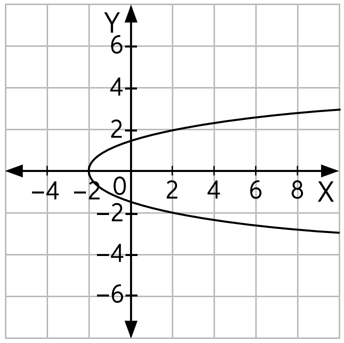
Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Indica, en cada caso, si la gráfica representa una función.

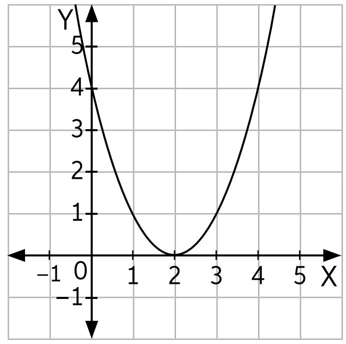
a.



b.



c.



2. Calcula en cada caso el valor de x.

a. $4^x = 64$

b. $0{,}5^x = 4$

c. $x^{-5} = 243$

d. $\log_9 x = 3$

e. $\log_x 8 = 0{,}5$

f. $\log_6 216 = x$

3. Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones definidas para números reales según la regla de formación dada.

$f(x) = -2x$	$g(x) = \frac{1}{3}x + 1$	$h(x) = -x^2 + 3$	$r(x) = x + 2$

4. Determina el dominio y el recorrido de las funciones de la actividad 3.

5. Describe la gráfica de la función $f(x) = kx$ si:

a. k es un número mayor que cero.

b. k es un número menor que cero.

6. El sueldo que ganará Andrés considera un monto fijo más una comisión por cada venta que realice. ¿Qué expresión modela el sueldo mensual $S(x)$ que recibirá en función de la cantidad x de ventas?

Reflexiono

- Con respecto a tu desempeño en esta evaluación, ¿qué te resultó más fácil y más difícil de responder?, ¿por qué?
- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de esos contenidos crees que debes repasar antes de continuar?

Lección
3

Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

Función exponencial

Objetivo: Describir modelos y representar gráficamente las funciones exponenciales.

¿Qué funciones estudiaste en cursos anteriores? Descríbelas.

¿Qué estrategia utilizas para representar gráficamente una función?

1. Observa la siguiente situación. Luego, realiza lo pedido.

Francisca estudia el comportamiento de dos cultivos de bacterias, 1 y 2. Ambos comenzaron inicialmente con una cantidad de 1000 bacterias.

a. ¿Qué función permite modelar la cantidad de bacterias en el cultivo 1? Analiza el procedimiento que usó Francisca.

- Para hacer el estudio, construye una tabla de valores y escribe lo que se muestra a continuación.

Tiempo (horas)	Cantidad de bacterias		
0	1000	$\longrightarrow$ *1000*	$\Leftrightarrow$ $1000 \cdot 3^0$
1	3000	$\longrightarrow$ $1000 \cdot 3$	$\Leftrightarrow$ $1000 \cdot 3^1$
2	9000	$\longrightarrow$ $1000 \cdot 3 \cdot 3$	$\Leftrightarrow$ $1000 \cdot 3^2$
3	27 000	$\longrightarrow$ $1000 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$\Leftrightarrow$ $1000 \cdot 3^3$
4	81 000	$\longrightarrow$ $1000 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$\Leftrightarrow$ $1000 \cdot 3^4$

- En este caso, la función que permite modelar la situación está dada por $f(t) = 1000 \cdot 3^t$, con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $f(t)$ es la cantidad de bacterias y t es el tiempo expresado en horas.

b. ¿Por qué la relación $f(t) = 1000 \cdot 3^t$ es función? Explica.

c. Transcurrido un tiempo, ¿la cantidad de bacterias describe un modelo lineal? Argumenta tu respuesta.

d. ¿Qué función modela la cantidad de bacterias en el cultivo 2? Nómbrala como $g(t)$.

El tipo de función en que la variable independiente se encuentra en un exponente recibe el nombre de ***función exponencial****.*

e. ¿Cuántas bacterias habrá en cada cultivo al cabo de 8 horas? Usa una calculadora y aproxima a la décima el resultado.

Se define como **función exponencial** a la función de la forma

$f(x) = ab^x$, donde a, $b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$.

¿Cuál sería el dominio de las funciones de la situación anterior?

2. En parejas, utilicen la version online de GeoGebra y sigan los pasos.

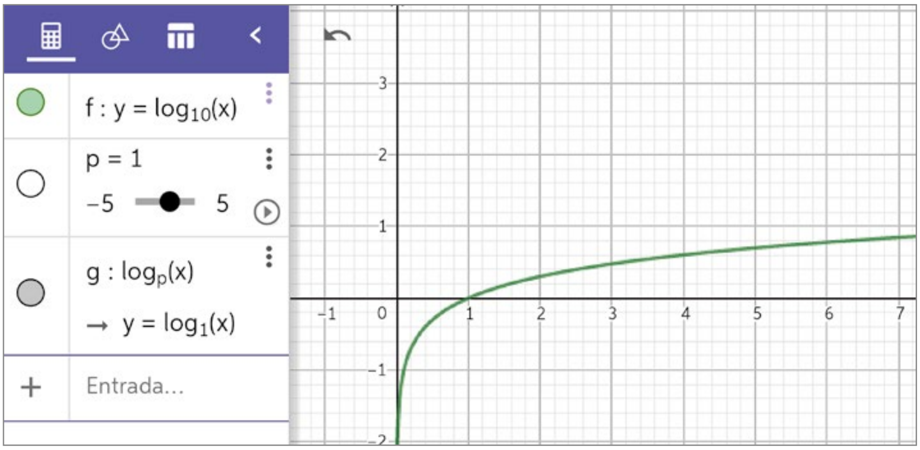
Paso 1: Ingresen a www.geogebra.org. Luego, inserten 2 deslizadores, *a* y *b*. Los valores mínimo y máximo para *a* serán –10 y 10, y para *b*, 0 y 10.

Paso 2: Escriban en la celda Entrada $f(x) = ab^x$ y presionen Enter. Repitan el procedimiento para $g(x) = 2^x$. Obtendrán la siguiente gráfica:

*Para escribir $f(x) = ab^x$ debes digitar a*b^x.*

a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de *g*?

b. ¿Cuál es la intersección con el eje Y? ¿Qué sucede con la gráfica respecto del eje X?



Paso 3: Fijen el valor en *a* = 1 y muevan el deslizador. Luego, analicen lo que ocurre con la gráfica de la función en los siguientes casos:

$b > 2$	$2 > b > 1$	$0 < b < 1$

c. ¿Qué ocurre con el dominio y el recorrido en cada caso?

d. ¿Qué ocurre con las intersecciones con los ejes en cada caso?

e. Expliquen con sus palabras lo que ocurre con la gráfica de la función cuando *b* toma distintos valores.

Paso 4: Fijen el valor *b* = 2 y muevan el deslizador *a*. Luego, analicen lo que ocurre con la gráfica de la función en los siguientes casos:

$a > 1$	$0 < a < 1$	$-1 < a < 0$	$a < -1$

f. ¿Qué ocurre con el dominio y el recorrido en cada caso?

g. ¿Qué ocurre con las intersecciones con los ejes en cada caso?

h. Expliquen con sus palabras lo que ocurre con la gráfica de la función cuando *a* toma distintos valores.

3. Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones.

$f(x) = 3^x$	$g(x) = 5^x$	$p(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$q(x) = (2{,}5)^{-x}$

A partir de las gráficas, responde:

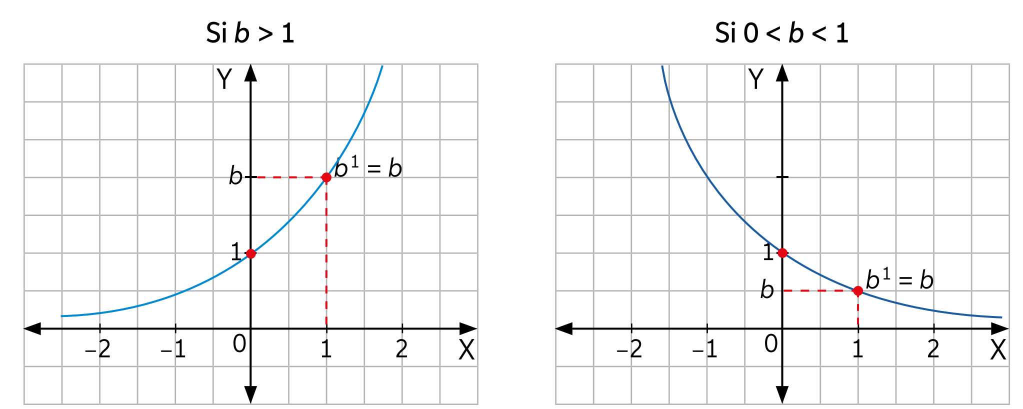
a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones?
b. ¿Qué punto en común tienen las gráficas?
c. ¿Intersecan las gráficas el eje X?
d. ¿Qué sucede con la gráfica respecto del eje X? Explica.
e. ¿Qué ocurre con la gráfica de ***f*** y ***g*** a medida que *x* aumenta?, ¿y con la gráfica de ***p*** y ***q***?

*Para **graficar** una **función exponencial** puedes:*

- *Dar valores para x y determinar su correspondiente en f(x).*
- *Ubicar los puntos en el plano cartesiano.*
- *Trazar la gráfica uniendo los puntos.*

En una **función exponencial** de la forma $f(x) = ab^x$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$, podemos observar lo siguiente:

- Su **dominio** es el conjunto de todos **los números reales** ($\mathbb{R}$).
- Su **recorrido** es el conjunto de todos los **números reales positivos** ($\mathbb{R}^+$).
- La gráfica **interseca el eje Y** en el punto **(0, *a*)** y no interseca el eje X, que actúa como asíntota de la gráfica.
- La gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ depende del valor de *b*. Así:



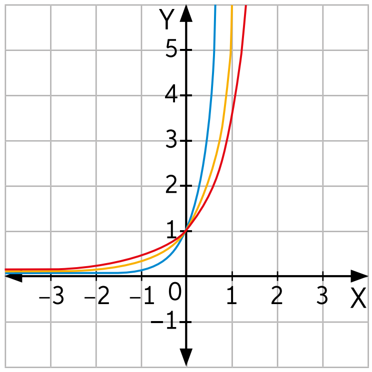
La función es **creciente**. La función es **decreciente**.

Si $|a| < 1$, la gráfica de $y = ab^x$ es una **dilatación** de $y = b^x$, mientras que $|a| > 1$ es una **contracción**.
Además, mientras mayor es el valor de *b*, la función tiene un mayor crecimiento.

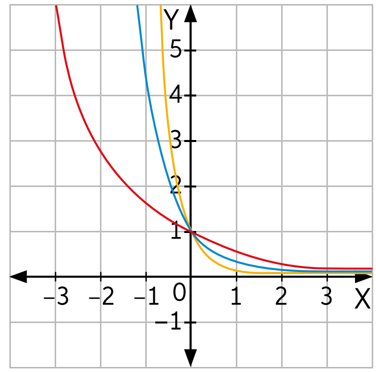
- ¿Por qué, en la situación de las bacterias (actividad 1), el dominio de la función no son todos los números reales? Explica.
- Considera una función exponencial de base mayor que 1. ¿Cómo es su comportamiento para valores negativos de *x*?
- ¿Cómo crees que sería la gráfica de $f(x) = 2^x + 3$?

4. Identifica en cada caso a qué curva corresponden las funciones dadas.

a. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 4^x$, $h(x) = 10^x$



b. $f(x) = 0{,}3^x$, $g(x) = 0{,}6^x$, $h(x) = 0{,}1^x$



5. Representa en el *software* GeoGebra las funciones de los casos 1 y 2. Luego, responde.

Caso 1

$f(x) = 2^x$	$g(x) = 2^{x+3}$	$h(x) = 2^{x-1}$

Caso 2

$p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$q(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$	$r(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$

a. ¿Qué ocurre con la gráfica de las funciones en el caso 1?, ¿y en el 2?

b. Escribe las conclusiones que puedes obtener con respecto a la traslación de las funciones.

c. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones?

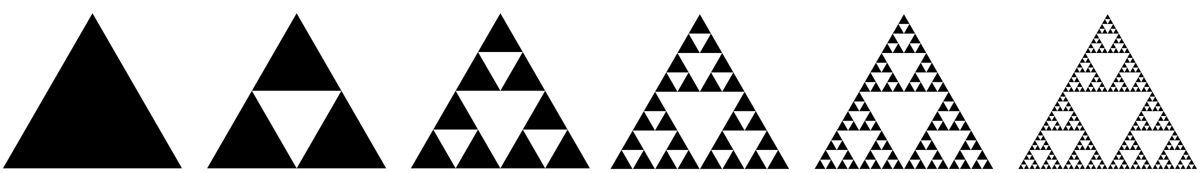
La gráfica de $y = ab^{x-c}$ es una **traslación horizontal** de **c** unidades respecto de $y = ab^x$, hacia la **derecha** si $c > 0$ y hacia la **izquierda** si $c < 0$.

La gráfica de $y = ab^x + h$ es una **traslación vertical** de h unidades respecto de $y = ab^x$, hacia **arriba** si $h > 0$ y hacia **abajo** si $h < 0$.

¿Cómo graficarías la función $f(x) = 2^{x+1} - 2$?, ¿qué estrategia usarías? Explica.

Geometría

6. El **triángulo de Sierpinski** es una figura que se construye a partir de un triángulo equilátero (etapa 0), sobre el cual se trazan las medianas y se retira el triángulo central (etapa 1). Para las siguientes etapas, esto se repite en cada uno de los triángulos restantes. En rigor, el triángulo de Sierpinski es la figura obtenida después de infinitas etapas.



Etapa 0 Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3 Etapa 4 Etapa 5

a. ¿Cuántos triángulos negros hay en cada etapa? Escríbelo como potencia.

b. ¿Qué función permite modelar la cantidad de triángulos negros $C(n)$ que habrá en la etapa n?

Biología

7. En epidemiología se utilizan diversos modelos matemáticos para representar el número de personas contagiadas por una enfermedad. Por ejemplo, el número de personas contagiadas por un virus está dado por la función

$$f(t) = \frac{10\,000 \cdot (2{,}72)^t}{(2{,}72)^t + 9000}, \text{ donde } t \text{ es la cantidad de días.}$$

a. ¿Cuántos contagiados se espera que habrá luego de 1, 4 y 10 días?

b. Grafica la función en GeoGebra. ¿Qué ocurre al cabo de mucho tiempo? Comenta tu respuesta con tu curso.

c. ¿Es una función creciente o decreciente?

Usa una calculadora para realizar los cálculos.

Actividad de aplicación

Crecimiento en el uso de las redes sociales

¿Qué haremos? Describir el crecimiento en el uso de las diferentes redes sociales en Chile o a nivel mundial.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 estudiantes. Cada grupo deberá escoger una red social.

Paso 2: Investiguen en Internet acerca de la red social que escogieron y estudien cómo ha sido el crecimiento de su uso. Para ello, busquen y registren la cantidad de usuarios durante los últimos años.
Para tener más datos, pueden investigar sobre la cantidad de usuarios por mes. Así se podrá obtener un mejor análisis de la información.

Analicemos y presentemos

Paso 3: Representen en un gráfico la información obtenida y observen el comportamiento de los datos. Luego, respondan.

- ¿Representa la gráfica un crecimiento o decrecimiento?, ¿cómo lo supieron?
- ¿Pueden afirmar que la red social que escogieron presenta un crecimiento exponencial en su uso? Fundamenten su respuesta.
- Estimen la cantidad de usuarios que habrá para 2028 si sigue el mismo comportamiento.

Paso 4: Elaboren un tríptico o folleto informativo acerca del trabajo realizado. Luego, compartan el trabajo realizado en alguna plataforma digital de uso común para el curso.

14 a 16

Para concluir

a. ¿Cómo se define una función exponencial? Explica con un ejemplo.

b. Si una población de animales tiene una variación porcentual negativa constante, ¿cuál base elegirías para la función exponencial que modela la situación: una mayor a 1 o menor a 1? Justifica tu respuesta.

c. ¿Qué dificultades tuviste en el desarrollo de este tema?, ¿cómo las superaste?

Crecimiento y decrecimiento exponencial

Objetivo: Aplicar modelos matemáticos que describen situaciones de crecimiento y decrecimiento exponencial.

¿Qué características tiene una función exponencial? Descríbelas.

¿Cómo diferencias gráficamente entre una función exponencial de base mayor a 1 y una con base mayor a 0 y menor a 1?

1. Lee la información del recuadro. Luego, realiza lo pedido.

El economista y demógrafo inglés Thomas Malthus (1766-1834) estudió la población humana y concluyó que el número de habitantes se puede modelar según la expresión $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$, donde $P(t)$ es la población en un tiempo t, P_0 es la población en $t = 0$ y r es una constante relacionada con la tasa de crecimiento.

Según la información recolectada por los censos del Instituto nacional de Estadísticas (INE), en Chile había 13 348 401 habitantes en 1992 y 15 116 435 en 2002.

a. Observa el procedimiento para estimar la cantidad de habitantes que había en Chile en 2012.

- Como pasaron 10 años entre ambos censos, se puede conocer el valor de r resolviendo la ecuación:

$t = 0 \rightarrow$ año 1992
$t = 10 \rightarrow$ año 2002
$P_0 = 13\,348\,401$
$P(t) = 15\,116\,435$

$$15\,116\,435 = 13\,348\,401 \cdot e^{10r}$$

$$\frac{15\,116\,435}{13\,348\,401} = e^{10r} \quad / \ln$$

$$\ln\left(\frac{15\,116\,435}{13\,348\,401}\right) = 10r \rightarrow r \approx 0{,}01243$$

Se aplica logaritmo natural para despejar la incógnita.

- Luego, la población estimada de habitantes en Chile en 2012 es:

$$P(10) = 15\,116\,435 \cdot e^{0{,}01243 \cdot 10} \rightarrow P(10) \approx 17\,117\,179 \text{ habitantes.}$$

b. ¿Qué puedes decir con respecto a la estimación anterior? Para responder esta pregunta investiga en sitios web de información confiable y compara.

c. Considera la población mundial que había en 2018 y realiza una estimación para 2040. Luego, investiga sobre las predicciones que se han hecho para ese año. ¿Se acerca tu estimación a lo esperado? Justifica.

La **función exponencial** modela muchas situaciones de diversas áreas. Por ejemplo, en ciencias sociales, el crecimiento demográfico; en biología, el crecimiento bacteriano, y en economía, el interés compuesto, entre otras.

Si el crecimiento de las variables que experimenta un fenómeno se puede modelar con una función de la forma $f(x) = ab^x$, con $a > 0$ y $b > 1$, entonces presenta un **crecimiento exponencial**.

Si el crecimiento de las variables que experimenta un fenómeno se puede modelar con una función de la forma $f(x) = ab^x$, con $a > 0$ y $0 < b < 1$, entonces presenta un **decrecimiento exponencial**.

¿Cómo se relaciona el título de la Unidad con lo trabajado en esta página?

2. Lee la situación y realiza lo pedido.

Marcos decide abrir una cuenta de ahorro para financiar en el futuro los estudios de su hijo recién nacido. Por su parte, el banco le ofreció la tasa de interés anual que se muestra en la imagen.

El monto que depositó Marcos en la cuenta fue de \$1 000 000. Si no retira el dinero ni los intereses, ¿qué capital tendrá a los 5 años?, ¿qué capital tendrá cuando su hijo cumpla 18 años?

a. Analiza el siguiente procedimiento para responder las preguntas planteadas.

- El capital (C_1) que tendrá al primer año será:

$$C_1 = 1\,000\,000 + 1\,000\,000 \cdot \frac{4{,}8}{100}$$
$$C_1 = 1\,000\,000 + 1\,000\,000 \cdot 0{,}048$$
$$C_1 = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}048)$$
$$C_1 = 1\,000\,000 \cdot (1{,}048) \rightarrow C_1 = 1\,048\,000$$

- Para los años siguientes formamos la siguiente tabla:

Tiempo (años)	Capital (\$)
0	1 000 000
1	$1\,000\,000 \cdot 1{,}048 = 1\,048\,000$
2	$1\,048\,000 \cdot 1{,}048 = 1\,000\,000 \cdot (1{,}048)^2 = 1\,098\,304$
3	$1\,098\,304 \cdot 1{,}048 = 1\,000\,000 \cdot (1{,}048)^3 \approx 1\,151\,023$

Sea $i = \frac{r}{100}$, entonces se verifica que:
Al final del 1.° año → $C_1 = C + Ci = C(1 + i)$
Al final del 2.° año → $C_2 = C_1(1 + i) = C(1 + i)^2$
Al final del 3.° año → $C_3 = C_2(1 + i) = C(1 + i)^3$

b. Según lo anterior, si depositas un capital C a una tasa de interés de r%, ¿qué capital (C_t) se habrá formado al cabo de t años?

c. Utiliza una calculadora y responde las preguntas de la situación.

El **interés compuesto** es una ley de capitalización por la cual los intereses obtenidos al final de cada periodo se suman al capital anterior para producir nuevos intereses en el siguiente periodo.

Un capital inicial C al r%, al cabo de t años se convierte en:

función exponencial de base (1 + i). → $C_t = C(1 + i)^t$, donde $i = \frac{r}{100}$

Esta expresión se aplica en general: en procesos en los que el aumento es un porcentaje de la cantidad existente, para estudiar el crecimiento de poblaciones de seres vivos y también para emplearla en los casos en que $C_t < C$, con tal de sustituir $(1 + i)^t$ por $(1 - i)^t$.

¿Es el interés compuesto una aplicación relacionada con el crecimiento o el decrecimiento exponencial?, ¿por qué?

3. Resuelve cada situación. Para ello, analiza el ejemplo.

Un bosque tiene 28 000 m^3 de madera y aumenta 3,5 % cada año. Si sigue creciendo en las mismas condiciones, ¿cuánta madera tendrá al cabo de 15 años? ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la cantidad de madera?

- El crecimiento del bosque está dado por la función $M(t) = 28\,000 \cdot (1 + 0{,}035)^t$, donde $M(t)$ indica la madera, en m^3, que tendrá al cabo de t años. Por lo tanto, para $t = 15$, se obtiene $M(15) = 28\,000 \cdot (1 + 0{,}035)^{15} \approx 46\,910$ m^3.
- Para duplicar la cantidad de madera, se realiza lo siguiente:

$$56\,000 = 28\,000(1 + 0{,}035)^t$$
$$2 = 1{,}035^t \qquad / \log$$
$$\log 2 = t \cdot \log 1{,}035$$
$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}035} \approx \frac{0{,}301}{0{,}015} \approx 20 \text{ años}$$

a. En una automotora se vende la moto que muestra la imagen. La depreciación anual de este vehículo consiste en la disminución del 20 % de su precio.
- ¿Cuál es la función que modela la situación?
- ¿Esta situación corresponde a un crecimiento o decrecimiento exponencial?
- ¿Qué valor tendrá la moto luego de 5 años?
- ¿Cuántos años transcurrirán para que su precio sea de $249 081?

b. En la caja de un fármaco se indica lo siguiente:

¿Qué tanto por ciento de efectividad tendrá luego de 2 meses?, ¿y a los 4 meses?

c. Un cubo de hielo de 4 cm^3 se introduce en un vaso de agua. Por cada minuto que pasa, el 10 % de su volumen se transforma en agua líquida.
- ¿Cuál es la función que modela la situación?
- ¿Qué cantidad de hielo quedará al cabo de 12 minutos?

17 y 18

Para concluir

a. Con respecto a la actividad 2, ¿en cuánto tiempo el capital depositado por Marcos se duplicará?

b. Explica cómo reconoces cuando un modelo describe un crecimiento o un decrecimiento exponencial.

c. ¿Qué estrategia usaste para resolver los problemas?, ¿por qué esa y no otra? Explica.

Antes de continuar

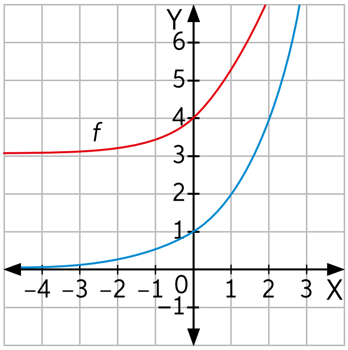
Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. En un mismo plano cartesiano, construye la gráfica de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = 3^x - 4$
   b. $h(x) = 5^{2-x} - 2$
   c. $i(x) = -2^{-x+6}$

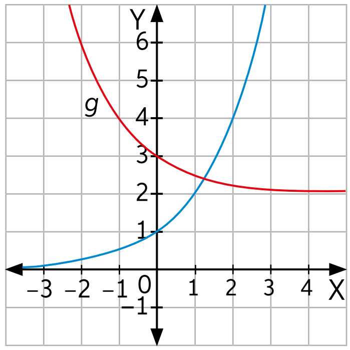
2. Determina el dominio y el recorrido de las funciones de la actividad anterior.

3. En cada caso, identifica la función correspondiente a la gráfica. La curva en azul corresponde a $\boldsymbol{y = 2^x}$.

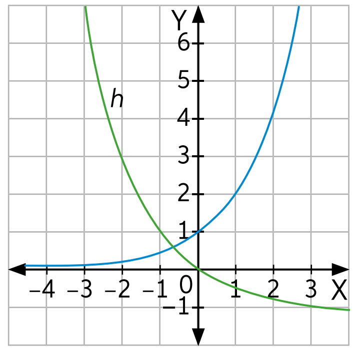
a.



b.



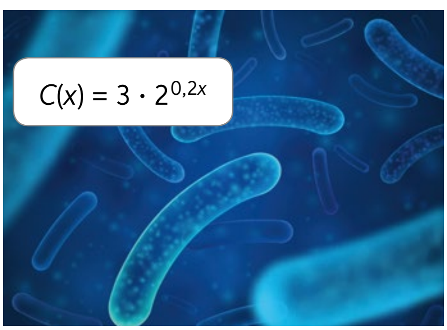
c.

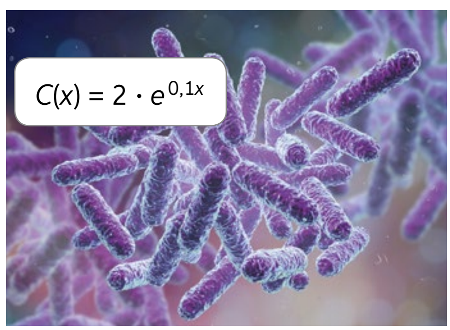


4. Un capital de $800 000 ha sido invertido en un banco a una tasa de 7 % de interés anual.
   a. ¿Cuál es el capital final luego de 10 años?
   b. ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse el monto inicial?

Biología

5. Un equipo de biólogos ha proyectado que, dentro de $\boldsymbol{x}$ días los siguientes cultivos tendrán una cantidad $\boldsymbol{C(x)}$ de millones de bacterias según lo que se indica.





   a. ¿Cuál de los cultivos de bacterias presenta el crecimiento más rápido? Justifica tu respuesta.
   b. ¿Cuántas bacterias habrá en 10 días en cada caso? Justifica tu respuesta.

19

Reflexiono

- De las aplicaciones de la función exponencial vistas en la Lección, ¿de cuál te gustaría saber más? Investiga y comparte con un compañero.
- De acuerdo con tu desempeño en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Crea un plan de acciones que permitan superar dichas dificultades.

Lección

4

Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

Función logarítmica

Objetivo: Aplicar modelos matemáticos de funciones logarítmicas y también representar gráficamente dichas funciones.

¿Cómo se define un logaritmo? Explica con un ejemplo.

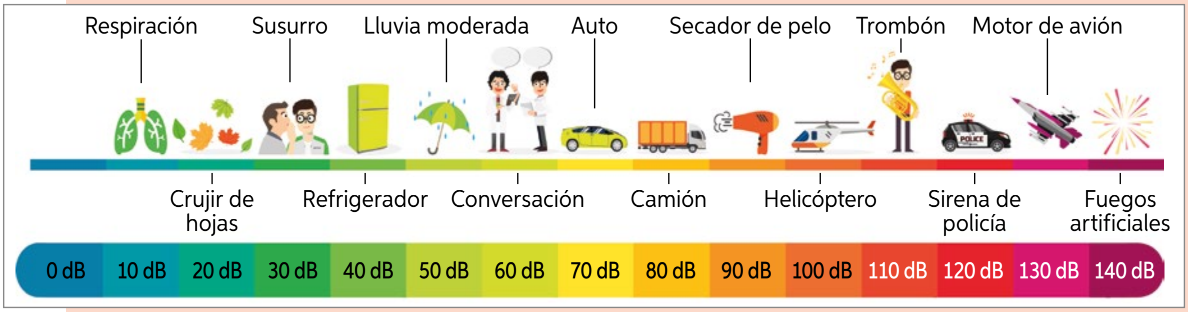
¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos que estudiaste en cursos anteriores?

Acústica

1. Lee la siguiente información. Luego, responde.

La intensidad del sonido se mide en vatios por metro cuadrado (W/m^2). La menor intensidad que puede captar el oído humano, llamado **umbral de audición,** es 10^{-12} W/m^2. A partir de 1 W/m^2, comienza el **umbral del dolor** en el oído. Para comparar un sonido cualquiera con la menor intensidad audible, se utiliza la siguiente función:

$\beta(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde β es el nivel de intensidad sonora medido en decibeles (dB), I es la intensidad del sonido en W/m^2 e I_0 es el umbral de audición (10^{-12} W/m^2).



a. Calcula el nivel de intensidad sonora (en decibeles) del umbral del dolor. Guíate por el siguiente ejemplo del umbral de audición.

$$\beta(10^{-12}) = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right)$$

$$\beta(10^{-12}) = 10\log 1$$

$$\beta(10^{-12}) = 0$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora del umbral de audición es 0 dB.

b. Escoge 3 situaciones de las que aparezcan en la imagen y calcula la intensidad de sonido (W/m^2) de cada una. Observa el ejemplo para el refrigerador (40 dB).

$$40 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

$$4 = \log I - \log(10^{-12})$$

Se aplican propiedades de logaritmo.

$$4 = \log I + 12\log 10$$

$$4 = \log I + 12$$

Se aplica la definición de logaritmo.

$$-8 = \log I \rightarrow I = 10^{-8}\ W/m^2$$

c. En general, se recomienda que, al usar audífonos, no se superen los 80 dB. Sin embargo, muchas personas los utilizan cerca de los 100 dB.

- ¿Cuál es la intensidad del sonido de estas magnitudes?
- ¿Cuántas veces mayor es la intensidad de los 100 dB que la recomendada?

2. Aplica el modelo matemático anterior para conocer el nivel de intensidad sonora (en decibeles) de los siguientes fenómenos:


Discoteca: 10^{-1} W/m^2


Tren en túnel: 10^{-3} W/m^2


Bomba de Hiroshima: 10^{8} W/m^2


Tráfico intenso: 10^{-4} W/m^2


Biblioteca: 10^{-10} W/m^2


Aspiradora: 10^{-5} W/m^2

- Si se sabe que un equipo de sonido tiene una intensidad igual al doble de la de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en decibeles?
- ¿A qué volumen escuchas música? ¿Te has informado de los cuidados que debes tener para no dañar tus oídos?

3. Representa la función $f(x) = \log_2 x$. Para ello, realiza lo pedido.
   a. Elabora una tabla de valores y grafica la función en el plano cartesiano.
   b. A partir de la gráfica, responde:
      - ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función?
      - ¿En qué punto la gráfica se interseca con el eje X?
      - ¿La gráfica interseca el eje Y?
      - ¿Qué ocurre con los valores de la función cuando aumenta el valor de x? ¿Es una función creciente o decreciente?

Recuerda que, para una potencia $y = a^x$, se define el logaritmo $x = \log_a y$. Por ejemplo:

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow 4 = \log_2 16$$

Se define **función logarítmica** como la función de la forma:

$$f(x) = \log_a x, \text{ con } a > 0 \text{ y } a \neq 1.$$

En ella se tiene que:

- Su **dominio** es el conjunto de todos los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$).
- Su **recorrido** es el conjunto de todos los números reales ($\mathbb{R}$).
- La gráfica **interseca** el **eje X** en el punto **(1, 0)** y no interseca el eje Y, que actúa como asíntota de la gráfica.

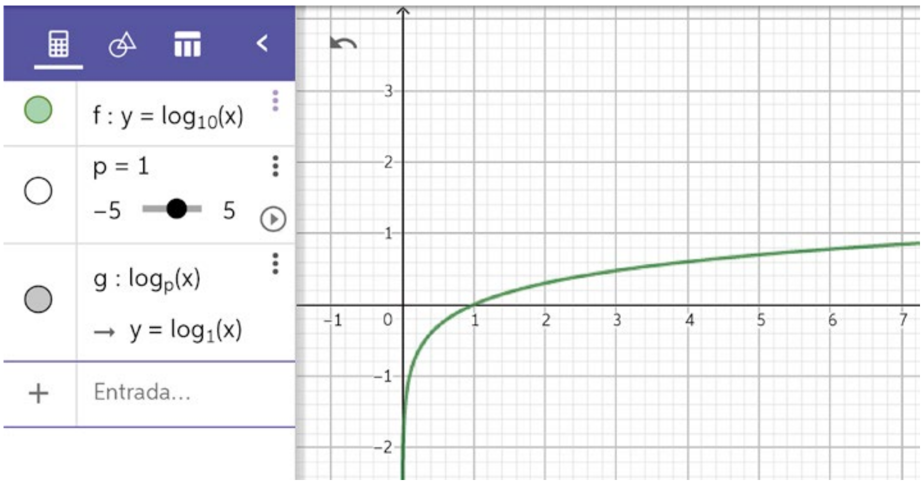
Existen varios fenómenos o situaciones de la naturaleza que son modelados mediante una función logarítmica. Por ejemplo: la intensidad del sonido, la magnitud de un sismo, la escala del pH, entre otros.

TIC

4. En parejas, utilicen la versión online del *software* GeoGebra y sigan los pasos.

Paso 1: Escriban en la celda Entrada la función $y = \lg(x)$. Luego, presionen Enter.

Paso 2: Construyan la gráfica de $y = \log_p x$. Para ello, inserten un deslizador p escribiendo en la celda Entrada $y = \log(p, x)$. Luego, presionen Enter y muevan el deslizador para que tome distintos valores. Deben obtener la gráfica que se muestra a continuación:



a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función?

b. ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

c. ¿Qué ocurre con la gráfica de la función cuando p toma valores cada vez mayores?

d. Describan lo que ocurre con la gráfica de la función cuando p toma valores entre 0 y 1. ¿Por qué se produce esto?

e. ¿Puede tomar p valores negativos? Justifiquen su respuesta.

Paso 3: Inserten un deslizador b, escribiendo en la celda Entrada $y = \lg(x) + b$. Presionen Enter y muevan el deslizador.

a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

b. Describan lo que ocurre con la gráfica de la función cuando b toma valores cada vez mayores.

c. ¿Puede b tomar valores negativos? Justifiquen y describan lo que ocurre.

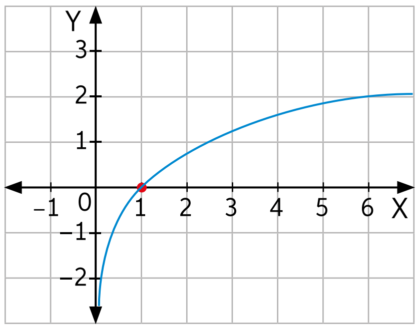
Paso 4: Inserten un deslizador c, escribiendo en la celda Entrada $y = \lg(x - c)$. Presionen Enter y muevan el deslizador.

a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

b. Describe lo que ocurre con la gráfica de la función cuando c toma distintos valores.

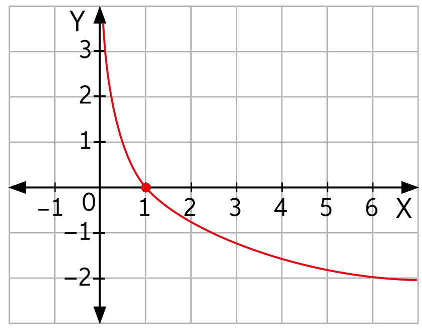
La **gráfica** de una función logarítmica de la forma $f(x) = log_a x$ depende del valor de a. Así:

Si $a > 1$



La función es **creciente**.

Si $0 < a < 1$



La función es **decreciente**.

Además, mientras mayor es el valor de a, la función tiene un **mayor crecimiento**.

La gráfica de $y = \log_a x + b$ es una **traslación vertical** de b unidades respecto de $y = \log_a x$, **hacia arriba** si $b > 0$ y **hacia abajo** si $b < 0$.

La gráfica de $y = \log_a(x - c)$ es una **traslación horizontal** de c unidades respecto de $y = \log_a x$, **hacia la derecha** si $c > 0$ y **hacia la izquierda** si $c < 0$.

¿Cómo sería la gráfica de la función $f(x) = -\log x$? Comenta con tu curso.

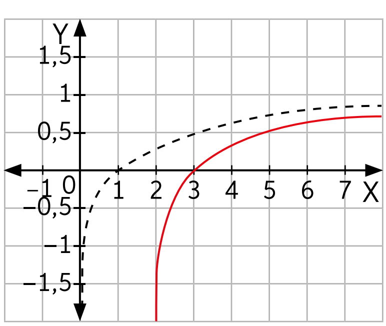
5. Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones logarítmicas. Guíate por el ejemplo.

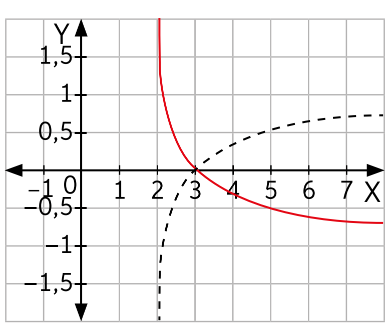
$f(x) = 1 - \log(x - 2)$

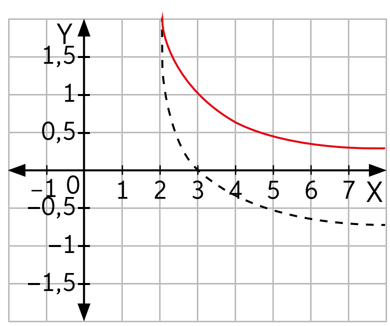
Se grafica $y = \log x$ y se traslada 2 unidades a la derecha para obtener $y = \log(x - 2)$.

Se refleja respecto del eje X para obtener $y = -\log(x - 2)$.

Se traslada verticalmente una unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \log(x - 2)$.







a. $f(x) = 1 - \log x$

b. $g(x) = 2\log(x) + 3$

c. $h(x) = \log(x + 1) - 1$

6. Escribe el dominio y el recorrido de las funciones de la actividad 5.

7. Determina los puntos de intersección con los ejes de las gráficas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \log(x + 10)$

b. $g(x) = \log(-x + 5)$

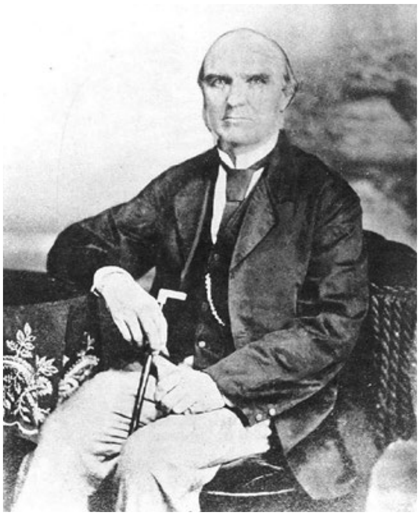
c. $h(x) = 2 + \log_2(x - 2)$

Actividad de aplicación | Logaritmos en la astronomía

¿Qué haremos? Determinar la magnitud aparente de algunos objetos celestes.

La magnitud aparente mide el brillo de un objeto celeste tal y como es observado por una persona en la Tierra.

En el siglo XIX se clasificaron las estrellas en primera y segunda magnitud según su brillo. Fue el astrónomo inglés Norman Pogson quien descubrió que una estrella de primera magnitud es 100 veces más brillante que una de sexta magnitud.



Norman Pogson

La expresión que determinó Pogson para la magnitud aparente de las estrellas está dada por:

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\log\left(\frac{b_1}{b_2}\right),$$

Donde m es la magnitud aparente entre las estrellas y $\frac{b_1}{b_2}$ es la relación de su brillo.

Planifiquemos

Paso 1: En parejas, investiguen la magnitud de al menos 6 objetos celestes, entre ellos pueden ser los que se muestran a continuación:

Sirio

Saturno

Canopus

Paso 2: Determinen cuántas veces más brillante es el Sol que los distintos objetos celestes. Para ello, reemplacen los valores de las magnitudes en la fórmula y dejen expresado $\frac{b_1}{b_2}$. Luego, confeccionen una tabla para ordenar la información obtenida.

Presentemos y concluyamos

Paso 3: Usando las redes sociales, presenten de forma creativa los resultados y las conclusiones que obtuvieron a partir del trabajo realizado.

20 a 22

Para concluir

a. ¿Cómo se define una función logarítmica? Explica con un ejemplo.
b. ¿Cómo es la gráfica de una función logarítmica? Describe sus características.
c. ¿Cómo se diferencian gráficamente la función exponencial y logarítmica?
d. De lo estudiado en este tema, ¿qué crees que necesitas reforzar?

Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Objetivo: Comprender la relación que existe entre las funciones exponencial y logarítmica.

¿Cómo resuelves $2^x = 128$? Explica tu estrategia.

¿Qué estrategia usas para graficar una función exponencial?, ¿y una logarítmica?

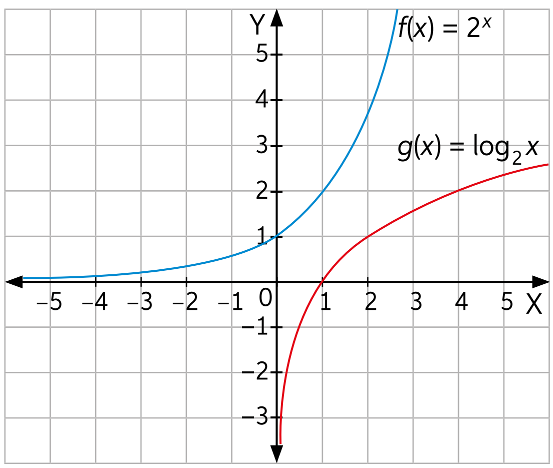
1. Lee la situación. Luego, realiza lo pedido.

Ricardo y Ariela realizan la tarea que les dio la profesora de Matemática. Deben analizar dos funciones: una exponencial $f(x) = 2^x$ y otra logarítmica $g(x) = \log_2 x$.

a. Observa las tablas de valores de cada función y sus gráficas respectivas.

x	$f(x) = 2^x$
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$g(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2



b. Identifica la gráfica correspondiente a cada función.

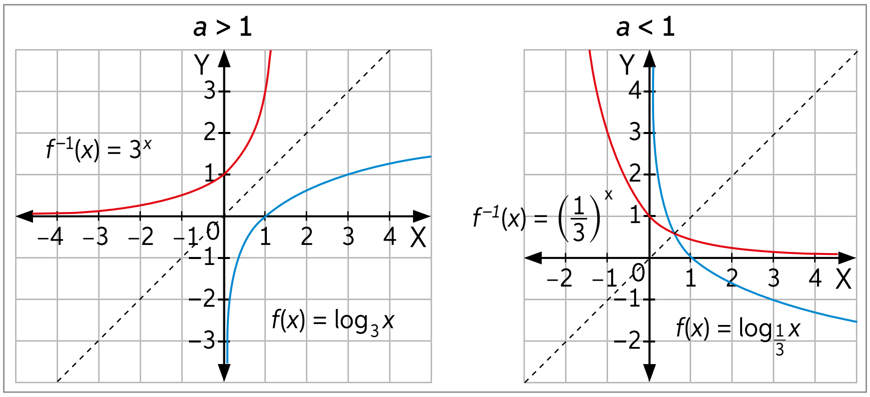
c. Fíjate en los valores asignados a las columnas de cada tabla. ¿Qué observas?

d. ¿Cuáles son las intersecciones de las gráficas con los ejes?

e. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de ambas funciones? ¿Cómo puedes explicar esta relación? Comenta con tu curso.

¿Existe simetría entre las gráficas de las funciones?

La **función logarítmica** $f(x) = log_a x$ es la **función inversa** de la función exponencial $f^{-1}(x) = a^x$. Las gráficas de estas funciones que tienen la misma base son **simétricas** respecto de la recta $y = x$.



Recuerda que si f^{-1} es la función inversa de f, se cumple que

$f: A \longrightarrow B \Rightarrow f^{-1}: B \longrightarrow A$.

2. Representa en el plano cartesiano cada función logarítmica y su inversa.
   a. $f(x) = \log_2 x$ b. $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ c. $g(x) = \log x$

Verifica los gráficos construidos usando una herramienta tecnológica como GeoGebra.

3. Determina algebraicamente la función inversa de las siguientes funciones exponenciales. Observa el ejemplo para $f(x) = 3^x$.

$$y = 3^x \quad / \log_3$$
$$\log_3 y = \log_3 3^x$$
$$\log_3 y = x$$
$$\log_3 x = y \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_3 x$$

   a. $f(x) = 4^x$ b. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c. $f(x) = e^x$

Sismología

4. Aplica el modelo que se mencionó en el inicio de Unidad (página 33) y calcula:
   a. La energía liberada (*E*) en los terremotos de Valdivia (1960) y en el de 2010.
   b. La magnitud (*M*) en los terremotos de Algarrobo y Vallenar:

Algarrobo (1985): $3{,}16 \cdot 10^{23}$ ergios

Vallenar (2013): $1{,}9 \cdot 10^{22}$ ergios


Terremoto de Chile 2010.

Para concluir

a. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Valdivia (1960) que el de 2010?
b. Explica a un compañero cuál es la relación algebraica y gráfica que existe entre la función exponencial y la logarítmica.
c. ¿Cómo se relacionan los dominios y recorridos de las funciones exponencial y logarítmica?

23 y 24

Antes de continuar

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Construye en un mismo plano cartesiano la gráfica de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = \log(x - 4)$ b. $g(x) = 1 - \log(2x)$ c. $h(x) = \log(x + 3) - 2$
2. Determina el dominio y el recorrido de las funciones anteriores.
3. Calcula algebraicamente la función inversa de cada función.
   a. $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ b. $g(x) = 6^x$ c. $h(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$

Química

4. El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una solución. Este se calcula con la siguiente expresión $pH = -\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno, medida en moles/litro.

Si el pH es **menor que 7,** la sustancia es **ácida**; si es igual a 7, es **neutra**; si es mayor que 7, es **básica**.

   a. Determina el pH de una sustancia, cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro. ¿Cómo se clasifica la sustancia?
   b. Calcula la concentración de iones de hidrógeno de las siguientes sustancias conociendo su pH aproximado.

Jugo de naranja pH = 4,5

Jabón de manos pH = 9,5

   c. En algunos lugares muy contaminados se produce el fenómeno de la “lluvia ácida”. Calcula la concentración de iones de hidrógeno para una lluvia ácida con un pH de 2,8.
   d. ¿Qué ocurre con el pH de una solución cuya concentración de iones de hidrógeno se triplica? Utiliza el gráfico de la función para analizarlo. ¿Depende de su concentración original?

Reflexiono

- De las temáticas estudiadas en esta Lección, ¿cuáles fueron tus fortalezas?, ¿y tus debilidades?
- De acuerdo con el desempeño obtenido en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Plantea acciones que permitan superar dichas dificultades.

25

Síntesis

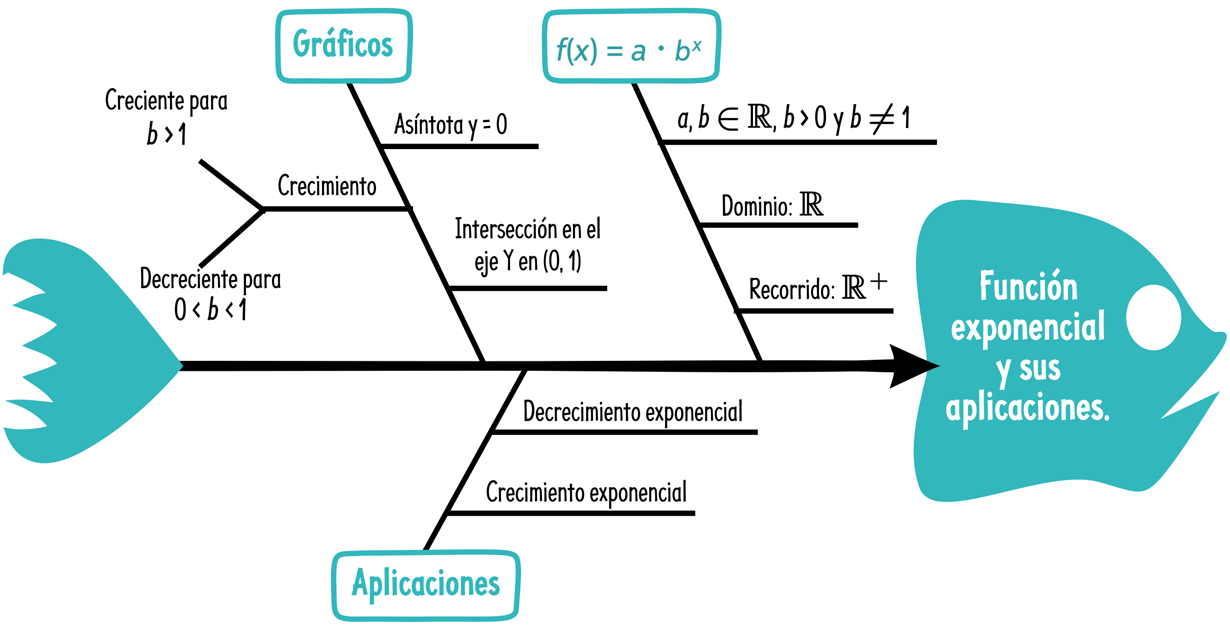
Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es un diagrama de pez?

Conocido también como diagrama de Ishikawa, es un organizador gráfico que nos muestra la relación de diversos factores que conforman un proceso o fenómeno, estructurando ideas y encaminando el proceso principal.

Para confeccionar este diagrama, se debe definir el eje central y los sucesos que intervienen e identificar cómo los procesos están involucrados entre sí.

Observa el diagrama de pez que sintetiza la función exponencial.



Ahora, hazlo tú

1. Explica el diagrama de pez observado.
2. Realiza un diagrama de Ishikawa con la lección de función logarítmica.
3. En parejas, compartan y analicen los diagramas. ¿Qué conceptos utilizaron para crear su síntesis? ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre sus diagramas?

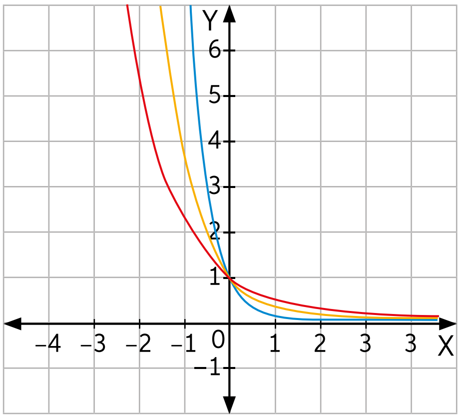
Repaso

Realiza las siguientes actividades.

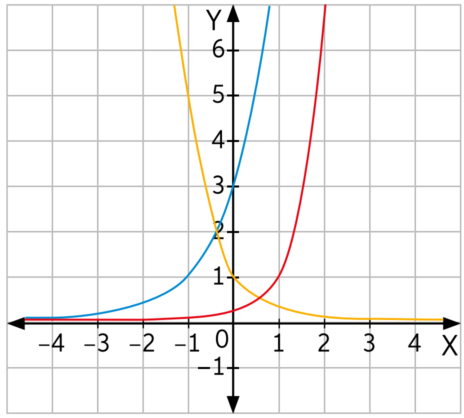
Lección 3: Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

1. Identifica en cada caso a qué curva corresponden las funciones indicadas.

   a. $f(x) = 0{,}4^x$ $g(x) = 0{,}1^x$ $h(x) = 0{,}3^x$



   b. $f(x) = 3^{x+1}$ $g(x) = 0{,}2^x$ $h(x) = 10^{x-1}$



2. Represente la función $f(x) = 2^{x+1} - 1$ en GeoGebra y realiza lo pedido.
   a. Determina el dominio y el recorrido.
   b. ¿Cuál es el punto de intersección con el eje de las ordenadas?
   c. ¿La función interseca el eje X?
   d. Indica si la función es creciente o decreciente.

Medicina

3. La cantidad del medicamento que tomó Sofía disminuye en el torrente sanguíneo aproximadamente en 30 % por cada hora.
   a. Determina el modelo de decrecimiento exponencial.
   b. Calcula el tiempo que tardará el torrente sanguíneo en tener 150 mg de medicamento.

Lección 4: Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

4. Grafica las siguientes funciones logarítmicas en un mismo plano cartesiano.
   a. $f(x) = \log_2 x$
   b. $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
   c. $g(x) = \log_4 x$
   d. $t(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

5. Grafica la función $f(x) = \log_2(x - 4)$ en GeoGebra y realiza lo pedido.
   a. Determina el dominio y el recorrido.
   b. ¿Cuál es el punto de intersección con el eje X?, ¿y con el eje Y?
   c. Indica si la función es creciente o decreciente.

6. ¿Qué relación existe entre las funciones exponencial y logarítmica? Explica.

¿Qué aprendí?

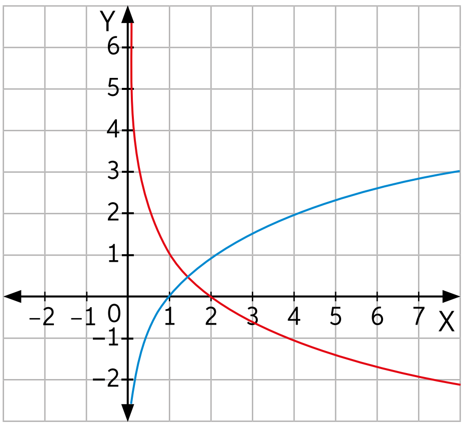
Realiza las siguientes actividades para evaluar los conocimientos aprendidos durante esta Unidad.

1. Representa las siguientes funciones en un mismo plano cartesiano.
   a. $f(x) = 2^{-x} + 1$
   b. $g(x) = 5^{x+3}$
   c. $h(x) = \log_2(x - 1)$
   d. $p(x) = 2 - \log(x)$

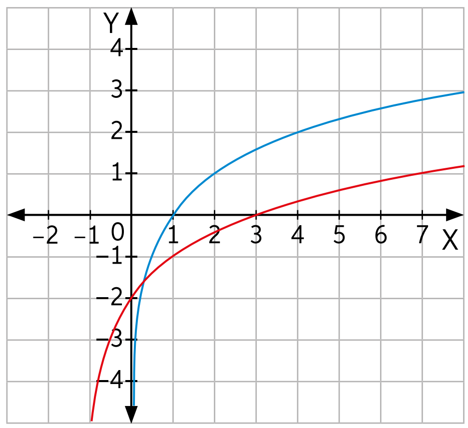
2. Determina el dominio, el recorrido y los puntos de intersección de las gráficas de las funciones anteriores.

3. Identifica las funciones correspondientes a la curva en rojo. La curva en azul corresponde a $\boldsymbol{y = \log_2 x}$.

a.



b.



Medicina

4. La cantidad de miligramos de un medicamento que queda en la sangre luego de t horas de haber sido administrado se calcula mediante la expresión:

$$C(t) = 10e^{-0,2t}$$

   a. ¿Cuántos miligramos del medicamento hay en la sangre luego de una hora?
   b. Si la cantidad de miligramos no puede bajar de 3, ¿cada cuánto tiempo aproximadamente debe tomarse el medicamento?
   c. Según este modelo matemático, ¿hay algún momento en que deja de haber medicamento en la sangre? Justifica tu respuesta.

Química

5. Observa la siguiente tabla con los pH aproximados de las siguientes sustancias:

Sustancia	pH
Vinagre	2,9
Jugo gástrico	1,5
Orina	6,5

Calcula la concentración de iones de hidrógeno de cada sustancia sabiendo que $\text{pH} = -\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno.

6. En noviembre de 2010, Alonso compró un auto por $5 000 000. Si cada año este disminuye 16 % su precio inicial, ¿cuál será su valor en el mercado en 2025?

Acústica

7. Para las siguientes actividades, aplica el modelo $\beta = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, donde β es el nivel de intensidad medido en decibeles e I es la intensidad de sonido en W/m^2.
   a. Calcula la intensidad del sonido que producen los siguientes fenómenos:

		
Avión despegando: 130 dB	Personas gritando: 90 dB	Taladro eléctrico: 100 dB

   b. Si un equipo de música genera un sonido cuya magnitud expresada en W/m^2 triplica la de otro, ¿cuánto mayor es la intensidad en decibeles que posee?
   c. Un amplificador para una guitarra eléctrica tiene 2500 W/m^2 de salida. ¿Cuál es su nivel de intensidad en decibeles?

Sismología

8. Lee la siguiente información y responde.

   El terremoto de Haití de 2010 tuvo una magnitud de 7,2. Fue registrado el martes 12 de enero de 2010 a las 16:53:09 hora local con epicentro a 15 km de Puerto Príncipe, la capital de Haití.

   ¿Cuántas veces menos energía liberó este terremoto que el de Chile del mismo año? Considera el modelo $E = 10^{1,5M + 11,8}$, donde E es la energía liberada en ergios y M es la magnitud del sismo en la escala Richter.

Daños en el distrito comercial, Puerto Príncipe.

Reflexiono

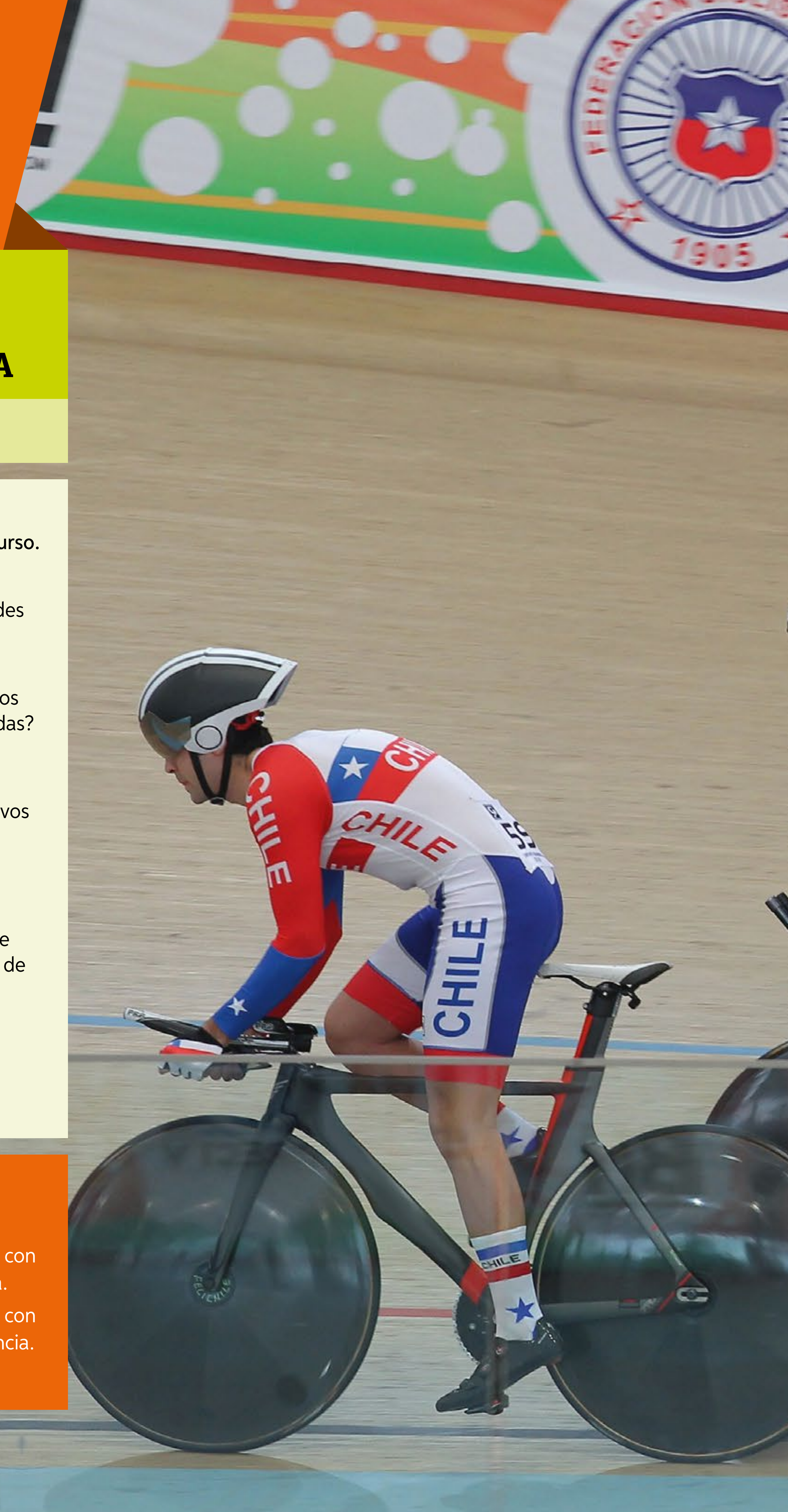
- Según los planes de mejora que te propusiste en cada evaluación intermedia, ¿obtuviste un buen desempeño en esta evaluación?
- ¿En qué temáticas pudiste responder con mayor facilidad?, ¿en cuáles fue más difícil responder?
- ¿Por qué crees que es importante estudiar sobre modelos matemáticos? Explica.

P ¿Cómo aplicaste el modelamiento matemático en la realización del proyecto? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

Unidad **3**

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Geometría

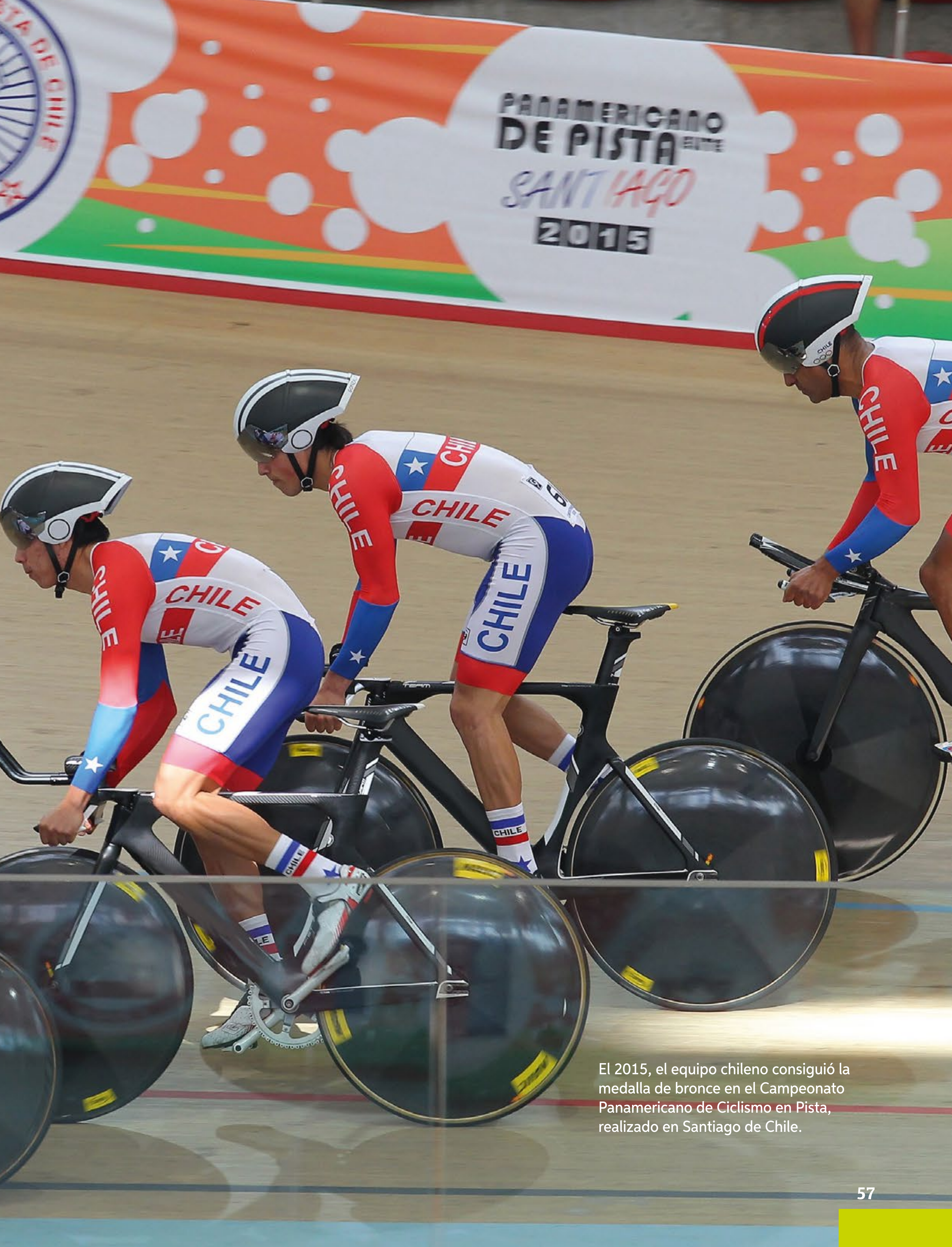


Observa la imagen. Luego, comenta tu respuesta con tu curso.

1. Analiza el nombre de la Unidad: ¿qué relación puedes establecer entre este y la imagen? Explica.
2. ¿Qué conceptos geométricos de la circunferencia recuerdas? Identifica 3 de ellos en la imagen.
3. Uno de los eventos deportivos más importantes a nivel mundial son los Juegos Olímpicos. Investiga sobre sus disciplinas e identifica aquellos deportes en donde estén presentes elementos de la circunferencia.

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- La resolución de problemas con ángulos en la circunferencia.
- La resolución de problemas con segmentos en la circunferencia.



El 2015, el equipo chileno consiguió la medalla de bronce en el Campeonato Panamericano de Ciclismo en Pista, realizado en Santiago de Chile.

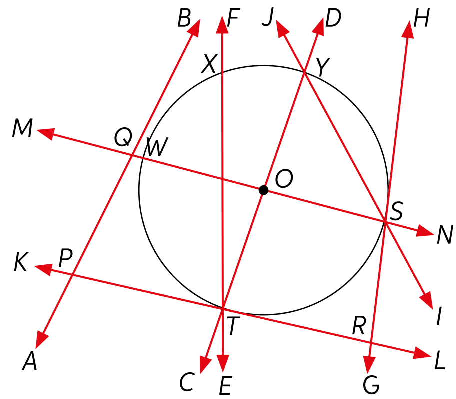
Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

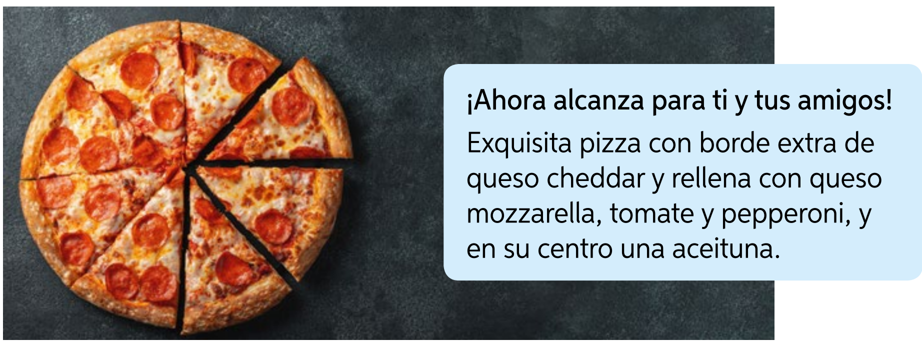
1. Define cada uno de los siguientes conceptos geométricos:
   a. Circunferencia.
   b. Círculo.
   c. Centro de la circunferencia.
   d. Radio.
   e. Diámetro.
   f. Cuerda.
   g. Recta secante.
   h. Recta tangente.
   i. Arco.

2. Dibuja una circunferencia y ubica los elementos definidos en la actividad anterior.

3. Observa la siguiente circunferencia de centro *O* y anota estos elementos:
   a. 2 radios.
   b. 1 diámetro.
   c. 3 arcos.
   d. 2 rectas secantes.
   e. 2 rectas tangentes.



4. Analiza la situación. Luego, responde.
   En un local de comida lanzan la siguiente promoción de pizza de forma circular.



   a. ¿Qué parte de la pizza corresponde a una circunferencia y cuál a un círculo?
   b. Si la pizza la asociaras a una circunferencia, ¿a qué correspondería la aceituna?
   c. Si el radio *r* de la pizza es 18 cm, ¿cuál es su perímetro y su área? Considera $\pi \approx 3,14$.
   d. Si otra pizza de diferente tamaño a la de la promoción se divide entre 8 amigos en partes iguales, a cada uno le toca un trozo con un arco de 9,4 cm de longitud. ¿Cuál es el radio *r* de la pizza? Considera $\pi \approx 3,14$.

Reflexiono

- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de esos contenidos crees que debes repasar antes de continuar?
- ¿Cuáles elementos de la circunferencia recordabas?, ¿fueron tus definiciones acertadas?

Lección
5
Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia

Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia

Objetivo: Resolver problemas que involucren ángulos del centro e inscrito en una circunferencia.

¿Qué tipos de ángulos conoces? Nómbralos.

¿Cuáles son los elementos de una circunferencia?

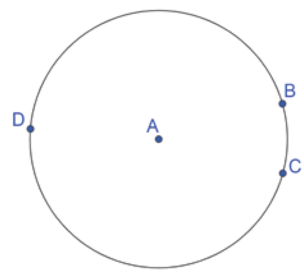
Deportes

1. En parejas, analicen la situación y realicen las actividades utilizando GeoGebra. Finalmente, respondan.

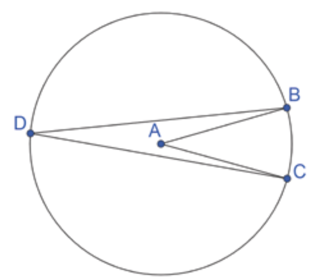
Durante el partido, dos jugadores del equipo A se acercan al arco del equipo B. Para estudiar el ángulo de lanzamiento que tienen los jugadores de A, se realiza el siguiente análisis geométrico, donde el centro de la circunferencia corresponde a la posición del jugador 2 del equipo A.

Para encontrar los ángulos de lanzamiento, sigan estos pasos:

Paso 1: Construyan una circunferencia con la opción Circunferencia (centro, punto). Luego, presionen 2 veces sobre la circunferencia para crear los puntos *B* y *D*.



Paso 2: Con la herramienta Segmento, unan el punto *D* con *B* y con *C*, y el punto *A* con el punto *B* y con *C*. Luego, con la herramienta Ángulo, midan $\sphericalangle CAB$ y $\sphericalangle CDB$. Finalmente, rotulen el punto *A* como "Jugador 2" y el punto *D* como "Jugador 1".



a. ¿Cuál es la relación entre el ángulo de lanzamiento del jugador 2 y del jugador 1 del equipo A?

b. Muevan el punto *C*, de manera que varíe el ángulo de lanzamiento del jugador 1. ¿Qué sucede con la medida del ángulo de lanzamiento del jugador 2? Expliquen.

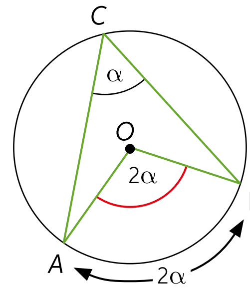
En una circunferencia de centro O, el **ángulo del centro** es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados son radios de esta. La medida del arco $\overset{\frown}{AB}$ es igual a la medida del ángulo del centro AOB. Es decir:

$$m(\sphericalangle AOB) = m(\overset{\frown}{AB})$$

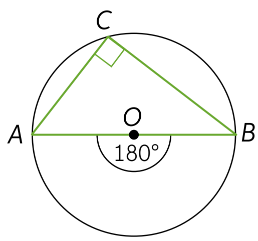
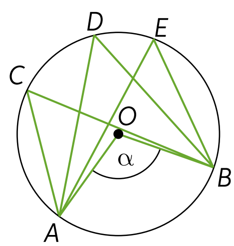
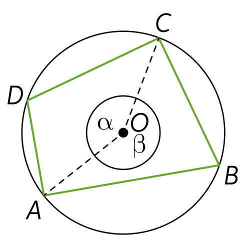
El **ángulo inscrito** es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados son cuerdas de la misma.

Si un ángulo del centro y un ángulo inscrito en una circunferencia subtienden el mismo arco, el ángulo del centro mide el doble que el ángulo inscrito.

Además de lo anterior, en una circunferencia de centro O, se cumplen los siguientes teoremas:



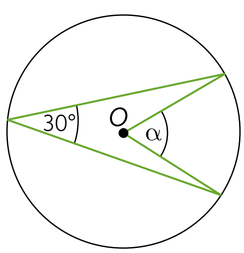
$m(\sphericalangle AOB) = 2m(\sphericalangle ACB)$

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.		$m(\sphericalangle ACB) = \frac{180°}{2} = 90°$
Ángulos inscritos que subtienden arcos iguales son congruentes entre sí.		$m(\sphericalangle ACB) = \frac{m(\sphericalangle AOB)}{2}$; $m(\sphericalangle ADB) = \frac{m(\sphericalangle AOB)}{2}$ $m(\sphericalangle AEB) = \frac{m(\sphericalangle AOB)}{2}$ Por lo tanto, $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ADB \cong \sphericalangle AEB$
En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, sus ángulos opuestos son suplementarios.		$\alpha + \beta = 360°$, pero $m(\sphericalangle CBA) = \frac{\alpha}{2}$ y $m(\sphericalangle ADC) = \frac{\beta}{2}$ Así, $m(\sphericalangle CBA) + m(\sphericalangle ADC) = 180°$ Del mismo modo se obtiene: $m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle DCB) = 180°$

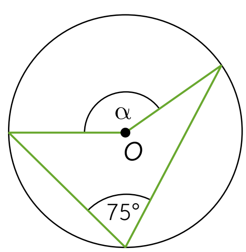
¿Cuál es la medida máxima de un ángulo del centro? Explica tu respuesta.

2. Calcula la medida de α en cada caso.

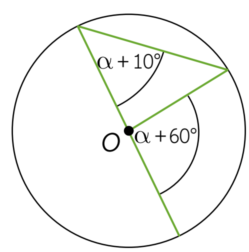
a.



b.

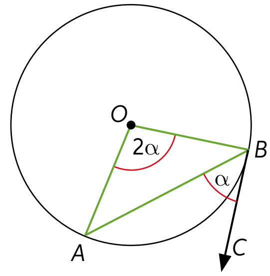


c.



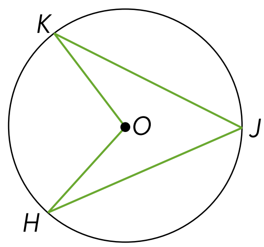
El **ángulo semiinscrito** es aquel cuyo vértice pertenece a la circunferencia. Además, uno de sus lados es una cuerda y el otro es tangente a la circunferencia.

Teorema: si un ángulo del centro y un ángulo semiinscrito en una circunferencia subtienden el mismo arco, el ángulo del centro mide el doble que el ángulo semiinscrito.

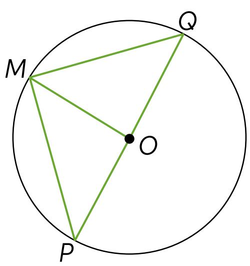


3. Resuelve los problemas.

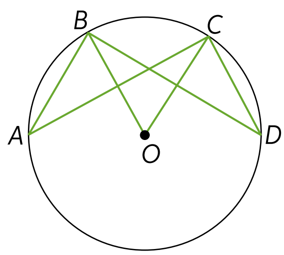
a. Si ∢*OKJ* y ∢*JHO* miden 30°, ¿cuál es la medida de ∢*KOH*?



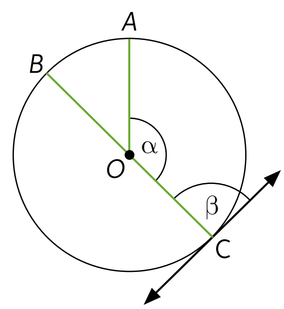
b. Si $\overline{PQ}$ es diámetro y la medida angular de $\overset{\frown}{QM}$ es 60°, ¿cuál es la medida de ∢*PMO*?



c. Si ∢*CDB* mide 15°, ¿cuánto mide ∢*CAB*?



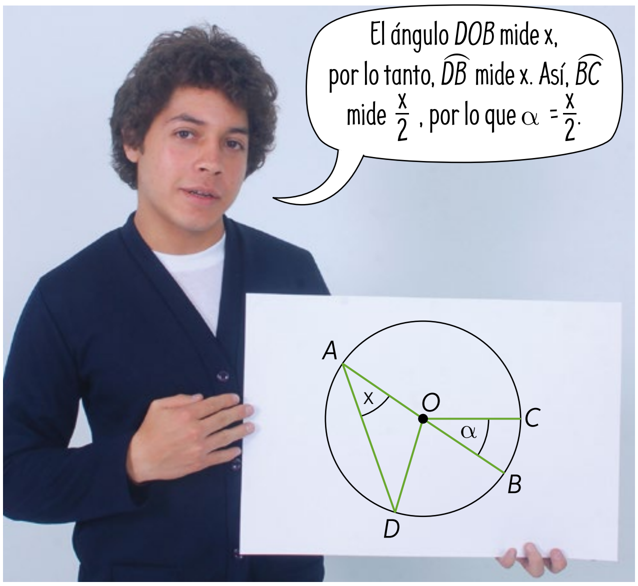
d. Si $\overset{\frown}{AB}$ mide 50°, $\overline{BC}$ es diámetro y *C* es punto de tangencia a la circunferencia, ¿cuáles son las medidas de α y β?



4. Analiza la situación. Luego, responde.

Fabián expone la solución de un ejercicio que pedía calcular la medida del ángulo *x* en función de α. Se sabe que $\overline{AB}$ es diámetro y que la medida angular de $\overset{\frown}{DB}$ es el doble que la medida angular de $\overset{\frown}{BC}$.

Lo que concluyó Fabián es incorrecto. ¿Cuál fue su error? Explica. Luego, calcula la medida de *x*.



¿Qué otros errores crees que es común cometer en el cálculo de ángulos en la circunferencia? Comenta tu respuesta con tu curso.

Actividad de aplicación | Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia mediante videos

¿Qué haremos? Crear un video con situaciones cotidianas en las que se visualicen los teoremas referentes a ángulos del centro e inscrito en una circunferencia.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 4 a 5 estudiantes. Revisen videos con tutoriales de geometría y escojan un estilo. Algunos ejemplos son:

- Video cómico
- Video musical

Paso 2: Asignen roles al equipo, por ejemplo:

- ¿Quién será el camarógrafo?
- ¿Qué materiales y/o recursos necesitan para el video?
- ¿Quién editará el video?
- ¿Quiénes van a actuar?
- ¿Cuánto tiempo destinará cada integrante a realizar su tarea?

Paso 3: Escriban un guión para su video que no supere los 5 minutos.

Ejecutemos

Paso 4: Realicen todas las grabaciones necesarias. Luego, reúnan el material y monten el video con ayuda de algún *software* de edición de video.

Compartamos

Paso 5: Coordinen un mismo canal de Youtube para el curso y suban ahí todos los videos.

Paso 6: Utilicen sus redes sociales para compartir sus videos. Si desean, pueden realizar un concurso de popularidad entre sus videos, el que será compartido con el resto del colegio.

Finalmente, respondan.

- ¿En qué los ayudó esta actividad para el estudio de este tema?
- ¿Qué ventajas tiene utilizar este tipo de recursos para el estudio?
- ¿Qué dificultades tuvieron durante el desarrollo del proyecto?, ¿cómo las superaron?

Recuerden que, mientras más creativos e innovadores sean, mucho mejor. Pueden combinar y transformar ideas de otros canales de YouTube para obtener su propia creación original.

26 y 27

Para concluir

a. ¿Qué estrategia utilizaste para resolver los problemas de este tema?, ¿podrías haber utilizado otras? Explica.

b. Reescribe con tus palabras las demostraciones de los teoremas de este tema.

Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia

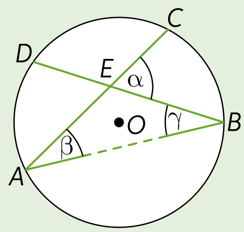
Objetivo: Resolver problemas que involucren ángulos del centro e inscritos en una circunferencia.

¿Qué es una secante?, ¿y una tangente?

¿Qué propiedades se cumplen en los ángulos interiores y exteriores de un triángulo? Explica.

1. Analiza la información y realiza las actividades.

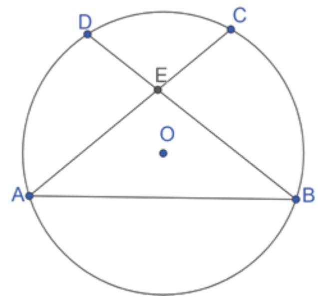
Un ángulo interior α está formado por la intersección de dos cuerdas en un punto al interior de la circunferencia. En la imagen que se muestra al costado, las cuerdas son $\overline{CA}$ y $\overline{DB}$.



a. Considerando que $\alpha = \beta + \gamma$, por ser ángulo exterior al triángulo *AEB*, expresa la medida de α en función de los arcos $\widehat{DA}$ y $\widehat{BC}$.

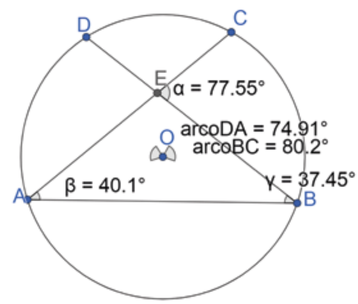
b. Utiliza GeoGebra y construye la circunferencia anterior. Sigue los pasos:

Paso 1: Construye una circunferencia con la herramienta Circunferencia (centro, punto). Rotula el centro de la circunferencia como "*O*". Con la herramienta Segmento, traza las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Finalmente, marca el punto donde se intersecan las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



Paso 2: Con la herramienta Ángulo, mide $\sphericalangle BEC$, $\sphericalangle BAE$ y $\sphericalangle DBA$. Con la herramienta Sector circular, forma los sectores circulares *AOD* y *BOC*.

Paso 3: Con la herramienta Ángulo, mide $\sphericalangle DOA$ y $\sphericalangle BOC$, que serán las medidas angulares de los arcos $\widehat{DA}$ y $\widehat{BC}$ respectivamente. Puedes rotularlos como "arcoDA" y "arcoBC". Finalmente, oculta los sectores circulares.

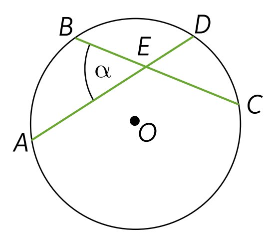


c. Mueve tu construcción de manera tal que varíen los ángulos β y γ. Para cada variación de β y γ, anota el valor de α. Verifica que se cumple la expresión obtenida en *a*.

Dada una circunferencia de centro *O*, con $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ secantes que se intersecan en el punto *E*, se cumple lo siguiente:

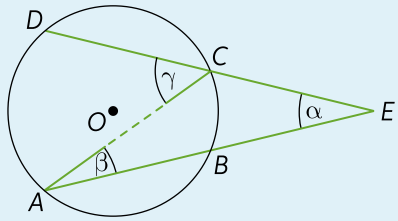
Teorema: La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos que subtienden sus lados y la prolongación de ellos.

$$\alpha = \frac{m(\widehat{BA}) + m(\widehat{CD})}{2}$$



2. En parejas, analicen la información. Luego, respondan.

Un ángulo exterior α es aquel cuyo vértice está fuera de la circunferencia. Puede estar formado por la intersección de dos secantes, una secante y una tangente, o dos tangentes. En la imagen, las secantes son $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.



a. Expresen β en función de la medida angular de $\overset{\frown}{BC}$ y γ en función de la medida angular de $\overset{\frown}{DA}$.

b. Considerando que $\gamma = \alpha + \beta$, por ser ángulo exterior al triángulo AEC, ¿qué expresión representa el valor de α en función de los arcos $\overset{\frown}{DA}$ y $\overset{\frown}{BC}$?

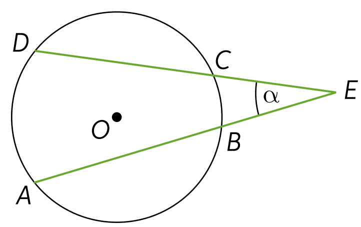
c. Si $m(\overset{\frown}{DA}) = 100°$ y $m(\overset{\frown}{BC}) = 30°$, ¿cuánto mide el ángulo α?

d. Si el ángulo α mide 70° y $m(\overset{\frown}{BC}) = 50°$, ¿cuál es la medida angular de $\overset{\frown}{DA}$?

Dada una circunferencia de centro O, con $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ secantes que se intersecan en el punto E, se cumple lo siguiente:

Teorema: La medida de un ángulo exterior es igual a la mitad de la diferencia de los arcos que subtienden los lados del ángulo.

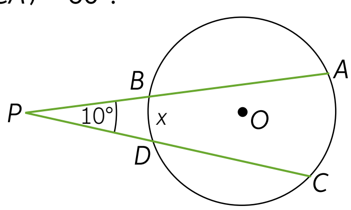
$$\alpha = \frac{m(\overset{\frown}{DA}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2}$$



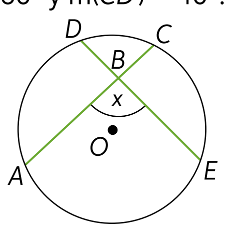
¿Cuál es la mayor medida que puede tener un ángulo exterior? Fundamenta.

3. Calcula el valor de x en cada caso.

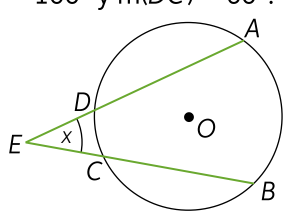
a. $m(\overset{\frown}{CA}) = 80°$.



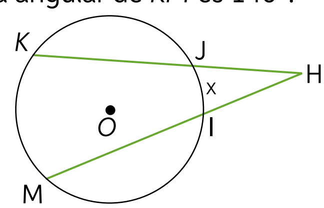
b. $m(\overset{\frown}{AE}) = 80°$ y $m(\overset{\frown}{CD}) = 40°$.



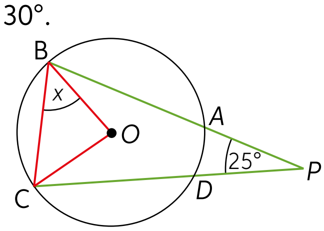
c. $m(\overset{\frown}{BA}) = 100°$ y $m(\overset{\frown}{DC}) = 60°$.



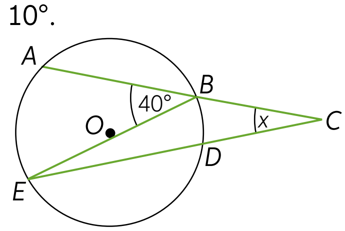
d. La medida de $\sphericalangle KHM$ es 30° y la medida angular de $\overset{\frown}{KM}$ es 140°.



e. $m(\overset{\frown}{DA}) = 30°$.



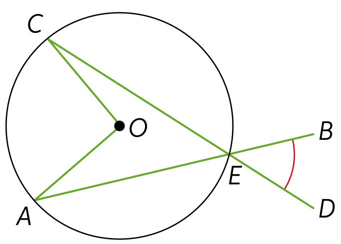
f. $m(\overset{\frown}{DB}) = 10°$.



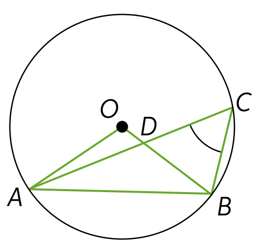
4. Analiza las siguientes afirmaciones hechas por estos estudiantes. Luego, indica si son verdaderas o falsas. Argumenta tu respuesta con un ejemplo.

5. Resuelve los problemas.

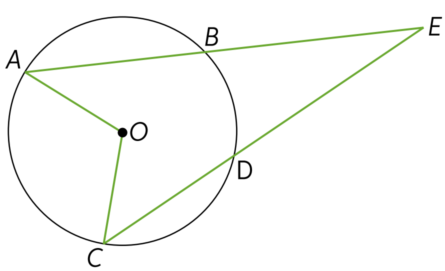
a. En la circunferencia de centro O, $\sphericalangle DEB$ mide 25°. ¿Cuál es la medida de $\sphericalangle COA$?



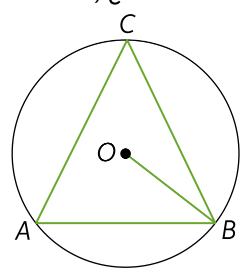
b. Si $\sphericalangle BAO$ mide la mitad de lo que mide $\sphericalangle AOB$, ¿cuánto mide $\sphericalangle ACB$?



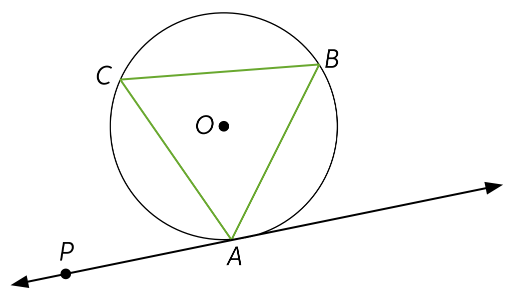
c. $\sphericalangle AOC$ mide 110° y $m(\widehat{DB}) = 70°$. ¿Cuál es la medida de $\sphericalangle DEB$?



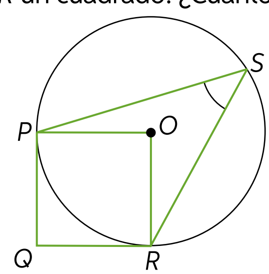
d. Si $\sphericalangle ACB$ mide 40°, ¿cuánto mide $\sphericalangle OBA$?



e. El triángulo ABC está inscrito en la circunferencia y la recta $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente en A. Si $\sphericalangle BAC$ mide 80° y $\sphericalangle BAP$ mide 125°, ¿cuánto mide $\sphericalangle CBA$?



f. Sea $OPQR$ un cuadrado. ¿Cuánto mide $\sphericalangle PSR$?



6. Javiera calculó la medida de $\sphericalangle AEC$ pero su desarrollo está incorrecto.

a. ¿Cuál fue el error que cometió Javiera en el desarrollo? Explica.

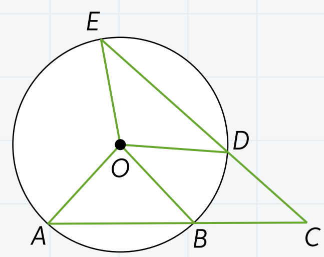
b. Corrige el desarrollo y calcula la medida la medida de $\sphericalangle AEC$.

¿Qué harías para evitar este tipo de errores en la resolución de problemas? Selecciona una estrategia y convérsala con un compañero.

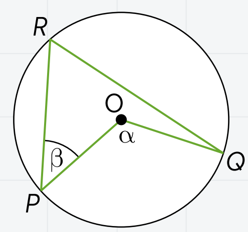
7. En parejas, resuelvan los siguientes problemas utilizando dos estrategias diferentes. Luego, respondan.

Problema 1: Si $\sphericalangle EOA$ mide 120° y $\sphericalangle DCB$ mide 40°, ¿cuánto mide $\sphericalangle BOD$?

Problema 2: En la circunferencia de centro O, el ángulo del centro α mide 96° y el ángulo inscrito β mide 26°. ¿Cuál es la medida de $\sphericalangle RQO$?



Problema 1



Problema 2

a. ¿En qué consistió cada una de las estrategias que utilizaron?

b. ¿Qué propiedades necesitaron para resolver los problemas? ¿Qué teoremas aplicaron?

c. Comparen las resoluciones de sus problemas con otras parejas: ¿existen diferencias?, ¿cuáles son sus diferencias?

28 y 29

Para concluir

a. Explica con tus palabras cómo calcular la medida de un ángulo interior y uno exterior de una circunferencia.

b. ¿Qué teoremas se utilizaron de temas pasados se utilizaron para demostrar los teoremas de este tema? Investiga otras estrategias para demostrarlos.

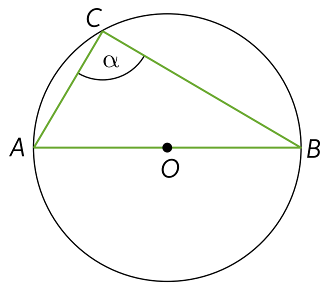
c. ¿Por qué crees que es importante que puedas aplicar más de una estrategia al resolver problemas? Argumenta tu respuesta.

Antes de continuar

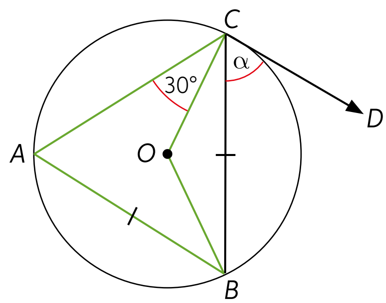
Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Calcula la medida de α en cada circunferencia de centro O. Luego, en parejas, comparen el procedimiento que utilizaron.

   a.



   b.



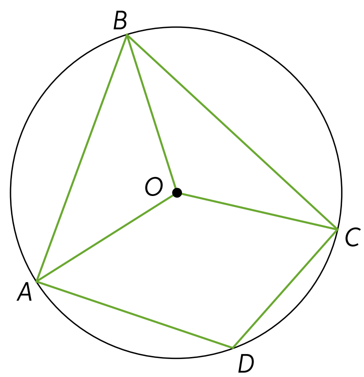
2. Analiza la siguiente circunferencia de centro O. Luego, indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

   a. Si la medida angular de $\overset{\frown}{AC}$ es 120° y la de $\overset{\frown}{CB}$ es 110°, entonces la medida angular de $\overset{\frown}{BA}$ es 110°.

   b. Si la medida de $\sphericalangle ABO$ es 40° y BO es bisectriz de $\sphericalangle ABC$, entonces $\sphericalangle COB$ mide 100°.

   c. El arco que subtiende el ángulo del centro AOC corresponde a la medida angular de $\overset{\frown}{AC}$.

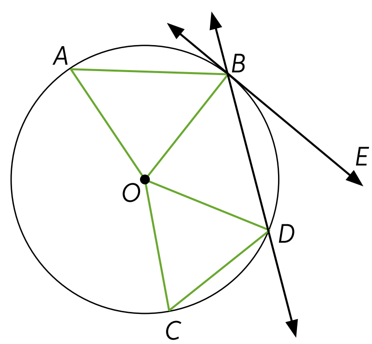
   d. El arco que subtiende el ángulo AOC es el mismo que subtiende el ángulo ABC.



3. Resuelve.

   Felipe realizó en su cuaderno la construcción que se muestra al costado.

   Si los triángulos ABO y OCD son equiláteros y la medida angular de $\overset{\frown}{AC}$ es 150°, ¿cuál es la medida de $\sphericalangle DBE$?



30

Reflexiono

- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas?, ¿cuáles otras podrías haber utilizado? Comenta con tu curso.
- De acuerdo con el desempeño obtenido en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades? Recorre desde la página 59 a la 66 para refozar aquellos contenidos que lo requieran.

Lección 6

Resolución de problemas con segmentos en la circunferencia

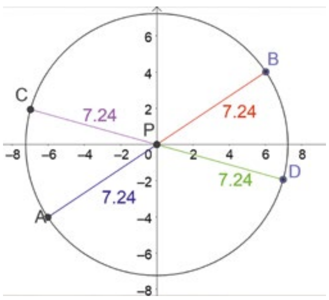
Cuerdas en la circunferencia

Objetivo: Resolver problemas aplicando las relaciones que se forman al cortarse dos cuerdas en una circunferencia.

¿Qué significa que dos magnitudes sean directamente proporcionales?

¿En qué situaciones cotidianas se utiliza la proporcionalidad directa?

1. En parejas, realicen la siguiente actividad utilizando GeoGebra.



Paso 1: Ingresen el código **T20M3MP068A** en el sitio web www.enlacesmineduc.cl y ubiquen el punto *P* en el origen del plano cartesiano. Luego, calculen los siguientes productos:

- $PA \cdot PC$
- $PB \cdot PD$
- $PA \cdot PD$
- $PC \cdot PB$
- $PA \cdot PB$
- $PC \cdot PD$

Paso 2: Muevan el punto *P* y calculen $PA \cdot PB$ y $PC \cdot PD$ para 3 diferentes posiciones. Construyan una tabla con todos los valores, incluyendo los de *PA*, *PB*, *PC* y *PD*. Guíense por el siguiente modelo:

PA	PB	PC	PD	$PA \cdot PB$	$PD \cdot PC$

Paso 3: Tracen los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. ¿Qué relación existe entre los triángulos *APC* y *DPB*? Argumenten su respuesta e intercámbienla con otras parejas.

Se puede establecer semejanza de triángulos bajo los criterios AA, LAL y LLL.

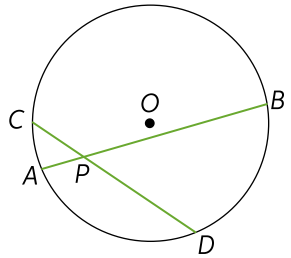
Paso 4: Escriban en su cuaderno la proporción entre los lados homólogos de ambos triángulos.

Paso 5: Utilicen el teorema fundamental de las proporciones para escribir una operación que relacione las medidas de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ y $\overline{DP}$. ¿Se cumple esta operación con las encontradas en el paso 2?

Teorema fundamental de las proporciones:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Así como en los ángulos, también existen relaciones entre las medidas de los segmentos que determinan dos cuerdas que se intersecan entre sí. En este caso, al intersecarse las cuerdas determinan triángulos semejantes, por lo tanto, sus segmentos correspondientes son proporcionales. Esto se conoce como **teorema de las cuerdas**.

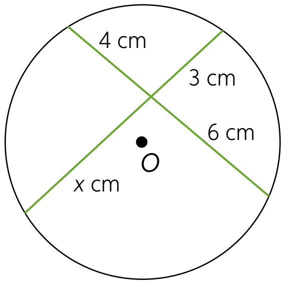
Teorema de las cuerdas: si dos cuerdas se intersecan en un punto interior de una circunferencia, los productos de los segmentos determinados en ellas son iguales.



$PA \cdot PB = PD \cdot PC$

Demuestra matemáticamente el teorema anterior. ¿Qué conocimientos de años anteriores utilizaste en tu demostración? Explica como los utilizaste.

2. Calcula el valor x de cada caso. Guíate por el ejemplo.

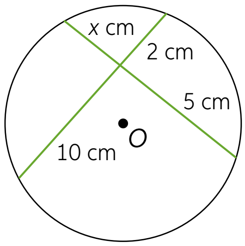


$3x = 4 \cdot 6$

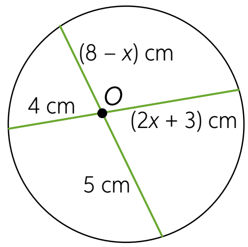
$3x = 24$

$x = 8$

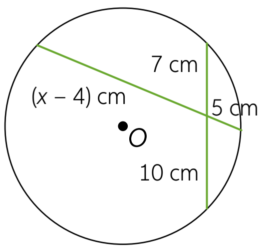
a.



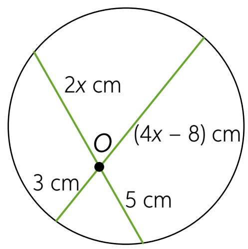
c.



b.



d.



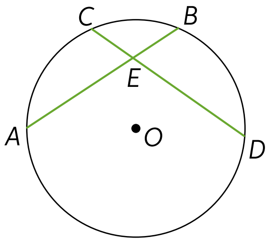
3. Analiza lo que dice cada estudiante y realiza las actividades.

a. Representa con un dibujo lo que dice cada estudiante.
b. A partir de lo dicho por Karen, calcula el doble de la longitud de $\overline{MA}$.
c. A partir de lo dicho por Danilo, calcula la tercera parte de la longitud de $\overline{ED}$.

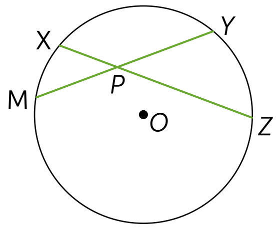
¿Podrías haber realizado la actividad anterior sin la representación gráfica? ¿Qué ventajas tiene la representación en este tipo de situaciones? Discútelo con tus compañeros.

4. Resuelve los problemas. Considera O el centro de cada circunferencia.

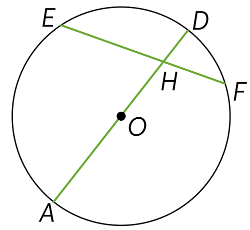
a. Si $AE = 8$ cm, $EB = 10$ cm y $ED = 16$ cm, ¿cuál es la longitud de $\overline{CE}$?



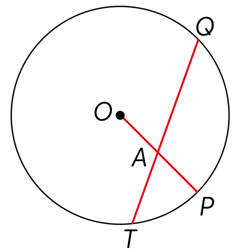
b. Si $MY = 20$ cm, $MP : PY = 3 : 2$ y $XP = 4$ cm, ¿cuál es la longitud de $\overline{PZ}$?



c. Si $AD = 18$ cm, $HD = 2$ cm y $EH = 2HF$, ¿cuáles es el doble de la longitud de $\overline{EF}$?

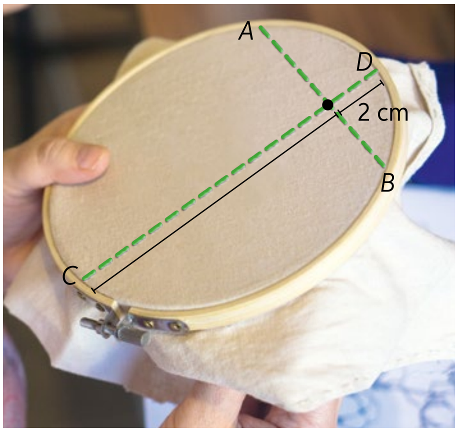


d. Si $OA = 3$ cm, $AP = 2$ cm y $QA = 12$ cm, ¿cuál es el 75 % de la longitud de $\overline{TA}$?



5. Analiza la situación. Luego, responde.

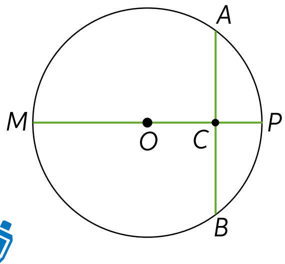
En un taller de artes, Denis borda con un bastidor circular. Sobre su bordado colocó 4 alfileres (representados por A, B, C y D), trazó con un lápiz grafito dos rectas y, en el punto donde se intersecan (P), bordará una hoja. La distancia entre A y P es el doble que la distancia entre B y P.



a. Escribe la expresión matemática que permite calcular la distancia entre el punto de intersección P y el punto B.

b. ¿Qué distancia hay entre los puntos A y B?

6. En la circunferencia de centro O que se muestra, $\overline{MP}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, $AB = 10$ m, $CP = 2$ m y $\overline{MP}$ es diámetro.



a. Inventa un problema relacionado con una situación cotidiana que se resuelva utilizando el teorema de las cuerdas.

b. Resuelve el problema: ¿qué estrategia utilizaste?, ¿qué método utilizarías para comprobar tu respuesta? Explica.

c. Intercambia tu problema con un compañero y pídele que lo resuelva.

31 y 32

Para concluir

a. Explícale a un compañero en qué consiste el teorema de las cuerdas. Apoya tu explicación con un ejemplo distinto a las actividades presentes en este tema.

b. ¿Qué otras estrategias podrías haber utilizado al resolver los problemas presentes en este tema? Explica y comparte tu estrategia con tu curso.

Secantes y tangentes en la circunferencia

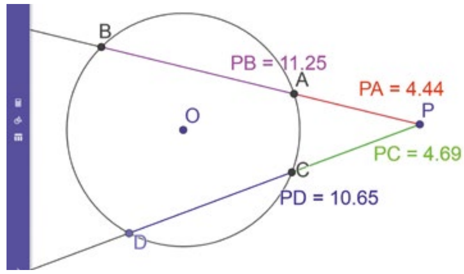
Objetivo: Resolver problemas aplicando las relaciones entre secantes y tangentes en una circunferencia.

¿Qué tipos de rectas se pueden trazar en una circunferencia?

¿Qué recuerdas de rectas secantes y tangentes?

1. En parejas, realicen la siguiente actividad utilizando GeoGebra.

Paso 1: Ingresen el código **T20M3MP071A** en el sitio web www.enlacesmineduc.cl y, de acuerdo con la aplicación, calculen los siguientes productos.



- $PA \cdot PC$
- $PB \cdot PD$
- $PA \cdot PD$
- $PC \cdot PB$
- $PA \cdot PB$
- $PC \cdot PD$

Paso 2: Muevan el punto P, asegurándose de que este quede siempre fuera de la circunferencia y calculen $PA \cdot PB$ y $PC \cdot PD$ para 3 diferentes posiciones. Construyan una tabla con todos los valores, incluidos los de PA, PB, PC y PD.

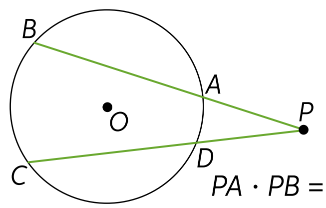
Paso 3: Tracen los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, de tal modo que se generen los triángulos PCB y PAD. ¿Qué relación existe entre los triángulos formados? Argumenten su respuesta. Luego, intercámbienla con otras parejas.

Paso 4: Escriban en su cuaderno la proporción entre los lados homólogos de ambos triángulos. Utilicen los criterios de semejanza de triángulos.

Paso 5: Utilicen el teorema fundamental de la proporciones para escribir una operación que relacione las medidas de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$. ¿Se cumple esta operación con las encontradas en el paso 2? Comenten sus resultados con otras parejas.

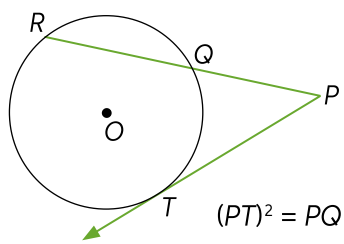
En una circunferencia de centro O, se cumplen los siguientes teoremas:

Teorema de las secantes:



$PA \cdot PB = PD \cdot PC$

Teorema de la secante y la tangente:



$(PT)^2 = PQ \cdot PR$

Si desde un punto exterior a una circunferencia se traza una secante y una tangente, ¿mide más la tangente, la secante o depende de cada caso? Argumenta tu respuesta y discútela con tus compañeros.

2. Realiza las siguientes actividades de acuerdo con el teorema de la secante y la tangente.
   a. Copia la figura del teorema de la secante y la tangente de la página anterior en tu cuaderno y traza los segmentos $\overline{RT}$ y $\overline{QT}$. ¿Qué ángulos tienen la misma medida?
   b. Con respecto a la figura anterior, ¿qué triángulos semejantes se pueden determinar? Argumenta tu respuesta.

Actividad de aplicación La rueda

¿Qué haremos? Modelar situaciones aplicando secantes y tangentes en una rueda.

Investiguemos

Paso 1: En grupos de 3 o 4 integrantes, investiguen sobre la historia de la rueda, sus usos y los objetos en que se encuentran.

Paso 2: Busquen diversas fotografías que muestren usos de la rueda.

Ejecutemos

Paso 3: Escojan las fotografías en la que se puedan trazar rectas secantes y tangentes e inventen un problema que se resuelva aplicando el teorema de las secantes o el teorema de la secante y la tangente. No olviden dar un contexto a su problema.

Paso 4: Escriban el problema en una hoja y peguen la fotografía. Luego, intercámbienlo con otros grupos y resuelvan el problema que les tocó.

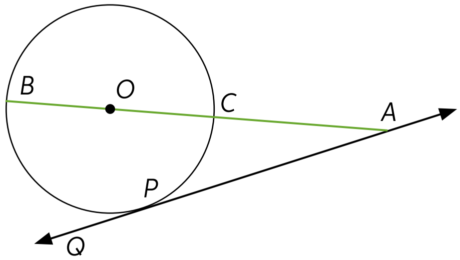
Concluyamos

Paso 5: Finalizada la actividad, respondan.
- ¿De qué se trata el problema que resolvieron?
- ¿Qué teorema aplicaron para resolverlo?
- ¿Qué otra estrategia podrían haber utilizado?

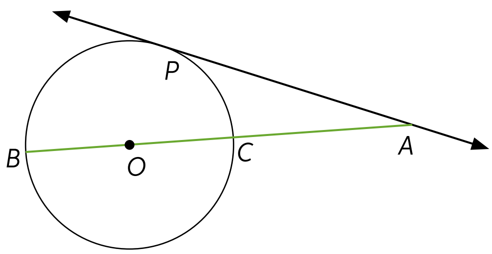
3. Representa cada situación con un dibujo. Luego, calcula lo pedido.
   a. Desde un punto A exterior a una circunferencia, se traza la recta tangente $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta secante $\overleftrightarrow{AD}$, de tal manera que la intersequen en dos puntos C y D. Si AC = 6 cm y DC = 18 cm, calcula la mitad de la medida del segmento $\overline{AB}$.
   b. En una circunferencia, la cuerda $\overline{MP}$ se prolonga más allá de P hasta intersecar una recta tangente $\overleftrightarrow{TA}$ en el punto A, donde T es el punto de tangencia. Si PA = 2 cm y TA = 4 cm, calcula el doble de la longitud de $\overline{MP}$.

4. Resuelve los problemas. Justifica con tus cálculos.

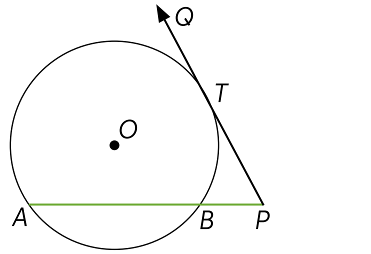
a. $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia en P, $PA = 15$ cm y $AB = 2{,}5PA$. ¿Cuál es la medida del diámetro de la circunferencia?



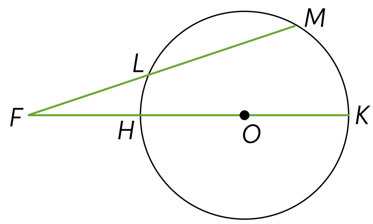
b. $\overleftrightarrow{PA}$ es tangente a la circunferencia en P, $PA = 16$ cm $= 3CA$ y $BO = OC = x$ cm. ¿Cuál es la medida de $BO + OC$?



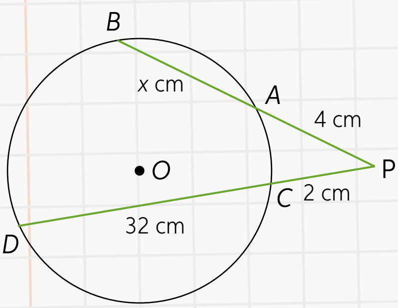
c. $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia en T, $AB = 30$ cm y $BP = 2$ cm. ¿Cuál es la medida de $\overline{PT}$?



d. $\overline{HK}$ es diámetro, $FH = 5$ cm, $HK = 8$ cm y $FL = 6$ cm. ¿Cuál es el cuádruplo de la longitud de $\overline{LM}$?



5. Francisca calculó la medida del segmento $\overline{AB}$ que se muestra en la figura.



$4 \cdot x = 2 \cdot 32$

$4x = 64$

$x = 16$

Por lo tanto, el segmento $\overline{AB}$ mide 16 cm.

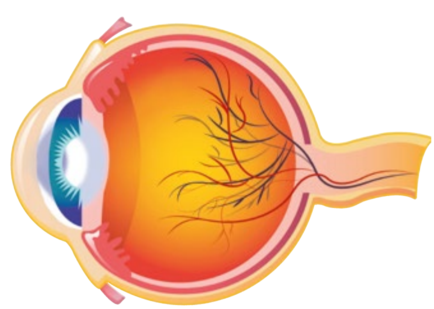
a. ¿Cuál es el error que cometió Francisca? Explica.

b. Corrige el error y encuentra la medida correcta del segmento AB.

Óptica

6. Analiza la información. Luego, realiza las actividades.

Las imágenes que vemos se deben a cómo entra la luz a nuestros ojos, los cuales tienen forma de esfera. En ellos se producen diversos efectos debido a la curvatura del cristalino.



a. Investiga respecto del funcionamiento del ojo y la forma en que captamos las imágenes.

b. Investiga respecto de algunas enfermedades a la visión y qué lentes se utilizan en cada caso. ¿Qué relación tienen con la formación de ángulos dentro del ojo? Explica.

Actividad de aplicación Eclipses

¿Qué haremos? Construir trípticos para explicar la generación de eclipses vistos desde la Tierra.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 personas. Cada grupo deberá buscar información sobre uno de los eclipses que se muestran en las fotografías.

Paso 2: Definan los materiales que necesitan para su tríptico y el diseño que este tendrá. Además, designen las tareas de cada integrante del grupo.

Investiguemos

Paso 3: Investiguen en Internet y en sitios confiables de información sobre el tipo de eclipse escogido y respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el orden con que deben estar el Sol, la Tierra y la Luna para que se produzca el eclipse?
- ¿Qué tiene que pasar para que ocurra el eclipse?
- ¿Por qué no ocurren eclipses todos los meses?
- ¿Qué relación tiene el eclipse con las fases de la Luna?

Presentemos

Paso 4: Generen el tríptico con la información recolectada. Recuerden ser novedosos y claros en la entrega de la información.

Analicemos

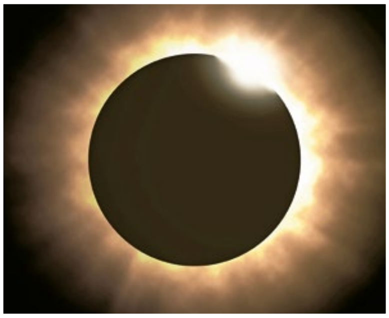
Paso 5: Utilizando lo aprendido en la lección, respondan:

- ¿Qué tipos de segmentos y de rectas ocuparon?
- ¿Cuáles son las distancias reales a las que se encuentran los objetos?
- ¿Cuál es la proporción usada?

Discutamos

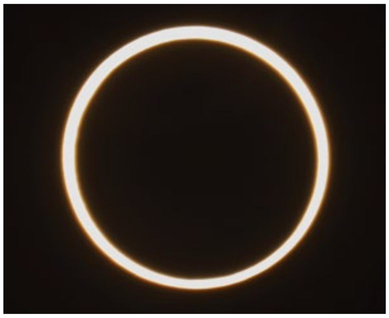
Finalizada la actividad, discutan con los demás grupos:

- ¿En qué los ayudó esta actividad para el estudio de secantes y tangentes en la circunferencia?
- ¿Qué les llamó la atención de la actividad?, ¿por qué?



Eclipse de Sol completo.

Eclipse de Luna.



Eclipse de Sol anular.

33 y 34

Para concluir

a. Explica con tus palabras en qué consiste el teorema de las secantes y de la secante y tangente.

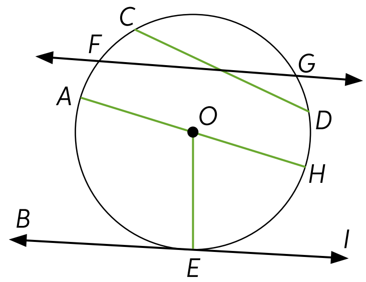
b. De las actividades realizadas en este tema, ¿en cuál tuviste mayor dificultad?, ¿qué hiciste al respecto?

c. ¿En qué otras situaciones se pueden representar rectas tangentes a una circunferencia? Da ejemplos.

Antes de continuar

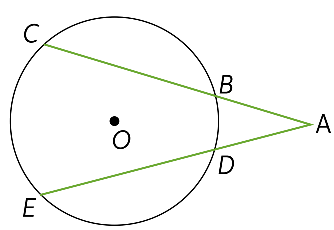
Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Identifica los elementos indicados de acuerdo con la circunferencia de centro O.
   a. $\overline{AH}$
   b. $\overline{OE}$
   c. $\overline{CD}$
   d. $\overleftrightarrow{FG}$
   e. $\overleftrightarrow{BE}$

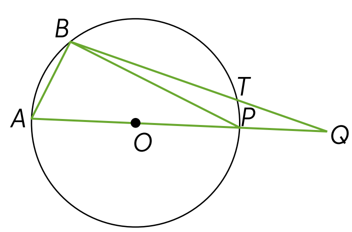


2. Representa con un dibujo las siguientes situaciones y calcula lo pedido.
   a. Dos cuerdas $\overline{NT}$ y $\overline{PQ}$ se cortan en el punto A. Si PA = 23 cm, QA = 8 cm y AT = 15 cm, calcula el doble de la longitud de $\overline{NA}$.
   b. Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en el punto E de tal manera que $AE : EB = 2 : 3$. Si AB = 9 cm y CE = 3 cm, calcula la tercera parte de la longitud de $\overline{ED}$.
   c. En una circunferencia la cuerda $\overline{MP}$ se prolonga más allá de P hasta intersecarse con una recta tangente TA en el punto A, donde T es el punto de tangencia. Si PA = 2 cm, y TA = 4 cm, ¿cuál es el doble de la longitud de $\overline{MP}$?
   d. El radio $\overline{OM}$ de una circunferencia de centro O se interseca con la cuerda $\overline{PQ}$ en el punto B, de modo que $MB : BO = 2 : 3$. Si PB = 20 cm y BQ = 5 cm,calcula la longitud de $\overline{MB}$.
   e. Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan dos rectas secantes, de tal manera que una de ellas se interseque con la circunferencia en los puntos B y C; y la otra, en los puntos D y E, donde $AB < AC$ y AD < AE. Si AB = 4 cm, CB = 11 cm y AE = 12 cm, calcula la medida de $\overline{DE}$.

3. Resuelve. Luego, compara la estrategia que utilizaste con un compañero.
   a. Joaquín realizó la siguiente figura, donde O es el centro de la circunferencia, con $\overline{AC}$ y $\overline{AE}$ secantes. Se sabe que AB = 4 cm, BC = 9 cm y AD = 6 cm. ¿Cuál es el triple de la longitud de $\overline{DE}$?



   b. Marcela realizó la siguiente figura, donde O es el centro de la circunferencia, con $\overline{AP}$ diámetro, AB = 3 cm, BP = 5 cm, PQ = 3 cm y TQ = 2 cm. ¿Cuál es la longitud de $\overline{BT}$?



Reflexiono

- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas anteriores?, ¿en qué se asemejan a las utilizadas en la Lección anterior? Comenta junto a tu curso.
- ¿Qué conceptos de la lección entendiste bien? ¿Cómo lo podrías evidenciar?

35

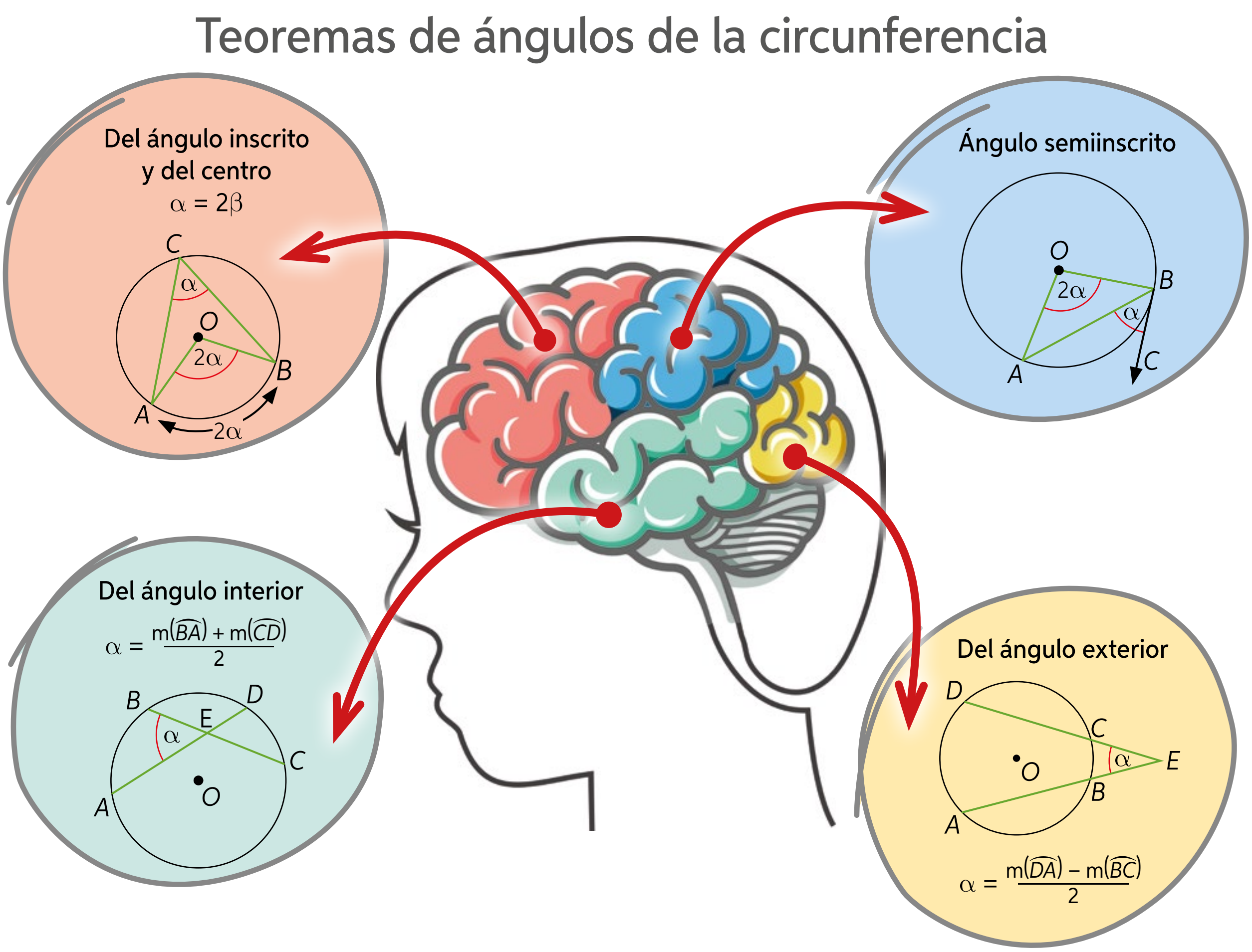
Síntesis

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es una lluvia de ideas?

Una lluvia de ideas corresponde a una fase creativa del pensamiento, en la que se intenta imaginar el máximo de posibilidades con respecto a un concepto. Simplemente, se debe dejar fluir la imaginación y para capturar las ideas más relevantes y significativas relacionadas de lo que se quiere sintetizar.

A continuación, se presenta un ejemplo de lluvia de ideas con algunos de los conceptos estudiados a lo largo de la Unidad.



Ahora, hazlo tú

1. Construye una lluvia de ideas con los teoremas vistos en la Lección 6.
2. Escribe con tus propias palabras la explicación que te permita aplicar cada uno de los teoremas antes mencionados. Comparte tus ideas de la pregunta 2 con tu curso.
3. ¿Cuáles son las ideas en común?, ¿qué las diferencia?
4. ¿En qué te ayuda este tipo de organizador gráfico para el estudio de esta Unidad? Explica.

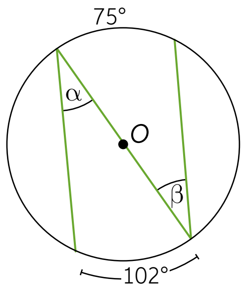
Repaso

Realiza las siguientes actividades.

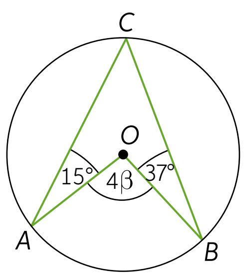
Lección 5: Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia

1. Determina la medida de los ángulos α y β según sea el caso.

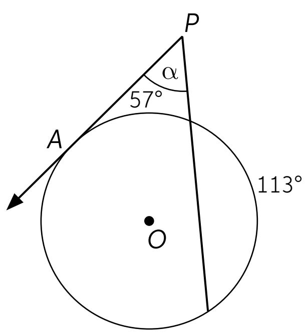
a.



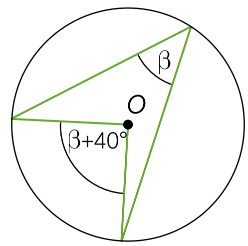
b.



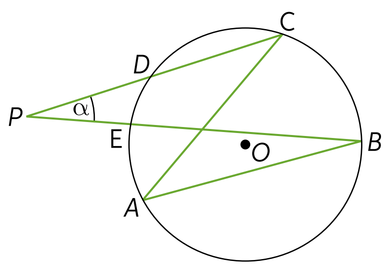
c.



d.

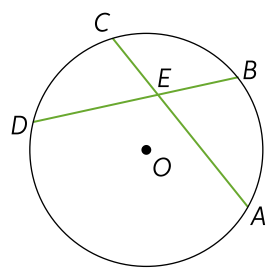


e.



Donde $m(\sphericalangle BAC) = 36°$; $m(\overset{\frown}{DE}) = 25°$

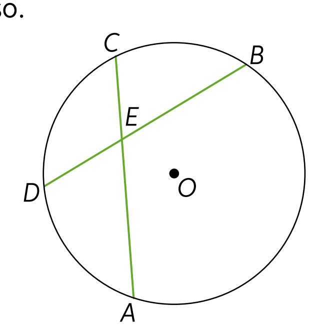
f.

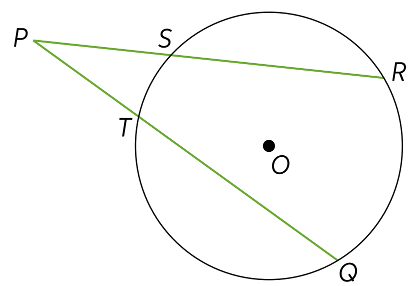


Donde $\alpha = m(\sphericalangle AEB)$; $m(\overset{\frown}{DA}) = 185°$; $m(\overset{\frown}{BC}) = 73°$

Lección 6: Resolución de problemas con segmentos en la circunferencia

2. Resuelve considerando las siguientes circunferencias y las medidas dadas en cada caso.



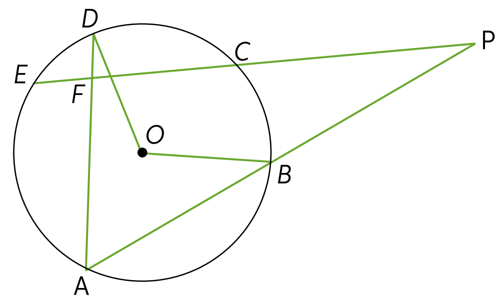


a. Si $BE = (2x + 1)$ cm, $AC = (3x + 5)$ cm, $DE = 3$ cm y $CE = 9$ cm, ¿cuánto mide $\overline{AC}$?
b. Si $PS = 10$ cm, $RS = 5$ cm y $PQ = 25$ cm, ¿cuánto mide $\overline{QT}$?
c. Si $PQ = (8x + 8)$ cm, $PR = 6x$ cm $PT = 5$ cm y $PS = 8$ cm, ¿cuánto mide $\overline{PQ}$?

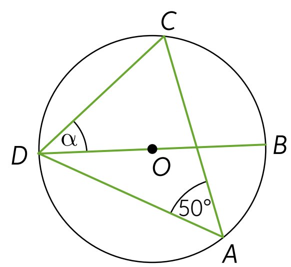
¿Qué aprendí?

Realiza las siguientes actividades para evaluar lo aprendido a lo largo de esta Unidad. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

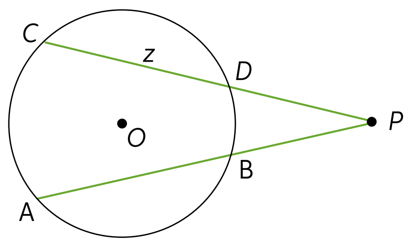
1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas de acuerdo con la circunferencia de centro O.
   a. $m(\sphericalangle BAD) \simeq m(\sphericalangle BOD)$
   b. $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{EP} \cdot \overline{CP}$
   c. $\overline{AD} \cdot \overline{DF} = \overline{CE} \cdot \overline{EF}$
   d. $m(\sphericalangle DFE) = \dfrac{m(\widehat{ED}) + m(\widehat{AC})}{2}$
   e. $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CE})$



2. Calcula lo pedido en las siguientes figuras:
   a. ¿Cuál es la medida de α si se sabe que $\overline{BD}$ es su diámetro?



   b. Si $PD = 2$ cm, $BP = 6$ cm y $AB = 8$ cm, ¿cuánto mide z?



3. Carolina diseña un logo circular para una empresa. Para esto, construyó el siguiente modelo:

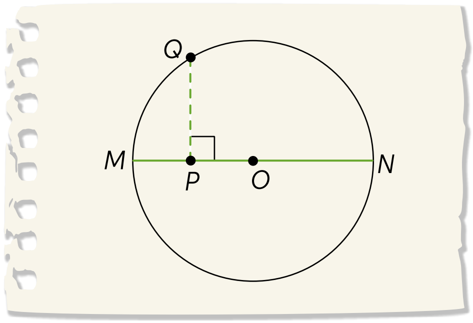
   a. ¿Cuál es el área de la superficie de color verde?
   b. Describe el procedimiento que te permite calcular el resultado anterior.

4. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.

Jorge dibujó en su cuaderno una circunferencia de centro O y de radio $\overline{ON}$, que mide 6 cm. En ella, se cumple que $MP = OP$.

a. ¿Cuáles son las medida de $\overline{MP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{QN}$?

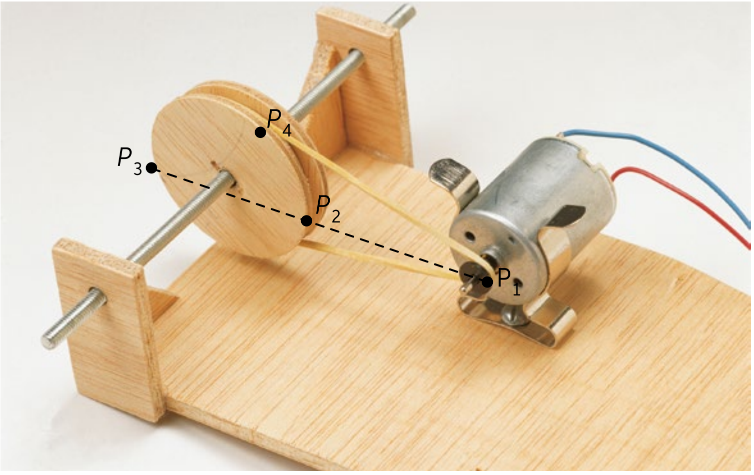
b. ¿Qué procedimiento utilizaste para calcular lo pedido? Explica.



Mecánica

5. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.

Las poleas son dispositivos que permiten trasmitir fuerzas. Estas son utilizadas en diversos mecanismos de máquinas y artefactos, como los motores. En la siguiente imagen se muestra un motor eléctrico a escala realizado por un grupo de estudiantes de tercero medio, compuesto por dos ruedas circulares iguales y en cuyo centro pasa un fierro.



La cuerda amarilla pasa tangente a la rueda en el punto P_4. Además, la línea segmentada que une P_1 y P_3 pasa por el centro de la rueda y la distancia entre P_1 y P_3 es 9,8 cm y la distancia entre P_1 y P_2 es 5 cm.

a. Calcula el perímetro de una rueda. Considera $\pi \approx 3,14$.

b. ¿Cuál es el área de la superficie de una rueda? Considera $\pi \approx 3,14$.

c. ¿Cuál es la distancia entre P_1 y P_4? ¿Cómo lo calculaste? Explica.

Reflexiono

- ¿Qué nuevas estrategias aprendiste para resolver problemas geométricos durante la Unidad?, ¿cómo las evidenciaste durante el desarrollo de la evaluación anterior?
- ¿Qué contenidos de la Unidad requirieron de más atención y esfuerzo de tu parte?, ¿por qué crees que sucedió?

P ¿Cómo te ayudó la resolución de problemas en la realización del proyecto? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

Unidad 4

UN ÚLTIMO PELDAÑO ALGEBRAICO: LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Números

Lee la siguiente información y observa la imagen. Luego, responde las preguntas y comenta tus respuestas con tu curso.

Hay referencias a los números complejos, como las raíces cuadradas de los números negativos, desde el siglo I a.C., cuando los matemáticos griegos se encontraron con un resultado que consideraron imposible para construir una pirámide. No fue sino hasta el siglo XVI que el filósofo y matemático italiano Gerolamo Cardano y sus contemporáneos comenzaron a experimentar con ecuaciones cuya solución incluía raíces cuadradas de números negativos. De este modo, se intentó dar solución a ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$. Surgió, así, la necesidad de concebir un nuevo sistema que incorporara este tipo de números, hoy llamados números complejos, que tienen gran utilidad sobre todo en la física y en la ingeniería, por ejemplo, en los circuitos eléctricos, los aparatos electrónicos y la aerodinámica, entre otros.

1. Con una calculadora científica, calcula el valor de $\sqrt{-1}$. ¿Qué aparece en la pantalla? ¿Qué te imaginas al mirar la información que te entrega?
2. ¿Qué relación podrías establecer entre la información anterior y el título de la Unidad? Explica tu respuesta.
3. La imagen de fondo es un ejemplo de las aplicaciones de los números complejos. Discutan como curso la relevancia que tiene el estudio de este tipo de números en la vida cotidiana.

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

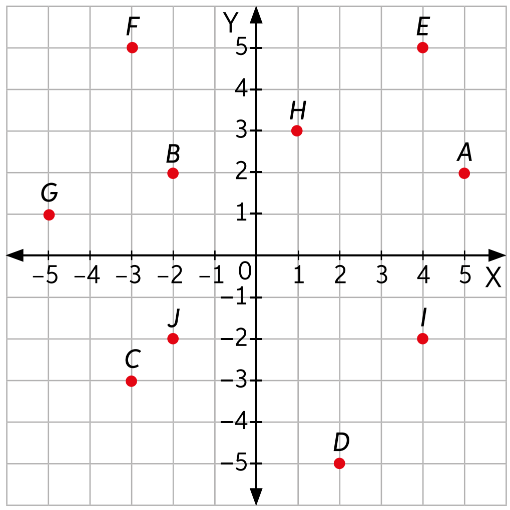
- El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$).
- La resolución de problemas usando la operatoria de números complejos.

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Aplica las propiedades de las potencias y las raíces para calcular el valor de las siguientes expresiones:
   a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-9} \cdot 4^{-5}$
   b. $\sqrt{\frac{3^{14}}{2^{18}}} \cdot \sqrt{\frac{4^5}{27^{15}}}$
   c. $\frac{5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3}{25^2}$
   d. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5} \cdot 3^8 \cdot 3^4$
   e. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3} \cdot 5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot 5^5$
   f. $\left(\frac{1}{2}\right)^{0} \cdot 2^5 \cdot 4^3 \cdot 8^2$

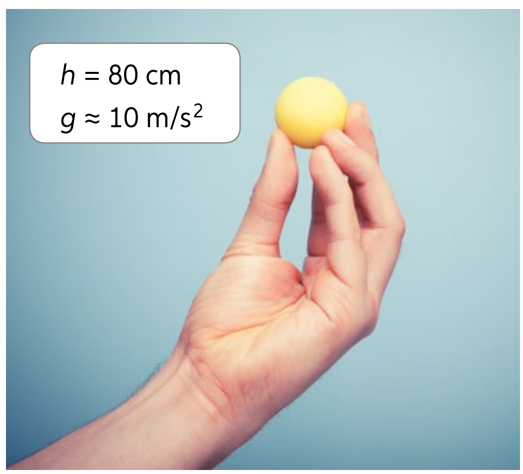
2. De acuerdo con el siguiente plano cartesiano:
   a. ¿Cuáles son las coordenadas de cada punto?
   b. Si al unir el punto *H* con el origen del plano cartesiano se forma un vector, ¿cuál es su módulo?
   c. ¿Qué puntos se encuentran en el segundo cuadrante?, ¿y en el tercero?
   d. ¿Cuál es la distancia entre los puntos *F* e *I*? ¿Qué estrategia utilizaste para calcularla? Explícala.
   e. Escoge 3 puntos tales que, al unirlos, forme un triángulo. ¿Cómo calcularías su perímetro? Describe tu procedimiento y aplícalo para calcularlo.



3. Diego deja caer una pelota de ping pong, como se muestra en la imagen. Sabe que, al caer un objeto desde una altura *h*, la rapidez *v* con que llega al suelo, despreciando el roce con el aire, está dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{2gh}$$

   Donde *g* corresponde a la aceleración debida a la gravedad.
   a. ¿Cuál es la rapidez de la pelota cuando llega al suelo por primera vez?
   b. El valor de la rapidez, ¿a qué conjunto numérico corresponde?



Reflexiono

- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de esos contenidos crees que debes repasar antes de continuar? Explica.
- ¿Qué propiedades de raíces utilizaste durante la evaluación? Enuméralas y explícalas.

Lección
7 El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

Conjunto de los números complejos

Objetivo: Explicar la necesidad de expandir el conjunto de los números reales.

¿Qué conjuntos numéricos conoces? Nómbralos y da ejemplos de números que pertenezcan a ellos.

¿Qué métodos utilizas para comprobar las soluciones al resolver una ecuación?

1. Jaime resuelve las siguientes ecuaciones y anota el conjunto al cual pertenece su solución.

Ecuación	Conjunto
$2x + 3 = 8$	$\mathbb{Z}$
$7x + 8 = 4x - 6$	$\mathbb{Q}$
$x^2 + 4x - 4 = 0$	$\mathbb{R}$
$7x - 4 = 2x + 4$	$\mathbb{N}$

   a. Verifica que la solución de cada ecuación pertenece al conjunto correspondiente. En caso de que este último no contenga la solución, indica todos los conjuntos a los que pertenece.

   b. De acuerdo con la ecuación $x^2 - 7 = 0$, ¿por qué es incorrecto afirmar que sus soluciones pertenecen al conjunto de los números racionales?

Se dice que una ecuación no tiene solución en un conjunto numérico cuando su solución no pertenece a este. Por ejemplo, la ecuación $x + 1 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que su solución, $x = -1$, no pertenece a $\mathbb{N}$, pero sí tiene solución en los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, y $\mathbb{R}$, ya que -1 pertenece a estos conjuntos. De esta manera, se hace necesario expandir un conjunto numérico con el fin de evaluar la solución de determinadas ecuaciones.

2. Resuelve las ecuaciones hasta identificar el factor $\sqrt{-1}$. Guíate por los ejemplos.

$x^2 + x + 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 3x + 3 = 0$ $\qquad$ $2x^2 - 2x + 5 = 0$

Ejemplo 1: $x^2 + 60 = -4$

$$x^2 = -64 \quad /$$
$$x = \pm\sqrt{-64}$$
$$x = \pm\sqrt{64}\cdot\sqrt{-1}$$
$$x = \pm 8\sqrt{-1}$$

Ejemplo 2: $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

¿Qué relación hay entre el factor $\sqrt{-1}$ y que las ecuaciones no tengan solución en el conjunto de los números reales? Argumenta tu respuesta.

Existen ecuaciones que no tienen solución en el conjunto de los números reales. Es decir, no existe en este conjunto un número cuyo cuadrado sea un número negativo. Surge así un tipo de número, llamado **número imaginario**, cuya unidad imaginaria se denota por la letra i y se define como: $i = \sqrt{-1}$.

Si se multiplica la unidad imaginaria por un número real b distinto de cero, resulta un número imaginario, que se simboliza por bi. Además, si se multiplica la unidad imaginaria por sí misma, se obtiene la potencia i^2, cuyo valor es -1.

Las potencias de los números imaginarios, cumplen con las siguientes propiedades:

$i^0 = 1$ $\qquad$ $i^m \cdot i^n = i^{n+m}$ $\qquad$ $(i^n)^m = i^{n\cdot m}$ $\qquad$ con $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$.

3. En parejas, analicen las siguientes potencias. Luego, respondan.

$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$	$i^9 = i^4 \cdot i^5 = 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$	$i^{10} = i^4 \cdot i^6 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^3 = i \cdot i^2 = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$	$i^{11} = i^4 \cdot i^7 = 1 \cdot (-i) = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$	$i^{12} = i^4 \cdot i^8 = 1 \cdot 1 = 1$

a. ¿Qué regularidad observan en sus potencias? Expliquen.
b. ¿Qué valor tendría la potencia i^{16}?, ¿y la potencia i^{25}?

Las potencias básicas o canónicas de la unidad imaginaria *i* corresponden a las primeras cuatro potencias de *i*. A partir de la quinta, las potencias se repiten en periodos de 4.

Potencia canónica de *i*	Potencia equivalente
$i^1 = \mathrm{i}$	i^{4n+1}
$i^2 = -1$	i^{4n+2}
$i^3 = i \cdot i^2 = -i$	i^{4n+3}
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$	i^{4n+4}

La unión de todos los números imaginarios con los números reales forma el conjunto de los **números complejos**. Algebraicamente, **un número complejo *z*** es toda expresión que se pueda escribir de la forma ***z* = *a* + *bi***, donde *a* y *b* son números reales e *i* es la unidad imaginaria.

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ está formado por:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \ / \ a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

Se llama **parte real de *z***, denotada como ***Re(z)***, al número *a*, y **parte imaginaria de *z***, denotada por *Im(z)*, al número *b*. Por ejemplo:

$$z = 2 + 3i; \ Re(z) = 2 \text{ e } Im(z) = 3$$

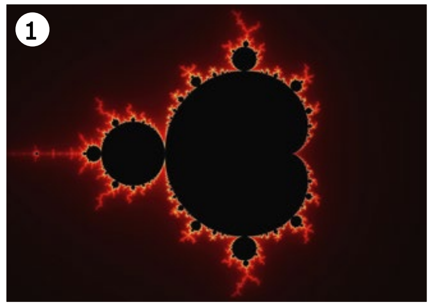
A la forma $z = a + bi$ se la llama **forma o representación binomial** de *z*. Dos números complejos son iguales si y solo si sus partes real e imaginaria son iguales.

Vuelve a la actividad 2. ¿Cuáles son las soluciones de las ecuaciones escritas de forma binomial?

4. Escribe un número complejo que cumpla la condición que menciona cada estudiante.

Actividad de aplicación
Las aplicaciones de los números complejos

¿Qué haremos? Elaborar un afiche con las aplicaciones de los números complejos.



1. Fractales.
2. Circuitos de corriente alterna.
3. Aerodinámica.

Planifiquemos

Paso 1: En grupos de 4 personas, escojan una de las aplicaciones de los números complejos que se muestran al costado.

Paso 2: Investiguen en Internet acerca de la aplicación escogida. Recuerden utilizar sitios webs que entreguen información confiable. Para realizar la investigación, guíense por las siguientes preguntas:

- ¿En qué consiste la aplicación que escogieron? ¿En qué situaciones se observan?
- ¿Cómo se relaciona la aplicación que escogieron con los números complejos? Expliquen.
- ¿Cuál es el impacto en la realidad de la aplicación?

Ejecutemos

Paso 3: Establezcan la manera en que elaborarán su afiche y los recursos que necesitarán (soporte digital, materiales concretos, etc.). Para el diseño de su afiche, consideren las siguientes secciones:

- Título que llame la atención.
- Explicación simple y clara de la aplicación.
- Fotografías de apoyo.
- Conexión de la aplicación con la matemática.

Paso 4: Organicen las tareas del grupo, de manera que cada integrante sea responsable de una sección del afiche.

Presentemos

Paso 5: Den a conocer su trabajo a su curso. Pueden compartirlo por sus redes sociales o realizando una exposición frente a sus compañeros. Luego, realicen una discusión a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la importancia de la matemática frente a diversos fenómenos presentes en la realidad?
- ¿Qué es lo más que les llamó la atención de la aplicación investigada?

36 y 37

Para concluir

a. Explica a un compañero qué aprendiste acerca del conjunto de los números complejos.

b. Escoge una de las actividades presentes entre las páginas 83 y 84. ¿Qué estrategia utilizarías para comprobar que tus respuestas están correctas? Explica.

c. ¿Qué actividad te pareció más interesante? ¿Por qué?

Representación de números complejos

Objetivo: Representar un número complejo por medio del plano de Argand, de forma binomial y como par ordenado.

¿Qué maneras de representar un número conoces? Da ejemplos.

¿Qué aspectos consideras al graficar en un plano cartesiano?

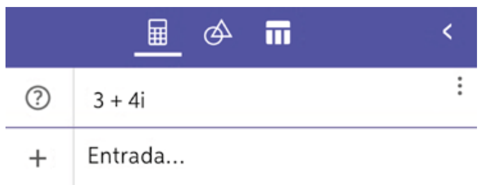
1. Observa los siguientes números complejos:

$z_1 = 4 + 5i$	$z_4 = 4 - 3i$	$z_7 = -1 - i$
$z_2 = 6 + 2i$	$z_5 = -3 + 3i$	$z_8 = 2{,}5 - 4i$
$z_3 = 1 + 7i$	$z_6 = -2 - 7i$	$z_9 = -8 - 4{,}5i$

a. Identifica la parte real y la parte imaginaria de cada número.

b. Represéntalos utilizando GeoGebra. Para esto, escríbelos en su forma binomial, como se muestra en el ejemplo.

Para el número $z = 3 = 4i$



c. ¿Con qué eje del plano se relaciona la parte real de cada número complejo?, ¿y la parte imaginaria?

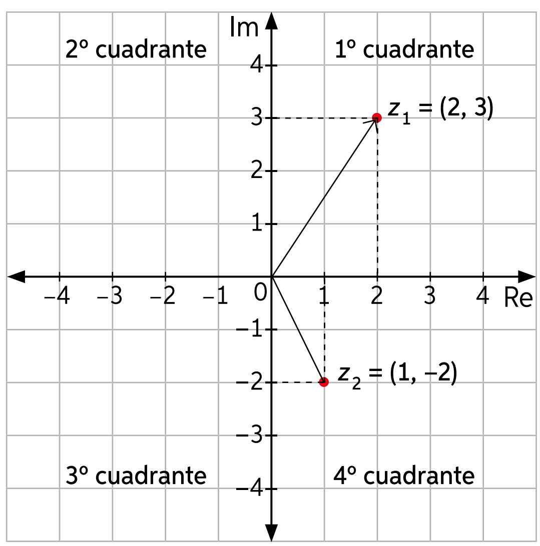
d. ¿Qué similitud existe entre la representación gráfica de un vector y la de un número complejo?

Un número complejo z se puede representar de las siguientes formas:

- En **forma binomial**, es decir: $z = a + bi$;
- Como **par ordenado**, es decir: $z = (a, b)$; con $a, b \in \mathbb{R}$.
- En un **plano de Argand**.

El plano de Argand es similar al cartesiano, pero su eje horizontal representa las partes reales y su eje vertical las partes imaginarias de los números complejos. También se definen cuatro cuadrantes, nombrados en sentido antihorario. Ejemplos:

La representación gráfica de los números $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 - 2i$



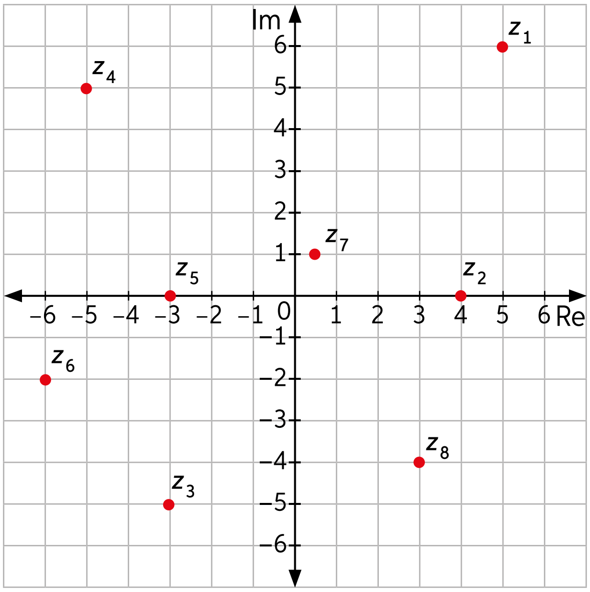
Del gráfico anterior se obtiene:

$z_1 = 2 + 3i = (2, 3)$

$z_2 = 1 - 2i = (1, -2)$

La representación de un número complejo como par ordenado es (0, 1). ¿Cuál es el número?

2. En el siguiente plano de Argand se representan los pares ordenados correspondientes a números complejos.



a. Identifica la parte real y la parte imaginaria de cada número complejo.
b. Escribe cada número complejo en su forma binomial y como par ordenado.

3. Escribe cada número complejo como par ordenado. Luego, represéntalos gráficamente utilizando GeoGebra.

a. $z_1 = -5 + 3i$
b. $z_2 = 1 - 6i$
c. $z_3 = 1{,}5 - 3i$
d. $z_4 = -5 - 5i$
e. $z_5 = 6$
f. $z_6 = -7i + 1$
g. $z_7 = -5i$
h. $z_8 = -6 - i$
i. $z_9 = -8i$

4. Analiza cada afirmación. Luego, indica si es verdadera o falsa, considerando que $z \in \mathbb{C}$. Justifica tu respuesta en cada caso.

a. El número complejo $z = 2 - 3i$ se representa en el segundo cuadrante.
b. Si $z = (a, b)$ se ubica en el cuarto cuadrante, entonces $a \cdot b > 0$.
c. Si $Re(z) > 0 > Im(z)$, entonces $z = (a, b)$ se ubica en el cuarto cuadrante.
d. Si $Re(z) = 0$, en el plano de Argand, z se ubica en el cuarto cuadrante.
e. La representación como par ordenado de $z = 1 - i$ es $(-1, 1)$.
f. Si $z = (a, b)$ y $Re(z) = 2Im(z) = 4$, entonces $z = (4, 8)$.
g. Si $z = (a, b)$ se ubica sobre el eje imaginario, entonces $Im(z) = 0$.

38 y 39

Para concluir

a. Explica a un compañero las formas de representar un número complejo. Nombra un ejemplo diferente a los tratados en este tema.
b. ¿Qué diferencias y similitudes existen entre el plano cartesiano y el plano de Argand? Explícalo a un compañero.
c. Escribe dos números complejos como par ordenado de tal manera que sus partes imaginarias estén en la razón 5 es a 2.

Módulo y conjugado de un número complejo

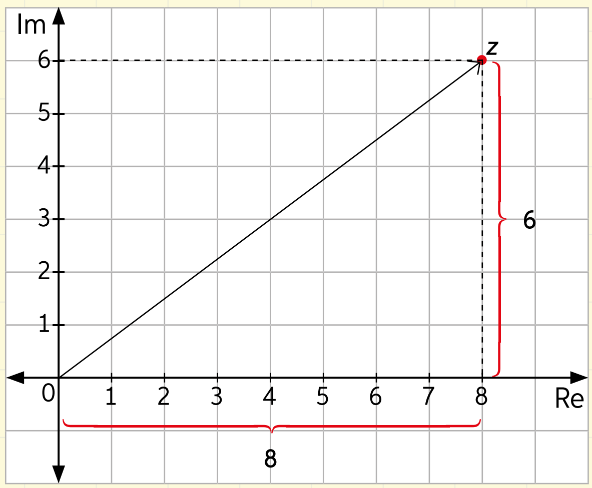
Objetivo: Calcular el módulo y el conjugado de un número complejo.

¿Qué entiendes por valor absoluto de una cantidad? Da ejemplos.

¿Qué procedimiento utilizas para calcular el módulo de un vector? Explícalo.

1. Marcela calculó correctamente el módulo del número complejo $z = 8 + 6i$. Observa su procedimiento y responde.

Paso 1:

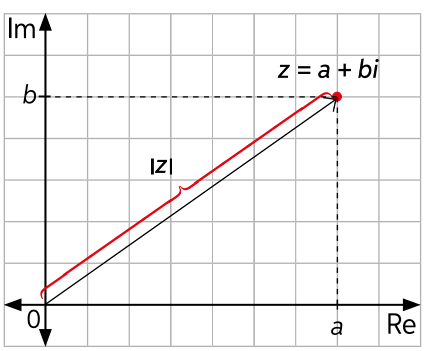


Paso 2: $|z|^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} \Rightarrow |z| = 10$

¿Qué pasos utilizó Marcela para calcular el módulo de z? Descríbelos.

- De lo aprendido en años anteriores, ¿qué utilizaste para responder la pregunta anterior?

El módulo de un número complejo $z = a + bi$ corresponde a la longitud de su vector asociado y se denota como $|z|$.



Ejemplo:

Sea $z = 1 - 2\sqrt{2}\,i$, su módulo es:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-2\sqrt{2}\,)^2}$$
$$|z| = \sqrt{1 + 4 \cdot 2}$$
$$|z| = \sqrt{1 + 8}$$
$$|z| = \sqrt{9}$$
$$|z| = 3$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)}$$

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 + 0i$
- $|Re(z)| \leq |z|$
- $|Im(z)| \leq |z|$

Observa que $|Re(z)|$ e $|Im(z)|$ representan el valor absoluto de números reales, en cambio $|z|$ representa el módulo de un número complejo.

2. Resuelve el siguiente problema.

Dados los siguientes números complejos: $z_1 = 3 + 7i$ y $z_2 = 3 - 7i$

a. ¿Cuál es la forma de par ordenado de cada número complejo? Escríbelos en tu cuaderno. Luego, grafícalos en el plano de Argand.

b. ¿Qué semejanzas y qué diferencias observas entre ambos números complejos? Explica.

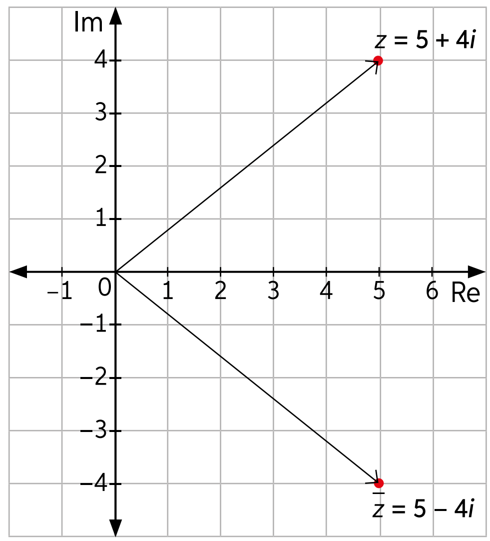
Se dice que dos números complejos son **conjugados** si y solo si difieren en el signo que acompaña a su parte imaginaria. El conjugado de un número complejo z se denota como $\overline{z}$. Es decir:

$z = a + bi \Leftrightarrow \overline{z} = a - bi$

$z = a - bi \Leftrightarrow \overline{z} = a + bi$

Ejemplo:

Sea $z = 5 + 4i$, su conjugado es $\overline{z} = 5 - 4i$. Al representarlos en el plano de Argand, se obtiene lo siguiente:



Observa que ambos números difieren en el signo de sus partes imaginarias, pero gráficamente sus representaciones son simétricas con respecto al eje real.

Además, el conjugado de un número complejo z cumple con las siguientes propiedades:

- $|z| = |\overline{z}|$
- $z = \overline{\overline{z}}$

¿Es equivalente el conjugado de un número complejo al inverso aditivo de un número complejo? Comenta tu respuesta con tus compañeros.

¿Cuál es el conjugado de un número complejo $z = a + bi$? Escríbelo como par ordenado.

3. Calcula el módulo de cada número complejo.

a. $5 + 2i$

b. $-7 + 7i$

c. $2 - \frac{1}{3}i$

d. $-6 - \frac{1}{2}i$

e. $(0, -3)$

f. $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{10}\right)$

g. $2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\,i$

h. $-\sqrt{5} - 3\sqrt{7}\,i$

i. $-\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{5}}\,i$

4. Representa en GeoGebra los vectores asociados a los conjugados de los siguientes números complejos:

a. $z_1 = 5 + 5i$

b. $z_2 = -7 + i$

c. $z_3 = -3 - 2i$

d. $z_4 = 4 + \frac{3}{2}i$

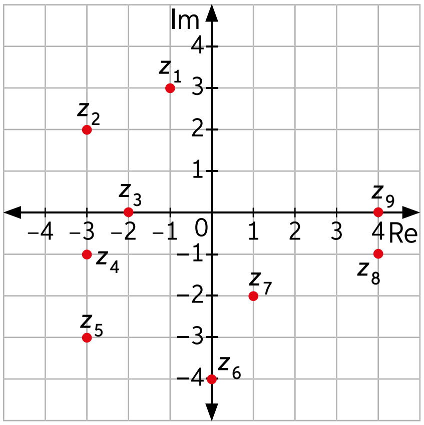
e. $z_5 = (-3, 6)$

f. $z_6 = (-6, -5)$

g. $z_7 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

h. $z_8 = -2 - \frac{1}{2}i$

5. Observa el siguiente plano de Argand y realiza las actividades.



   a. Escribe cada número complejo representado de forma binomial y de par ordenado.
   b. Calcula su módulo, su conjugado y el módulo de su conjugado.

6. Analiza cada afirmación e indica V si es verdadera o F si es falsa considerando $z = a + bi$. Justifica tu respuesta con un ejemplo o contraejemplo.
   a. El módulo de un número complejo es siempre mayor que el módulo del conjugado del mismo número complejo.
   b. Si la parte real de un número complejo es cero, el módulo equivale a su parte imaginaria.
   c. Si $a = 0$, entonces el número complejo es igual a su conjugado.
   d. La parte imaginaria de un número complejo z es igual a la parte imaginaria de su conjugado.
   e. Si $z \neq (0, 0)$, entonces $z \neq \overline{z}$.
   f. Si $a = 1$ y $b = -1$, entonces $|\overline{z}| = 2$.

7. En parejas, analicen la siguiente situación. Luego, respondan.

   Camilo y Eliana piensan un número complejo cada uno.

40 y 41

   ¿Cuáles debieran ser la parte imaginaria del número que piensa Eliana y la parte real del número que piensa Camilo para que ambos números tengan módulo igual a 10?

   ¿Qué estrategia utilizaron para resolver el problema anterior? Expliquen.

Para concluir

a. Explica a un compañero el procedimiento que utilizas para calcular el módulo y el conjugado de un número complejo.
b. ¿Qué nuevas estrategias de resolución de problemas aprendiste durante este tema? Compáralas y compártelas con tus compañeros.

Antes de continuar

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Las siguientes ecuaciones tienen sus soluciones en el conjunto de los números complejos.

   $x^2 - 2x + 5 = -4x$ $\quad x^2 - 144 = 3x^2 + 144$ $\quad 6x^2 + 7x + 60 = -40 + 2x$

   Resuélvelas e identifica la parte imaginaria en cada solución.

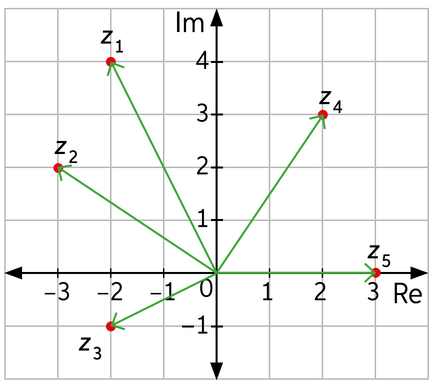
2. Expresa de una manera más simple utilizando potencias canónicas. Luego, calcula el valor de la potencia.

   a. i^{96}
   b. i^{185}
   c. $(i^{20})^{11}$
   d. $(i^{12})^3$
   e. $(i^{25})^7$
   f. $(i^{20})^{12}$

3. Representa en GeoGebra los conjugados de los siguientes números complejos:

   a. $z_1 = -5i$
   b. $z_2 = -3 - i$
   c. $z_3 = -1 + 7i$
   d. $z_4 = (4, 12)$
   e. $z_5 = \left(2, \frac{3}{4}\right)$
   f. $z_6 = \left(-5, -\frac{9}{2}\right)$

4. Danilo representó 5 números complejos en el plano de Argand:



   a. ¿Cuál es la forma binomial de cada número complejo?
   b. ¿Cuál de los números tiene mayor parte real?, ¿cuál tiene menor parte real?
   c. En el plano de Argand hay dos números que tienen el mismo módulo. ¿Cómo podrías demostrar esto? Explica tu estrategia y aplícala.

5. Se tienen dos números complejos: $z_1 = 3(\sqrt{144} - n) - 2i$ y $z_2 = -4\sqrt{64} - 2i$. ¿Cuál es el valor de n si se sabe que $z_1 = z_2$?

42

Reflexiono

- De los contenidos estudiantes en esta lección, ¿en cuál me siento más débil? ¿En qué contenido me siento mejor preparado?
- Planifica cómo mejorar en los contenidos más débiles.

Lección
8

Resolución de problemas usando la operatoria de números complejos

Adición y sustracción de números complejos

Objetivo: Resolver problemas utilizando la adición y sustracción de números complejos de forma binomial y como par ordenado.

¿Recuerdas cómo se representa gráficamente un vector?

¿Qué procedimiento utilizas para sumar y restar vectores? Explica por medio de ejemplos.

1. Analiza y resuelve el siguiente problema.
Andrea ha resuelto correctamente la adición y sustracción con los siguientes números complejos:

$z_1 = 2 + 4i$ $z_2 = 6 + 5i$ $z_3 = 3 + i$

Calculando $z_1 + z_2$:

Datos:

z_1: $Re(z_1) = 2$ $Im(z_1) = 4$

z_2: $Re(z_2) = 6$ $Im(z_2) = 5$

	Parte real	Parte imaginaria
z_1	2	4
z_2	6	5
$z_1 + z_2$	8	9

Por lo tanto: $z_1 + z_2 = 8 + 9i$

Calculando $z_3 - z_1$:

$z_3 - z_1 = z_3 + (-z_1)$

Datos:

z_3: $Re(z_3) = 3$; $Im(z_3) = 1$

$-z_1$: $Re(-z_1) = -2$; $Im(-z_1) = -4$

	Parte real	Parte imaginaria
z_3	3	1
$-z_1$	−2	−4
$z_3 + (-z_1)$	1	−3

Por lo tanto: $z_3 - z_1 = 1 - 3i$

El inverso aditivo de $z = a + bi$ es el número complejo $-z = -a - bi$.

a. ¿Qué pasos siguió Andrea para obtener el resultado de $z_1 + z_2$? Descríbelos.
b. Observa el procedimiento que utilizó Andrea para calcular el resultado de $z_3 - z_1$. ¿En qué se diferencia del procedimiento que utilizó para calcular $z_1 + z_2$? Explica.
c. Expresa el resultado de $z_1 + z_2$ y $z_3 - z_1$ como par ordenado.
d. ¿Qué similitud encuentras entre el resultado obtenido en 1.c y la adición y sustracción de dos vectores? Justifica tu respuesta.

Dados dos números complejos z_1 y z_2 tales que $z_1 = a + bi = (a, b)$ y $z_2 = c + di = (c, d)$, el resultado de la **adición** de z_1 y z_2 es un número complejo que se calcula de la siguiente manera:

Forma binomial: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Par ordenado: $z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Además, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Si z y w son números complejos, se cumplen las siguientes propiedades:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad z + \overline{z} = 2Re(z)$$

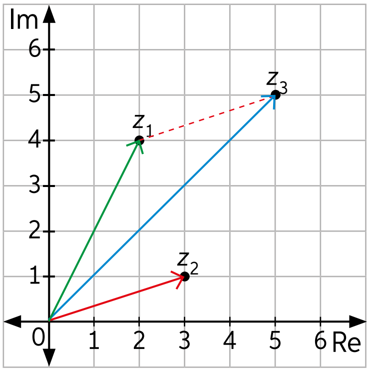
Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son números complejos, ¿cuál es la expresión binomial de $z_1 - z_2$?

2. Analiza la situación. Luego, responde.

En el siguiente plano de Argand, z_3 representa el resultado de $z_1 + z_2$, que es $5 + 5i$. Esto equivale a trasladar el vector que representa z_2 desde el origen del plano hasta z_1.

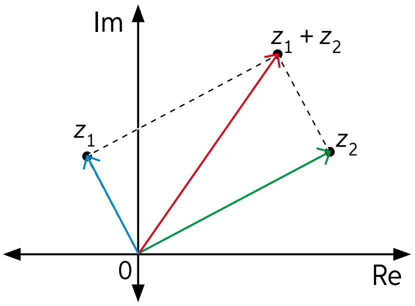
a. ¿Qué pasaría con la representación gráfica al restar dos números complejos? Calcula z_4 sabiendo que $z_4 = z_3 - z_1$. Representa este número complejo en el plano de Argand e interpreta lo obtenido.

b. ¿Qué pasa con el sentido del vector que representa z_1? En parejas, comenten sus respuestas.



La adición de dos números complejos también es posible resolverla en forma geométrica utilizando la regla del paralelogramo. Observa la representación en el plano de Argand.

Dados los números complejos z_1 y z_2, el vector asociado a $z_1 + z_2$ corresponde a la diagonal desde el origen del paralelogramo que forma z_1 y z_2.



3. Analiza la siguiente demostración. Luego, realiza las actividades.

Sea $z = a + bi$ y $w = c + di$, se cumple que $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Paso 1: $\overline{z + w} = \overline{((a + bi) + (c + di))}$

Paso 2: $= \overline{(a + c) + (b + d)i}$

Paso 3: $= (a + c) - (b + d)i$

Paso 4: $= (a - bi) + (c - di)$

Paso 5: $= \overline{(a + bi)} + \overline{(c + di)} = \overline{z} + \overline{w}$

a. Explica la demostración y compruébala otorgando valores a a, b, c y d.

b. Demuestra que $z + \overline{z} = 2Re(z)$ y compara lo realizado con un compañero.

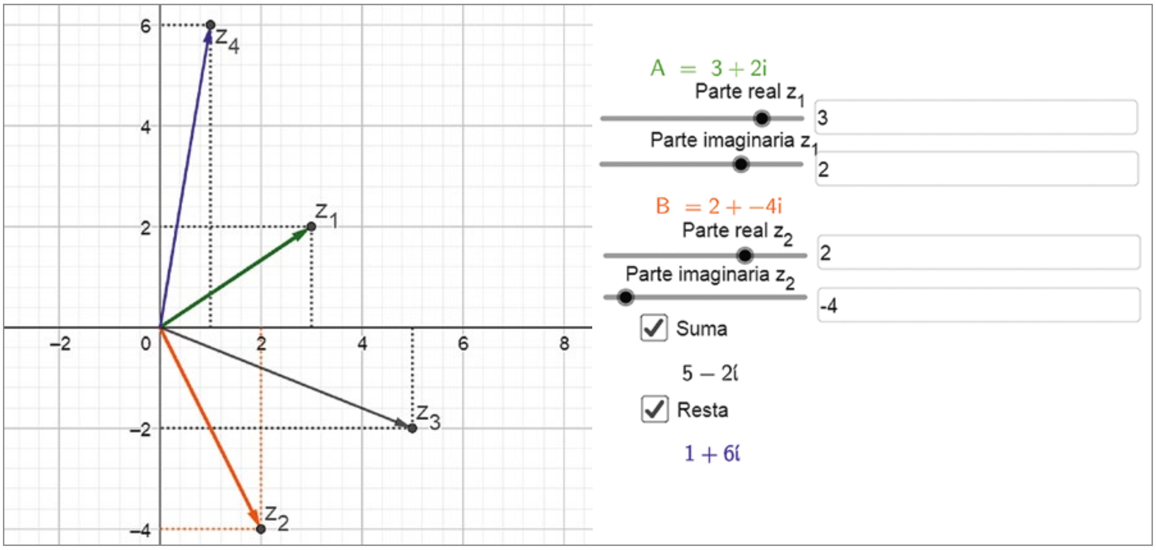
4. En parejas, realicen la actividad variando los parámetros mediante GeoGebra. Luego, observen y analicen sus resultados con el curso.

Representen gráficamente $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$, donde $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 2 - 4i$.

Paso 1: Ingresen el código T20M3MP094A en el sitio web: www.enlacesmineduc.cl y representen z_1 y z_1 .

Paso 2: Hagan clic sobre la casilla Suma, donde aparecerá z_3, que representa el resultado de $z_1 + z_2$.

Paso 3: Hagan clic sobre la casilla Resta para observar el vector z_4, que representa la sustracción de $z_1 - z_2$.



a. ¿El vector que representa z_3 corresponde efectivamente a la adición de z_1 y z_2? Compruébenlo realizando la suma algebraica.

b. ¿El vector que representa z_4 corresponde efectivamente a la sustracción de z_1 y z_2? Compruébenlo realizando la suma algebraica.

c. Modifiquen los valores de las partes reales e imaginarias de ambos números complejos mediante los deslizadores. ¿Qué pasa con z_3 y z_4?

d. Mantengan $z_1 = 3 + 2i$. Cambien a cero la parte real de z_2 y varíen los valores de la parte imaginaria de z_2. ¿Qué ocurre con z_3?, ¿y con z_4?

e. Si ahora el valor de la parte imaginaria de z_2 es cero y se varían los valores de la parte real de z_2, ¿qué ocurre con z_3?, ¿y con z_4? Expliquen.

f. Fijen los valores para $z_1 = 0$ y varíen los parámetros de z_2. ¿Cuáles son los valores de z_2, z_3 y z_4? ¿Qué relación encuentran entre ellos? Expliquen.

g. Repitan el paso anterior para $z_2 = 0$. Comparen los resultados de ambos casos.

43 y 44

Para concluir

a. De las actividades realizadas durante este tema, ¿cuál te llamó más la atención?, ¿por qué? Explica.

b. ¿Qué estrategia puedes utilizar para comprobar las respuestas de las actividades realizadas en este tema? Comenta tu respuesta con un compañero.

c. ¿En cuál actividad de este tema tuviste mayor dificultad?, ¿por qué?

Multiplicación de números complejos

Objetivo: Resolver problemas mediante la multiplicación de números complejos.

¿Qué procedimiento utilizas para calcular el producto entre dos binomios? Descríbelo con tus palabras y coméntalo con un compañero.

¿Cuál es el valor de i^2?

¿Qué propiedades de la multiplicación en los números reales conoces? Explícalas con ejemplos.

1. Mirtha y Jorge desarrollan el producto de dos números complejos. Observa sus procedimientos.

Paso 1: $(4 + 3i) \cdot (-3 + i)$	**Paso 1:** $(4, 3) \cdot (-3, 1)$
Paso 2: $4 \cdot (-3) + 4 \cdot i + 3i \cdot (-3) + 3i^2$	**Paso 2:** $(4 \cdot (-3) - 3 \cdot 1, 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3))$
Paso 3: $-12 + 4i - 9i + 3i^2$	**Paso 3:** $(-12 - 3, 4 - 9)$
Paso 4: $(-12 - 3) + (4i - 9i)$	**Paso 4:** $(-15, -5)$
Paso 5: $-15 - 5i$	

a. Explica a un compañero cada uno de los pasos que realizaron Mirtha y Jorge al multiplicar ambos números complejos.

b. ¿Qué propiedades aplicaron Mirtha y Jorge en sus procedimientos?

c. Analiza el paso 3 que realizó Jorge. ¿Qué pasa con el cuadrado de la unidad imaginaria? ¿A qué conjunto numérico pertenece este resultado?

Si hubieras sido tú quien debe calcular el producto de los dos números complejos, ¿qué método habrías escogido: el de Mirtha o el de Jorge? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 = a + bi = (a, b)$ y $z_2 = c + di = (c, d)$, la **multiplicación** de z_1 y z_2 está dada por la siguiente expresión:

Forma binomial: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Forma de par ordenado: $z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Además, se cumplen las siguiente propiedades, con $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

Clausura: $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ y $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$

Asociatividad: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ y $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

Neutro: Si $a, b \in \mathbb{R}$. El neutro aditivo $0 + 0i$ cumple con $(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$ y el neutro multiplicativo $1 + 0i$ cumple con $(a + bi)(1 + 0i) = a + bi$.

Inverso aditivo: Si $z = a + bi$, entonces $z + (-z) = 0$.

Inverso multiplicativo: Si $z \neq 0 + 0i$, entonces $z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{1}{z}$

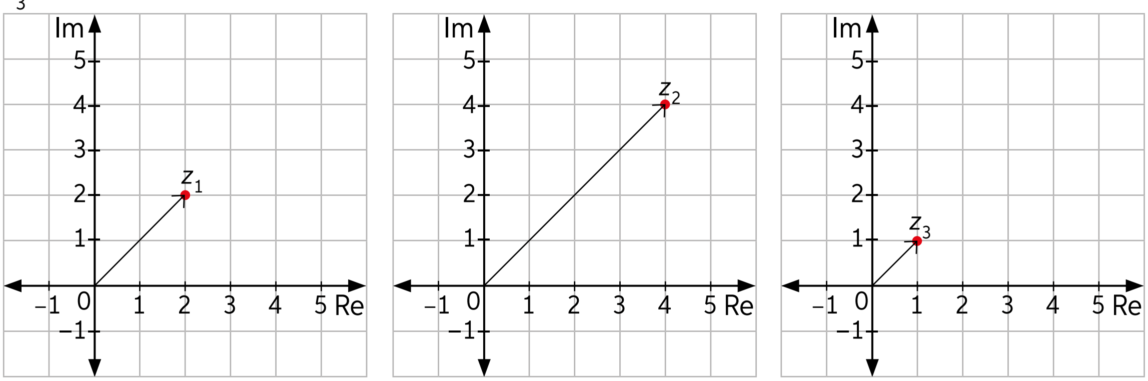
$$\text{donde } z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a, b \neq 0.$$

Conmutatividad: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ y $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Distributividad: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

2. Calcula. Considera que $z_1 = (3, 4)$, $z_2 = (-1, 3)$ y $z_3 = (2, -5)$.
   a. $z_1 \cdot (-z_2)$
   b. $z_3 \cdot z_1$
   c. $-z_1 \cdot z_3$
   d. $-z_1 \cdot -z_2$

3. Se representó en el plano de Argand los números complejos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 4 + 4i$ y $z_3 = 1 + 1i$.



   a. ¿Cuál es el módulo de los vectores asociados a z_1, z_2 y z_3? Calcúlenlos.
   b. ¿Qué relación hay entre el módulo del vector asociado a z_1 y a z_2?, ¿y entre z_1 y z_3? Expliquen.

La **ponderación** de un número complejo $z = a + bi$ por uno real k es el producto de $k \cdot z \in \mathbb{C}$ y se calcula:

$$kz = k(a + bi) = k \cdot a + k \cdot bi$$

Además, se dice que el vector asociado a kz es una dilatación del vector asociado a z si $k > 1$, pues $|z|$ aumenta. Del mismo modo, se dice que el vector asociado a kz es una contracción del vector asociado a z si $0 < k < 1$, pues $|z|$ disminuye.

4. Calcula. Considera que $z_1 = -2{,}3 + 4i$, $z_2 = -4{,}2 + 0{,}3i$ y $z_3 = \left(\frac{1}{2}, 5\right)$.
   a. $3 \cdot (-z_1)$
   b. $-2 \cdot (-z_1)$
   c. $7 \cdot (-z_3)$

5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Como la unidad imaginaria i se representa por el par ordenado (0, 1), entonces:

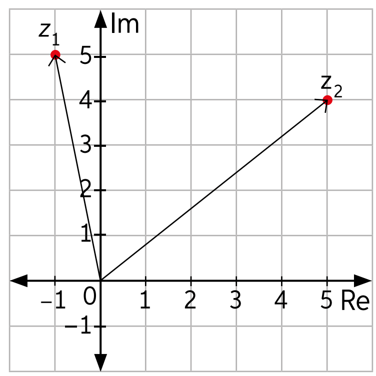
$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1,\ 0 + 0) = (-1, 0) = -1$$

Además, para un número complejo (a, b), se tiene:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

a. Demuestra que $i^3 = -i$ y que $i^4 = 1$ utilizando la información anterior.
b. Comprueba que el producto entre los números reales $(p, 0)$ y $(q, 0)$ es pq. ¿Qué puedes concluir respecto de la multiplicación de números reales y de la de los números complejos?
c. En parejas, comparen sus respuestas. ¿Qué estrategia utilizaron en esta actividad?

6. Analiza el siguiente gráfico. Luego, responde.



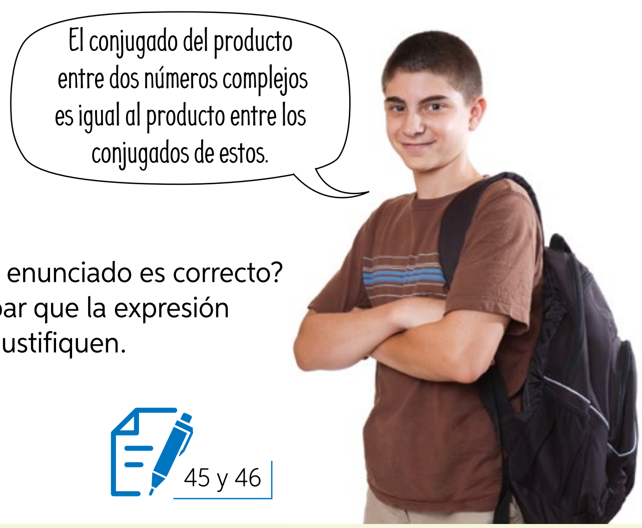
a. ¿Cuál es z_1?, ¿y z_2? Escríbelos de forma binomial y como par ordenado.
b. Calcula el módulo de z_1 y de z_2.
c. ¿Cuál es el resultado de $z_1 \cdot z_2$? ¿y el de $|z_1 \cdot z_2|$? Escriban el producto entre z_1 y z_2 de forma binomial.

7. Analiza la siguiente propiedad y realiza las actividades.

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

a. Describe con tus palabras en qué consiste esta propiedad.
b. Prueba que esta propiedad se cumple. Para esto, considera 2 números complejos diferentes.

8. Analiza la propiedad que dice Felipe.



a. Sintetiza el enunciado por medio de una expresión algebraica.
b. En parejas, comparen sus resultados. ¿El enunciado es correcto? ¿Qué estrategia utilizarían para comprobar que la expresión algebraica que escribieron es correcta? Justifiquen.

45 y 46

Para concluir

a. Describe el procedimiento que utilizas al multiplicar dos números complejos. ¿Qué debes considerar? Explica.
b. Si tuvieras que multiplicar 3 números complejos, ¿qué estrategia utilizarías?, ¿por qué?
c. ¿Qué regularidad observas al multiplicar un complejo cualquiera $a + bi$ por i? Explica con tus palabras.

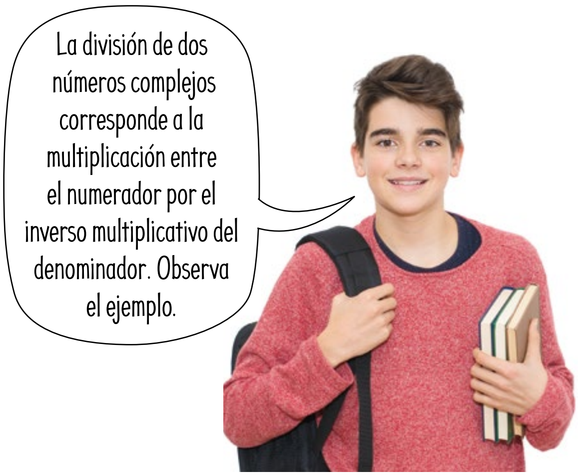
División de números complejos

Objetivo: Resolver problemas mediante la divisiones de números complejos.

¿Cómo se calcula el conjugado de un número complejo?

¿Qué propiedades de las que se cumplen en la multiplicación de números reales no se cumplen en la división?

1. Analiza la información que entrega Marcelo. Luego, responde.



$(2 - 5i) : (3 + 4i) = \dfrac{2 - 5i}{3 + 4i} = (2 - 5i)\,(3 + 4i)^{-1}$

Por definición:

$(3 + 4i)^{-1} = \dfrac{1}{3 + 4i} = \dfrac{3 - 4i}{3^2 + 4^2} = \dfrac{3 - 4i}{9 + 16} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$

Luego: $\dfrac{2 - 5i}{3 + 4i} = (2 - 5i)\,(3 + 4i)^{-1} = (2 - 5i)\left(\dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i\right)$

$= \left(\dfrac{6}{25} - \dfrac{20}{25}\right) + \left(-\dfrac{8}{25}i - \dfrac{15}{25}i\right)$

$= \left(\dfrac{6}{25} - \dfrac{4}{5}\right) - \left(\dfrac{8}{25} + \dfrac{15}{25}\right)i$

$= -\dfrac{14}{25} - \dfrac{23}{25}i$

a. ¿Qué relación hay entre el inverso multiplicativo de un número y su conjugado? Explica.

b. ¿Observas otra manera de resolver la división? Comenten en parejas sus respuestas.

Dados z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, tales que $z_1 = a + bi = (a, b)$ y $z_2 = c + di = (c, d)$, con $z_2 \neq (0, 0)$, la **división** entre z_1 y z_2 se puede resolver con la siguiente expresión:

$$\frac{z_1}{z_2} = (a + bi)\left(\frac{c - di}{c^2 + d^2}\right) = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$$

Así también la expresión $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$ permite resolver la división entre dos números complejos.

Calcula el resultado de $(1 + i) : (1 - i)$. ¿Qué expresión utilizaste? ¿Por qué? Comenten en parejas sus respuestas.

2. Calcula.

a. $(1 + 5i) : (1 + i)$

b. $(5 + 4i) : (6 - i)$

c. $(4 - 2i) : (5 - 3i)$

d. $(9 - i) : (2 - 2i)$

e. $\dfrac{2 + 3i}{3 + i}$

f. $7 : (i - 3)$

g. $(\sqrt{5} - \sqrt{9}\,i) : i$

h. $(2 - 5i) : (-i)$

¿Qué método utilizaste para calcular el resultado de las divisiones? ¿Por qué?

3. Reduce las siguientes expresiones hasta la parte real de cada número.

a. $\frac{1+2i}{3-i}+\frac{7}{10}i$

b. $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

4. Analiza y resuelve el siguiente problema.

Darío investigó sobre la operatoria de la división de números complejos. Una de las propiedades que le llamó la atención fue la siguiente:

"El conjugado del cociente de dos números complejos es equivalente al cociente de los conjugados de esos números complejos".

a. ¿Qué expresión algebraica sintetiza el enunciado? Escríbela en tu cuaderno. Luego, desarróllala para demostrarla y explica los pasos que utilizaste.

b. Compara tu resultado con el de un compañero. ¿Llegaron a la misma expresión?

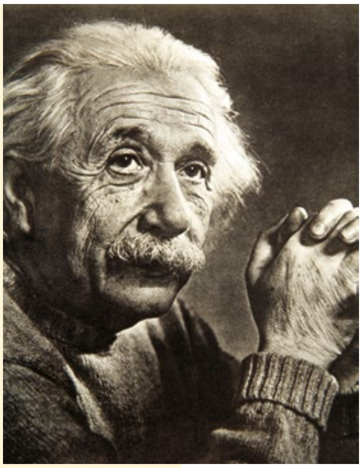
c. Comprueba el desarrollo de tu compañero otorgando valores numéricos ¿Llegas al mismo resultado?

d. Justifica por qué esta propiedad no se cumple para el divisor $z = 0 + 0i$. Comenten sus respuestas en parejas.

Física

5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Los taquiones consistirían en partículas subatómicas que hipotéticamente podrían moverse a velocidades mayores que la de la luz, denotada por la letra c, valor que en el vacío corresponde aproximadamente a 300 000 kilómetros por segundo. Estas partículas, aún no descubiertas, nacen como consecuencia del desarrollo de la teoría de la relatividad especial propuesta por Albert Einstein.



Albert Einstein

La fórmula para el cálculo de la energía cinética relativista es $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (con m la masa y v la velocidad),donde se observa que la expresión $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, bajo ciertas condiciones, puede llegar a convertirse en un número imaginario.

Sin embargo, para que pueda ser medida una magnitud física, debe tratarse de un número real.

Una propiedad que tendría una partícula de esas características es que, al tener una velocidad mayor que la luz, se obtendría como resultado una masa imaginaria, la cual no sería directamente medible. Así, la energía que tendría el taquión disminuiría cuando su velocidad aumenta y es cada vez más estable cuanta mayor sea su velocidad, sin tener esta un límite.

Debido a estas propiedades físicas, los científicos han tratado de encontrarlos experimentalmente, aún sin resultados.

a. ¿Cuál es el valor de la energía para valores de $v = 0$, 200 000 km/s y 1,5c?

b. Investiga qué es el efecto Cherenkov. Explícalo brevemente.

Actividad de aplicación

Divisiones con números complejos utilizando cómic

Problema: La falta de interes en documentos curriculares y la diversidad en el aprendizaje de los estudiantes con respecto a números complejos.

¿Qué haremos? Un cómic o similar para motivar el aprendizaje.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 integrantes. Anoten las expresiones que permiten calcular la división entre números complejos y las propiedades que se cumplen.

Paso 2: Escojan qué temática tendrá su cómic. La idea es que puedan mostrar situaciones en un contexto novedoso y atractivo, en que se utilice el cálculo de divisiones de números complejos. Algunas temáticas pueden ser:

- Historia de terror
- Misterio
- Ciencia ficción
- Cuento
- Chiste
- Fantasía

Luego, respondan: ¿qué materiales necesitan para elaborar su cómic?

Ejecutemos

Paso 3: Definan el rol de cada integrante del equipo en la elaboración del cómic.

- Creación del guión.
- Dibujante.
- Pintado y diseño.

Presentemos

Paso 4: Presenten su cómic al curso. Realicen una introducción en la que expliquen de qué se trata la historia que refleja.

Paso 5: Luego de cada presentación, respondan:

- ¿En qué situaciones concretas se vio el cálculo con números complejos?
- ¿Qué estrategia de cálculo se utilizó en el cómic? ¿Podrían haber utilizado otra?
- ¿En qué los ayudó esta actividad para el estudio de operaciones con números complejos?

47 y 48

Para concluir

a. Da dos ejemplos en los que se utilice la división de números complejos y calcúlala. Luego, explícaselos a un compañero.

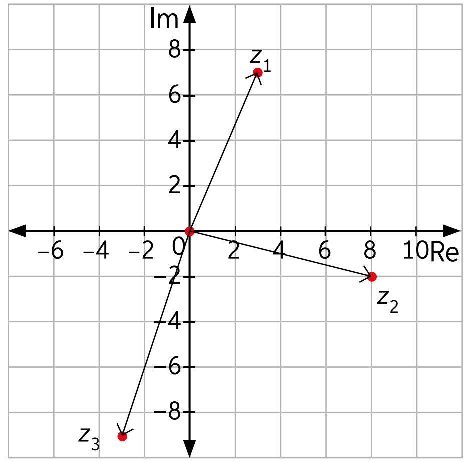
b. De las actividades realizadas en este tema, ¿cuál fue la que más te llamó la atención?, ¿por qué?

c. ¿Qué dificultades presentaste durante el desarrollo de las actividades de este tema?, ¿qué hiciste al respecto?

Antes de continuar

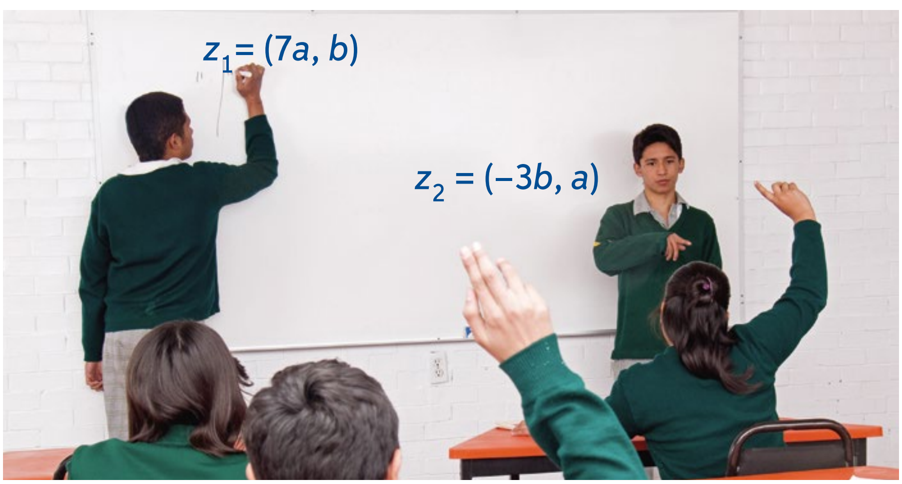
Realiza las siguientes actividades para saber cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. En el plano de Argand están representados los números complejos z_1, z_2 y z_3. Calcula lo pedido.
   a. La suma entre z_1 y z_3.
   b. La diferencia entre z_3 y z_2.
   c. El cociente entre la suma del triple de z_1 y el doble de z_3 y el conjugado de z_2.
   d. El producto entre el inverso aditivo del doble de z_3 y la cuarta parte de z_1.
   e. El producto de z_1 y el conjugado de z_2.
   f. La diferencia entre el inverso multiplicativo de z_3 y el conjugado de z_1.
   g. El conjugado de la diferencia entre el conjugado de z_1 y el conjugado de z_2.



2. Escribe 4 números complejos diferentes. Luego, representa en GeoGebra:
   a. El conjugado de cada número complejo.
   b. El vector que representa dos operaciones diferentes utilizando los 4 números complejos.

3. Resuelve el siguiente problema.
   Cristian y Sebastián escriben dos números complejos en términos de *a* y *b*.



   a. ¿Qué valores deben tener *a* y *b* para que $z_1 + z_2 = (2, 5)$?
   b. ¿Qué estrategia utilizaste para resolver el problema? Explica.

49

Reflexiono

- ¿Qué conceptos de la Lección entendiste bien? ¿Cómo lo podrías evidenciar?
- ¿Qué conceptos debes reforzar? Realiza un listado y vuelve a las páginas correspondientes para analizar los contenido que debes reforzar.

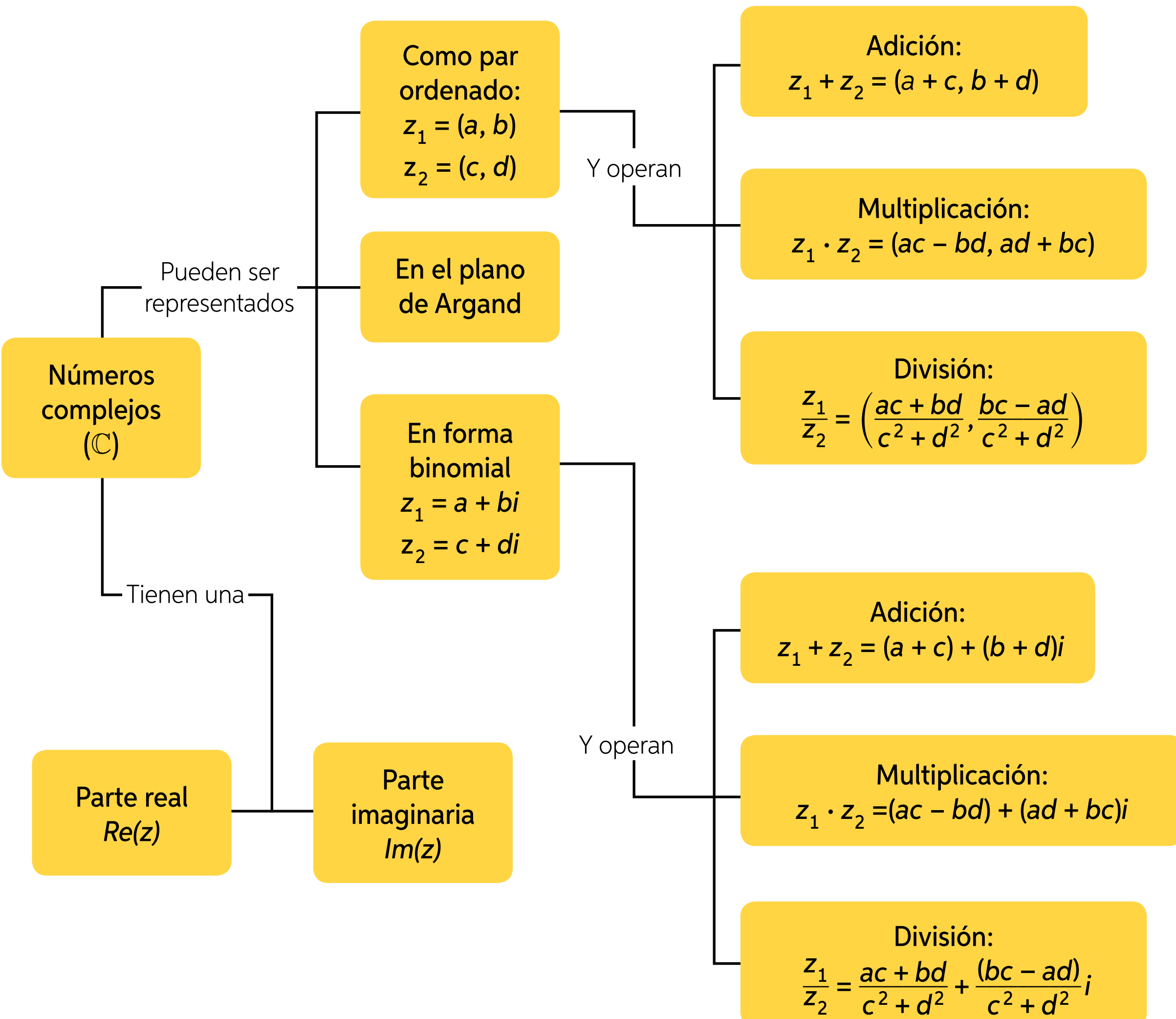
Síntesis

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es un mapa conceptual?

Un mapa conceptual es un organizador visual cuya función básica es la clasificación jerárquica de cierta información. Parte del dato más general, desciende de forma progresiva en niveles con contenido más específico y con un mismo valor jerárquico, y finaliza con un ejemplo para cada criterio.

A continuación, se presenta un mapa conceptual con algunos de los conceptos estudiados a lo largo de la Unidad.



Ahora, hazlo tú

1. Escoge una lección de la Unidad y sintetiza lo estudiado mediante un mapa conceptual.
2. Comparte con tu curso el mapa conceptual que elaboraste y responde:
   - ¿Qué aspecto consideró cada uno para su creación?
   - ¿Qué diferencias y semejanzas hay entre los mapas conceptuales?

Repaso

Realiza las siguientes actividades.

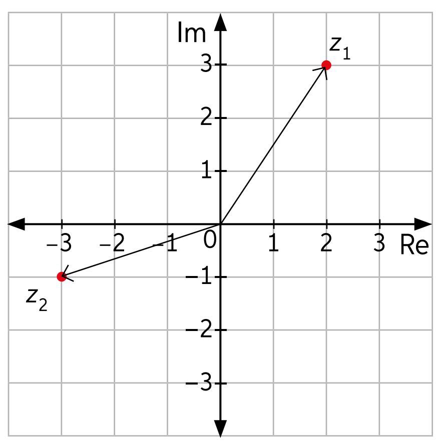
Lección 7: El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones:
   a. $-x - 16 = 0$ b. $x^2 + 121 = 0$ c. $-x^2 = 81$
2. Identifica la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:
   a. $z_1 = 5 - 4i$ b. $z_2 = -8 + 0{,}4i$ c. $z_3 = -17i$ d. $z_4 = -31$
3. Calcula el valor de las siguientes potencias:
   a. i^9 b. $i^{25} \cdot i^{55} \cdot i^{32}$ c. $((-i^3))^7$ d. $(((i)^4)^3)^2$
4. Representa en GeoGebra el vector determinado por los números complejos dados. Luego, escríbelos como par ordenado.
   a. $z_1 = 3 - 5i$ b. $z_2 = -4 + 2i$ c. $z_3 = 6 - 5i$ d. $z_4 = -2 - 3i$
5. Determina el conjugado y el módulo de cada uno de los siguientes números complejos:
   a. $z_1 = (5, -3)$ b. $z_2 = -6 + 7i$ c. $z_3 = 2 - 4i$ d. $z_4 = (-12, 8)$

Lección 8: Resolución de problemas usando la operatoria de números complejos

6. Resuelve.
   a. $(2, 4) + (3, -1)$
   b. $(1 + 7i) + (-5 + 2i)$
   c. $(4 + 5i) - (-4 + 2i) + (3 - 10i)$
   d. $(-3 + 11i) - (-4 - 3i)$
   e. $(2, 8)\,(-3, 4)$
   f. $(-2, -2) : (-4, 6)$
7. Resuelve considerando que $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = -4 + 2i$, $z_3 = 8 - 4i$ y $z_4 = -7 - 5i$.
   a. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$
   b. $z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4$
   c. $\left(\left|z_3 - \overline{z_4}\right|\right)^2$
   d. $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1} - \dfrac{z_1 + z_3}{z_2}$
   e. $\dfrac{z_3 + z_4 - z_1}{|z_2|}$
   f. $\left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_4}\right| - \left(\overline{\dfrac{z_3 - z_4}{z_1}}\right)$
8. Resuelve el siguiente problema:

   Raúl representó z_1 y z_2 en el plano de Argand.

   a. ¿Cuál es la forma binomial y de par ordenado del resultado de $z_1 \cdot z_2$?
   b. ¿Cuál es el valor de $|z_1 + z_2|$?
   c. ¿Cuál es valor de $\left|\overline{z_1 - z_2}\right|$?
   d. ¿Es correcto afirmar que $z_1 : z_2$ equivale a $\dfrac{3}{10} + \dfrac{11}{10}i$? Justifica.

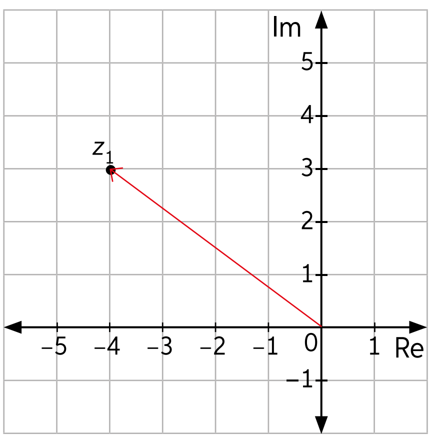
¿Qué aprendí?

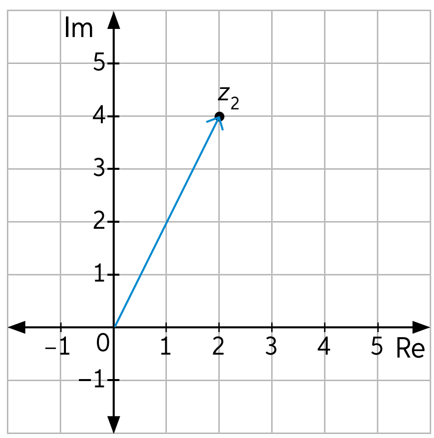
Realiza las siguientes actividades para que sepas lo que aprendiste durante esta Unidad. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Representa cada número complejo en su forma binomial o como par ordenado según corresponda.
   a. $8 + 4i$
   b. $(2, -9)$
   c. $6i$
   d. $\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right)$
   e. $-3 - 11i$
   f. $(6, 5)$
   g. $0{,}5i$
   h. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$
   i. $4{,}5 - 7i$
   j. $(-7, -12)$
   k. 14
   l. $\left(\frac{1}{9}, 5\right)$

2. Escribe tres números complejos distintos que cumplan con las condiciones dadas.
   a. Su parte real es un número natural y su parte imaginaria es un entero negativo.
   b. Su parte real es cero y su parte imaginaria real es mayor que −6.
   c. Su parte real es múltiplo de cinco y su parte imaginaria es un número par.
   d. Su parte real es la mitad de su parte imaginaria.

3. Identifica el número complejo representado. Luego, calcula su módulo y su conjugado.

   a.


   b.


4. Indica en qué cuadrante del plano de Argand se encuentra cada número complejo. Luego, calcula su módulo.
   a. $z_1 = 1 - i$
   b. $z_2 = 3 + 7i$
   c. $z_3 = 8 - 2i$
   d. $z_4 = -7 + 9i$
   e. $z_5 = 7 - 8i$
   f. $z_6 = 2 + 5i$

5. Calcula el inverso del conjugado de los siguientes números complejos:
   a. $z_1 = 2 - 3i$
   b. $z_2 = 5 + i$
   c. $z_3 = -4 - 2i$
   d. $z_4 = 6 - 6i$
   e. $z_5 = 9 - 8i$
   f. $z_6 = 5i$

6. Calcula el resultado de las siguientes operaciones. Considera $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = 1 + i$ y $z_4 = 3 - 2i$. Luego, identifica sus partes real e imaginaria.

a. $z_1 + z_2$
b. $z_2 - z_3$
c. $z_1 - (z_2 - z_4) - z_3$
d. $z_4 + z_3 - z_2$
e. $z_1 - z_2 - z_3 - z_4$
f. $z_4 - z_3 + z_2$

7. Representa de forma binomial el resultado de las siguientes operaciones. Considera $z_1 = -3 - 5i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 4 - i$ y $z_4 = -3 - 3i$.

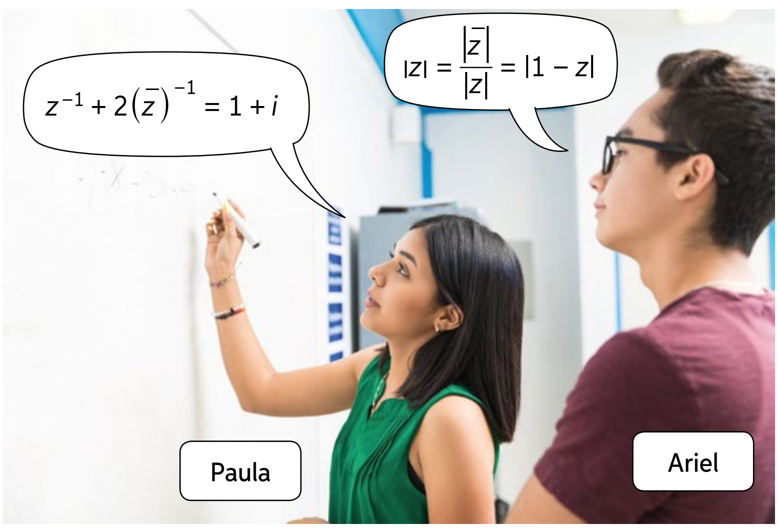
a. $z_1 : z_2$
b. $z_3 : z_4$
c. $z_3 : z_1$
d. $z_2 : z_3$
e. $z_1 \cdot z_2 : z_3 \cdot z_4$
f. $z_4 : z_3 + z_1 \cdot z_2$

8. Analiza y resuelve el siguiente problema.
Fernando desarrolló el siguiente ejercicio en su cuaderno:

$$
\begin{aligned}
(4 - 5i) \cdot (7 - 6i) &= 28 - 24i - 35i - 30i^2 \\
&= 28 - 24 \cdot (-1) - 35 \cdot (-1) - 30 \cdot \sqrt{1}\, i \\
&= 28 + 24 + 35 - 30i \\
&= 87 - 30i
\end{aligned}
$$

a. ¿Cuáles fueron los errores que cometió Fernando? Explica.
b. Resuelve correctamente el ejercicio.

9. Determina en cada caso un número complejo z que cumpla con la condición pedida por cada estudiante.



Reflexiono

- ¿Cómo afrontaste cada tema de la Unidad? ¿Qué cosas habrías hecho de diferente forma? Explica.

P ¿Qué aprendizajes de la Unidad te ayudaron en la realización del proyecto? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

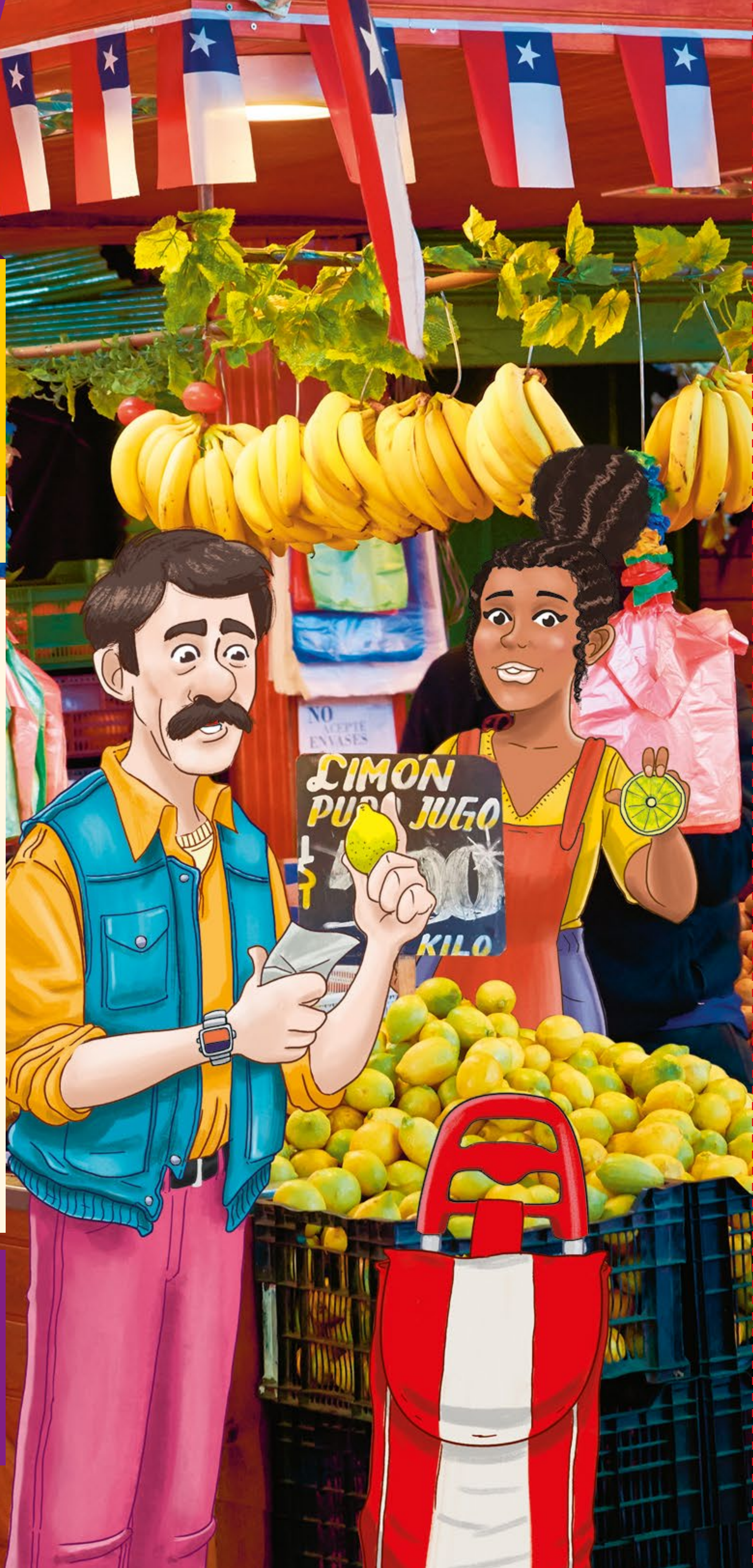
Unidad 1

LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES FINANCIERAS Y ECONÓMICAS

Números

Observa la imagen. Luego, comenta tu respuesta con tu curso.

1. ¿Qué relación puedes establecer entre la Vega Central y el título de la Unidad?
2. ¿De qué manera la economía está presente en la imagen? Nombra diferentes situaciones.
3. ¿Qué decisiones económicas tomas a diario? Da 3 ejemplos.
4. ¿Por qué es necesario tomar decisiones responsables e informadas en situaciones de consumo? Argumenta.
5. Cuando compras algo en el comercio, ¿cómo pagas?
6. Además del pago en efectivo, ¿qué otros medios de pago conoces que se utilicen en el comercio?



En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Toma de decisiones aplicando porcentajes.
- Tasas de decisiones aplicando tasas de interés compuesto.


DULCES JUGOSAS
$ 500
KILO
DULCES OFERTA
EL KILO

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Indica a cuánto equivale cada periodo de tiempo.
   a. 90 días:
   - En meses
   - En años
   - En trimestres

   b. 18 meses:
   - En días
   - En trimestres
   - En años

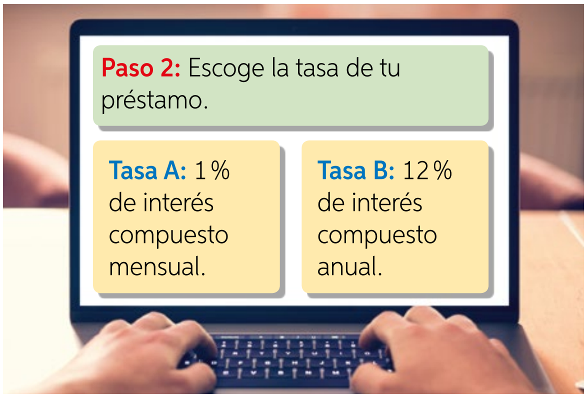
2. Calcula el porcentaje pedido en cada caso.
   a. 25 % de 24.
   b. 18 % de 150.
   c. 120 % de 90.
   d. 0,5 % de 182.
   e. 73 % de 0,19.
   f. 0,08 % de 0,005.

3. Cecilia está descargando una actualización para su celular. Observa su progresión.

   Suponiendo que la velocidad de descarga es constante, ¿en cuántos minutos más, aproximadamente, terminará el proceso?

4. Verónica depositó $100 000 en la cuenta de ahorro de un banco que le ofreció una tasa de interés compuesto anual de 5 %. Si no realiza giros ni depósitos, ¿cuánto dinero tendrá en la cuenta al cabo de 2 años?

5. Martín quiere tomar un préstamo a 3 años de $3 000 000. ¿ Cuál de las tasas de interés es la que más le conviene?, ¿por qué? Observa la imagen.



6. ¿Cuál de los dos intereses crece más rápido?, ¿cómo lo comprobarías?

Reflexiono

- Explica qué estrategias te resultaron más sencillas para calcular porcentajes. Luego, comparte tu respuesta con tu curso.
- ¿Qué fortalezas y debilidades pudiste observar al rendir esta evaluación? Explica.

Lección 1

Toma de decisiones aplicando porcentajes

Porcentajes en el comercio

Objetivo: Comparar ofertas del comercio para tomar decisiones.

¿Qué procedimiento utilizas para calcular el porcentaje de una cierta cantidad? Explica y da un ejemplo.

¿En qué situaciones cotidianas del comercio puedes utilizar el interés simple? Describe 2.

1. Observa y analiza la siguiente situación:

a. Intuitivamente, ¿qué oferta escogerías? Fundamenta tu respuesta.

b. Para conocer qué oferta es más conveniente, analicemos el procedimiento que se realiza para la primera oferta. Observa:

- Se define una unidad común de comparación, en este caso, el precio por gramo de piña.
- Luego, se determina la variación porcentual del precio del producto y se calcula el precio por gramo para el precio original y para el precio en oferta. Observa la tabla:

Primera oferta	Precio	Contenido	Precio por gramo
Original	$1350	200 g	$6,75 por gramo
Oferta	$1215	200 g	$6,075 por gramo

¿Cómo calculas el 10 % de $1350? Compara tu estrategia con la de tus compañeros.

- Por lo tanto, en la primera oferta, se obtiene un precio de $6,075 por cada gramo de piña.

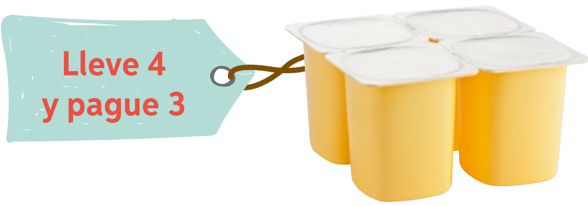
c. ¿Cuál es el precio por gramo de la segunda oferta? Utiliza el procedimiento anterior para contestar.

d. A partir de los resultados anteriores, ¿qué oferta conviene escoger?

Aplicar porcentajes en el comercio te servirá para:
- Decidir qué conviene más de una gama de productos.
- Saber cuánto estás gastando o ahorrando al escoger un producto.
- Calcular los descuentos reales de los productos que se ofrecen en el comercio.
- Tener un mejor control de las finanzas.

- ¿Qué situación cotidiana recuerdas en la que hayas utilizado porcentajes para decidir? Descríbela.
- Si necesitas comprar un producto, ¿qué aspectos considerarías para asegurar que la compra que realizarás es la más conveniente?

2. Observa las ofertas. Luego, responde.



¿Qué oferta escogerías para comprar 4 yogures si el precio de cada yogur es \$280?, ¿por qué? Comenta tu respuesta con tus compañeros.

3. Evalúa las afirmaciones de Pedro y Fabiola a partir de lo siguiente: "El precio de un producto aumenta 20 % y luego, por una oferta, disminuye 20 %.

¿Quién tiene la razón? Fundamenta tu respuesta.

- Para un porcentaje x, ¿qué valor hace la expresión $(1 + x)(1 - x)$ mayor a 1?

4. Analiza la situación y resuelve. Luego, compara tus respuestas con las de tus compañeros.

Una tienda de instrumentos musicales vende en el mes cerca de 40 guitarras, como la que se muestra en la imagen.

a. Cierto mes, la tienda rebajó en 28 % el precio de la guitarra y las ventas aumentaron en 15 %. ¿Fue conveniente para la tienda realizar la rebaja? Explica.

b. Dada la rebaja anterior, ¿en qué porcentaje debió aumentar las ventas la tienda para conservar el ingreso del mes?

c. El sueldo de un vendedor de la tienda es de $590 000. Para aumentar su sueldo le ofrecen las siguientes opciones:

Opción 1:
Recibir un aumento correspondiente al 3 % de su sueldo.

Opción 2:
Ganar una comisión de 1 % del precio por cada guitarra vendida.

¿Cuál es la cantidad mínima de guitarras que debe vender para que le convenga la segunda opción?

5. En parejas, lean las afirmaciones acerca de los descuentos. Luego respondan.

- Los consumidores prefieren una oferta de cantidad extra de producto en vez de una reducción en el precio, aunque el ahorro sea el mismo.

- Es mejor presentar un descuento como la suma de dos porcentajes (ej.: 25 % + 20 %) que como el descuento simple equivalente (en este caso, 40 %).

- Si un competidor decide lanzar un producto con un descuento del 20 % cambiando su diseño, este será más atractivo para los consumidores que una oferta del mismo producto con el 25 % extra de cantidad.

- Los consumidores parecen percibir que un incremento de volumen del producto de 33 %, por ejemplo, es equivalente a una reducción en el precio del 33 %, aparentemente porque el porcentaje es el mismo.

a. ¿Están en desacuerdo con alguna de las afirmaciones?, ¿por qué?

b. ¿Qué razones fundamentan cada afirmación? Expliquen cómo pueden utilizarlas a su favor, ya sea cuando ustedes son los consumidores o en el rol de intentar aumentar las ganancias.

Mercado financiero

6. Resuelve considerando la información de la imagen.

Alicia viajó de Estados Unidos a Chile por motivos de trabajo. Al finalizar recibió \$3 350 000, que convirtió a dólares en un banco que cobraba 3 % de comisión.

El precio de "compra" es el monto que me van a pagar por la divisa que quiero vender.

El precio de "venta" es el monto que debo pagar para adquirir la divisa que quiero comprar.

Observa:

- Cálculo de la comisión:

  3 % de 3 350 000

  $0{,}03 \cdot 3\,350\,000 = 100\,500$

  $3\,350\,000 - 100\,500 = 3\,249\,500$

- Cálculo de los dólares:

  $$\frac{\text{dólar}}{\text{peso chileno}} \longrightarrow \frac{1}{672} = \frac{x}{3\,249\,500};\ x = \frac{3\,249\,500}{672} \approx 4836$$

Alicia decide comprar una caja de chocolates en el aeropuerto. En la caja aparece señalado el precio en pesos chilenos, en dólares y en euros, tal como se muestra en la imagen.

Para su compra, solo tiene un billete de 50 USD y otro de 50 €, y sabe que la tienda da el vuelto en pesos chilenos.

a. ¿Cuánto vuelto recibirá Alicia si paga con el billete de 50 USD?, ¿y si paga con el de 50€?

b. ¿Con qué billete le conviene pagar?, ¿por qué?

c. ¿Qué porcentaje de dinero se habría ahorrado si hubiese pagado con pesos chilenos por cada moneda extranjera utilizada?

d. La tienda también hace cambios de moneda a pesos chilenos con una comisión de 2,7 %. ¿Le habría convenido a Alicia cambiar sus billetes a pesos chilenos y luego haber pagado la caja de chocolates en vez de haber pagado con dólares o euros? Fundamenta tu respuesta.

5 a 7

Para concluir

a. Explica la importancia de saber aplicar los porcentajes en situaciones cotidianas. Describe dos situaciones diferentes a las vistas en este tema.

b. ¿Cuál fue la actividad que te pareció más interesante de realizar?, ¿por qué?

c. De lo visto en este tema, ¿en qué actividad tuviste mayor dificultad?, ¿qué hiciste al respecto?

Presupuestos y planificación

Objetivo: Tomar decisiones a partir de la elaboración de presupuestos familiares y personales.

¿Cómo organizas tus finanzas personales?

Si tuvieras que clasificar el tipo de consumidor que eres, ¿te considerarías impulsivo o moderado?

1. Observa el presupuesto que elaboró Camila para un mes. Luego, realiza las actividades.

Presupuesto

Ingresos

Mesada de mis papás: $25 000

Esperar a los hijos de mi vecina a la salida del colegio: $20 000

Regalo de mi abuela cada mes: $10 000

Gastos

Recarga de celular: $6000

Salida al cine: $14 000

Colación del colegio: $8000

Ahorro: $5500

   a. Calcula el total de los ingresos de Camila.
   b. Calcula el gasto de Camila en el mes.
   c. A fin de mes, ¿podría ahorrar más?, ¿por qué?

2. Elabora tu presupuesto personal. Para ello, sigue los pasos.

   Paso 1: Recopila toda la información sobre ingresos y gastos según tu situación personal o familiar durante un periodo de tiempo, por ejemplo, un mes.

   Paso 2: Elabora una tabla o lista y escribe en ella los ingresos y los gastos mensuales. Para ello, considera gastos fijos, gastos variables e imprevistos u ocasionales.

   A partir de lo anterior, responde:

   a. ¿Cuánto dinero te queda a fin de mes?, ¿puedes ahorrar?
   b. Si tus gastos fueran mayores que tus ingresos, ¿qué decisiones tomarías?, ¿de qué gastos tendrías que prescindir?, ¿por qué esos y no otros? Fundamenta.
   c. ¿Por qué es importante ahorrar? Comenta con tus compañeros.

Si gastas de más, puedes buscar maneras de reducir tus gastos o de aumentar tus ingresos.

Un **presupuesto** es un instrumento para gestionar nuestra economía. En él se describen, por un lado, los **ingresos** esperados y, por otro, los gastos previstos durante un periodo de tiempo (en general, un mes). Entre los **gastos**, se considera una cantidad como ahorro para proyectos personales y como fondo de emergencia.

Una vez que está elaborado el presupuesto, se debe comprobar la **relación entre gastos e ingresos**. Si los ingresos son mayores que los gastos, ahorramos. Si sucede lo contrario, hay que analizar si se trata de una cuestión accidental (un mes con imprevistos importantes) o es habitual. En este último caso, iremos agotando los ahorros (si los hay) y tendremos que tomar decisiones para ajustar el presupuesto. En resumen:

Ingresos > gastos ⟶ SUPERÁVIT (ahorro)

Ingresos = gastos ⟶ EQUILIBRIO

Ingresos < gastos ⟶ DÉFICIT (tomar decisiones)

- ¿Por qué piensas que es importante elaborar un presupuesto?, ¿para qué te servirá?

3. En parejas, lean la siguiente información. Luego, realicen lo solicitado.

Funciones del presupuesto familiar

Controlar los gastos

El presupuesto nos ayuda a mantener los gastos en función de los ingresos y, de ser necesario, priorizar, reducir o eliminar gastos para evitar problemas de endeudamiento.

Gastar de forma inteligente

El presupuesto nos ayuda a decir "no" a hábitos de gasto que nos desvían de nuestros objetivos, como las compras impulsivas.

Conocer la situación económica

Sin un presupuesto, hay que revisar continuamente si disponemos de suficiente dinero para afrontar los gastos.

Planificar el futuro

Ahorrar algo todos los meses nos permitirá disponer de un fondo para emergencias y afrontar gastos inesperados.

a. Ordenen las funciones anteriores según la importancia que le asignen a cada una.

b. Comparen las prioridades con otras parejas y respondan:
   - ¿Son iguales?
   - ¿En qué se basan las diferencias?

4. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades a continuación.

Mario quiere comprar un automóvil, por el que deberá pagar cuotas mensuales de $80 000 durante 2 años. Su sueldo líquido es $515 000 y los gastos del mes los anotó en la siguiente hoja:

GASTOS

- Servicios básicos $27 000.
- Celular $18 000.
- Arriendo $180 000.
- Almuerzo en el trabajo (lunes a viernes) $5 000 diarios.
- Comida sábado y domingo $3 500 diarios.
- Transporte de lunes a viernes $1 500 diarios.
- Recreación una vez por semana $15 000.
- Vestimenta $55 000 mensual.

a. Clasifica y ordena los gastos e ingresos de Mario. Considera un mes de 4 semanas.

b. Ingresa el código **T20M4MP115A** en el sitio www.enlacesmineduc.cl y elabora un presupuesto para Mario utilizando la calculadora que allí se presenta.

c. Analiza los resultados y contrástalos con las funciones del presupuesto de la actividad 3. Luego, responde:
   - De acuerdo con su presupuesto, ¿es conveniente la compra de un automóvil?
   - ¿Qué gastos no se consideraron en su presupuesto?
   - ¿Qué modificaciones podría realizar Mario a sus hábitos de consumo?

d. Formen grupos de tres integrantes y compartan las respuestas de la actividad c.
   - ¿Qué semejanzas observas en los presupuestos ajustados?
   - ¿Qué diferencias observas en los presuestos ajustados?

e. Construyan un nuevo presupuesto con las recomendaciones que ustedes les darían a Mario y vuelvan a analizar si es o no conveniente que adquiera un automóvil.

Actividad de aplicación Presupuesto de una gira de estudios en Sudamérica

¿Qué haremos? Elaborar el presupuesto para una gira de estudios de 10 días en algún destino.

Isla grande de Chiloé.

Desierto florido, Atacama.

Machu Picchu, Perú.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 integrantes. Cada grupo deberá escoger un lugar como los que se muestran en las fotografías u otros.

Paso 2: Investiguen en Internet sobre el destino escogido y respondan para elaborar de mejor forma el presupuesto y tomar decisiones.

- ¿Viajaremos en bus o en avión?
- ¿Necesitamos pasaporte o visa?
- ¿Hay que vacunarse?
- ¿Nos hospedaremos en una hostal o en un hotel?
- ¿Qué lugares visitaremos?
- ¿En qué época del año viajaremos?

Ejecutemos

Paso 3: Organicen la elaboración del presupuesto. Definan los plazos y la tarea de cada integrante del grupo para las siguientes categorías:

- Hospedaje
- Comida
- Transporte
- Entrada/Tours
- Souvenirs
- Seguro de viaje
- Dinero para emergencias

Paso 4: Elaboren el presupuesto en dólares para cada una de las categorías anteriores. Esto permitirá comparar con otros destinos usando el mismo tipo de moneda.

Presentemos

Paso 5: Pueden usar sus redes sociales para mostrar al resto del curso de forma creativa el presupuesto de su destino.
Luego, respondan.

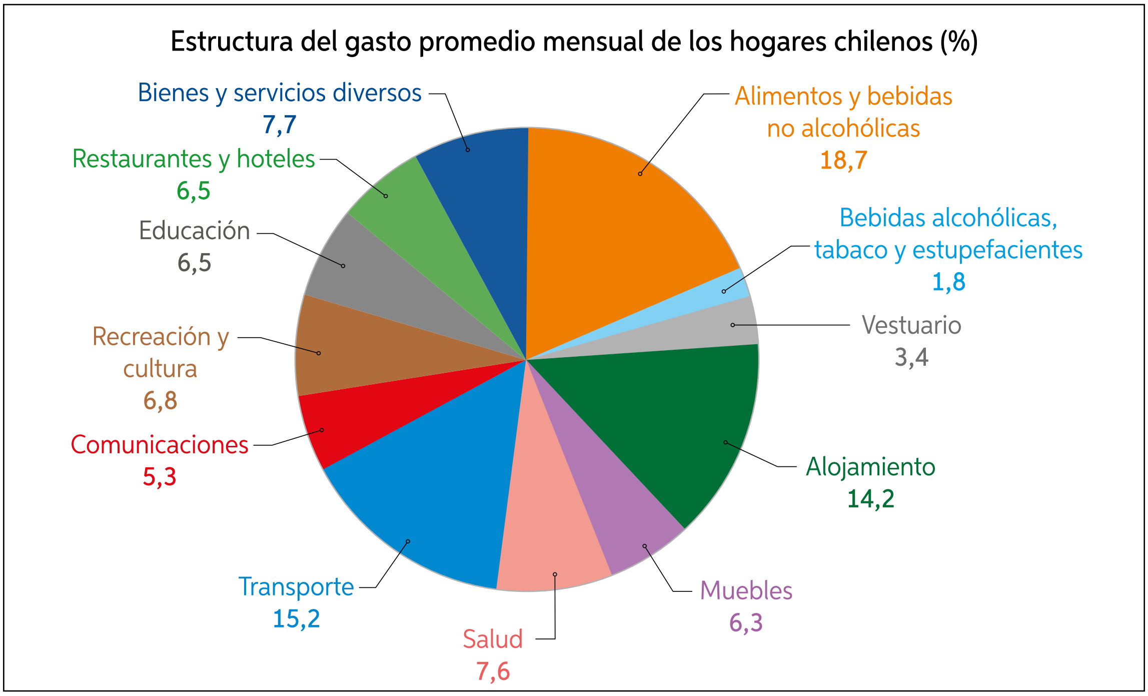
a. ¿Por qué eligieron ese destino?

b. ¿Qué otras categorías para el presupuesto tuvieron que considerar?, ¿por qué?

c. ¿Qué diferencias y semejanzas hay con los presupuestos de otros grupos?

d. Si tuvieran que elegir el presupuesto más económico de los presentados, ¿a qué destino correspondería?, ¿cuál sería el monto estimado del presupuesto?

5. La “Encuesta de Presupuestos Familiares” (EPF) es un estudio realizado a hogares urbanos que busca conocer las pautas de consumo y la estructura del gasto de la población, así como también información sobre sus ingresos. Los datos obtenidos en 2018 por la VIII EPF fueron los siguientes:



Fuente: Instituto Nacional de Estadísticas (INE). VIII Encuesta de Presupuestos Familiares (EPF).

a. Clasifica las categorías de la EPF en:

- Gastos fijos: vivienda, pago de préstamos, seguros, impuestos, etc.
- Gastos variables necesarios: alimentación, cuidado personal y familiar, educación y cuidado de hijos, suministros y transporte.
- Gastos variables no necesarios o discrecionales: ocio, regalos, compras personales, vacaciones, etc.
- Gastos imprevistos y ocasionales: reformas en el hogar, dentista, etc.

b. ¿Qué categoría tiene mayor representación porcentual en la EPF?

c. Compara los porcentajes descritos en este gráfico con la situación del gasto mensual de tu familia. ¿Son similares? Si son distintos, ¿dónde puedes observar las diferencias?

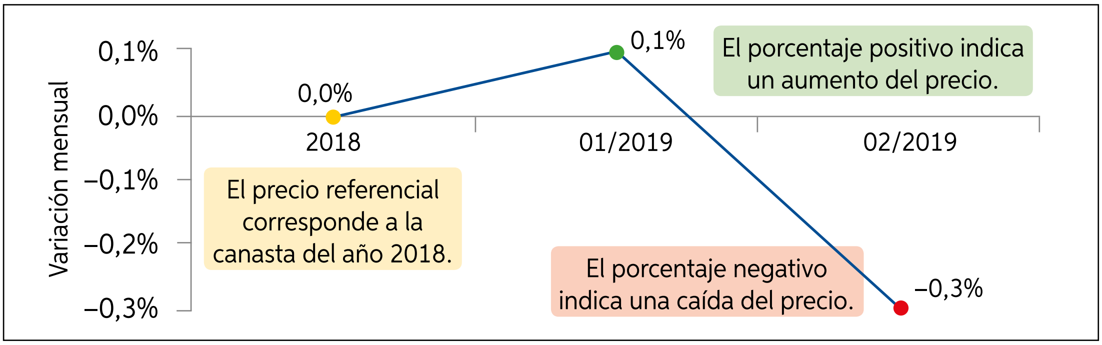
d. ¿Qué gastos crees que puedan ir en la categoría Bienes y servicios diversos?

e. Si una familia no tiene gastos de bebidas alcohólicas y tabaco, ¿en qué categoría(s) podrías distribuir ese dinero?

f. Investiga el valor del sueldo mínimo el Chile. Si una familia recibe como ingreso total dicho monto, ¿cuánto corresponde a transporte y alojamiento? ¿Te parece que una familia pueda sobrevivir con esas cantidades?

g. Considera nuevamente un ingreso familiar de $288 000 y calcula la cantidad destinada a alimentación diaria (considera un mes de 30 días). Si el grupo familiar consiste en un adulto y dos niños, ¿crees que esa cantidad les alcanza para una buena alimentación?, ¿de qué forma redistribuirías?

El **Índice de Precios al Consumidor (IPC)** es un indicador económico que mide la variación de precios de una canasta de bienes y servicios representativa del gasto de los hogares urbanos, cuya cobertura geográfica corresponde a todas las capitales regionales y sus zonas conurbadas dentro de las fronteras del país. El IPC se construye como un índice agregado de precios, cuyo comportamiento es relevante para comprender y entender la evolución de la variación de precios en la economía nacional.



Fuente: www.ine.cl

- ¿Qué utilidades tiene el IPC? Investiga.
- ¿Crees que es importante el IPC para organizar un buen presupuesto familiar? ¿Por qué?

6. Los gastos de una familia fueron \$750 000 al mes durante el año pasado. Si el grupo familiar tiene dos fuentes de ingreso: el hermano mayor con \$732 000 y la madre con \$951 000, determina:
   a. ¿Cuánto dinero son capaces de ahorrar mensualmente?
   b. ¿Cuánto deberían ser los gastos de este año si quisieran mantener el mismo nivel de vida y el IPC ha subido 5,5 % con relación al año pasado? ¿En cuánto disminuirá su capacidad su ahorro?
   c. El sueldo de la madre se reajusta todos los años en enero de acuerdo con el IPC. Si su empleador decide subirle el sueldo en 8 % sobre el IPC del 5,5 %, ¿a cuánto y en qué porcentaje aumentará finalmente el sueldo de la madre?

7. Selecciona 3 artículos de consumo común, busca sus precios en 3 plataformas de venta en línea y determina el promedio del precio de cada artículo. Luego, ingresa el código **T20M4MP118A** en www.enlacesmineduc.cl y actualiza los precios a enero de este año y a enero del año pasado.

8 a 10

Para concluir

a. Durante un mes específico el IPC fue −0,8 %.
   - Explica el significado de ese índice.
   - Si un kilogramo de pan cuesta \$850, ¿cuál será su precio si se aplica ese IPC?

b. ¿Qué ventajas y desventajas crees que tiene el IPC? Comenta en grupos. Luego, contrasta tu respuesta con la que se expone en distintos medios.

Remuneraciones y descuentos legales

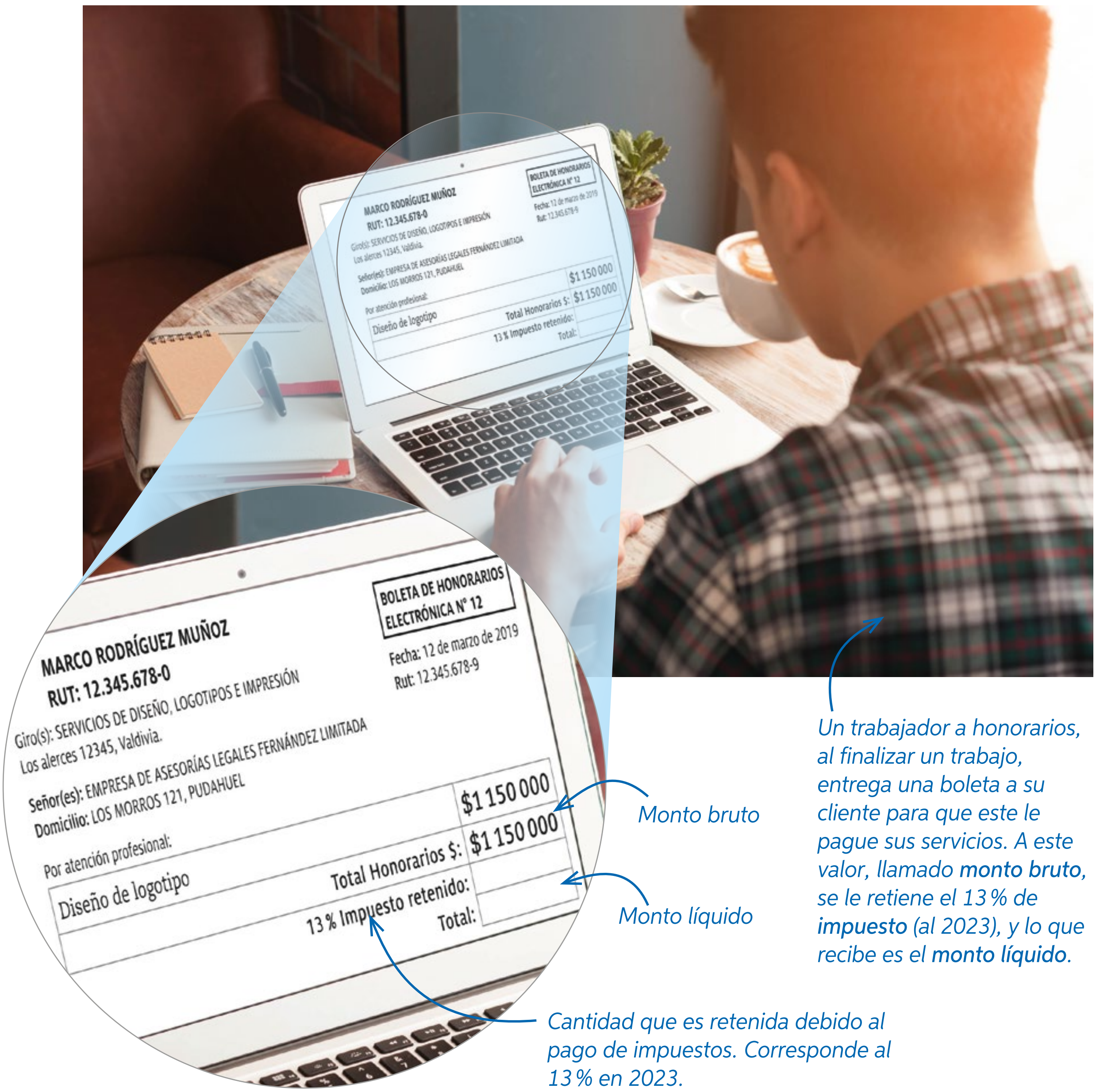
Objetivo: Analizar cantidades porcentuales presentes en boletas de honorarios y liquidaciones de sueldo.

¿Qué sabes de las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP)?

¿Qué sabes de las Isapres?, ¿y de FONASA?

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Marco es trabajador independiente y presta servicios de diseño de logotipos e impresión a una empresa de asesorías legales, por los cuales se le paga un monto bruto de $1150 000. Para que se curse su pago a fin de mes, debe emitir la siguiente boleta de honorarios:



a. ¿Cuál es el monto líquido que recibirá Marco?

b. Si Marco quiere recibir un monto líquido de $1 150 000, ¿cuánto debería cobrarle como monto bruto a la empresa?

El **trabajo independiente** es aquel en el cual la remuneración del trabajador depende directamente de los bienes producidos o los servicios entregados al empleador, sin que exista entre ellos ninguna relación de dependencia que caracteriza al mundo laboral asalariado. En Chile, los trabajadores independientes cobran sus remuneraciones a través de **boletas de honorarios**.

A partir de 2019, están obligados a cotizar los trabajadores independientes que emiten boletas de honorarios por un monto bruto anual igual o superior a 5 ingresos mínimos mensuales, excepto quienes están a 10 años de jubilar.

- ¿Qué trabajos independientes que se realicen en la sociedad conoces? Nombra 3.
- ¿Qué significa que los trabajadores deben cotizar? Averigua.

2. Observa la siguiente liquidación de sueldo de un trabajador dependiente con contrato indefinido. Luego, responde.

*Son los ingresos que el trabajador percibe por concepto de sueldo y gratificación (remuneraciones) y están **afectos** a cotizaciones previsionales: AFP, Salud y Seguro de Cesantía.*

Descuento obligatorio por fondo de pensión y comisión de AFP.

Descuento por fondo de salud.

Descuento por impuesto a la renta. En este caso, Javier está exento.

Constructora Oliva S.A.
Rut: 11111111-1
San Francisco 088

Remuneración
Enero 2019

Liquidación de remuneraciones

Nombre: Javier Alejandro Muñoz Quiroga — Rut: 5.555.555-5
Cargo: ayudante de carpintero — Fecha de ingreso: 01-01-2016
Ubicación: San Francisco
Días trabajados: 30

Detalle	v.o	Haberes	Descuentos
HABERES AFECTOS			
Sueldo base	500 000	500 000	
Gratificación		114 000	
DESCUENTOS LEGALES			
10,77 % Cotización AFP sobre: 614 000			66 128
7 % FONASA			42 980
Seguro de cesantía (0,6 % de la renta imponible)			3684
Exento de impuesto			
Totales		614 000	112 792
Líquido a pagar:		**$501 208**	

Renta imponible: corresponde al total de haberes afectos a descuentos previsionales.

a. Si Javier se cambia de AFP a una que le descuenta 10,2 %, ¿cuál será su sueldo líquido a fin de mes?, ¿en qué porcentaje variará?

b. ¿A cuánto corresponderá el descuento por seguro de cesantía si recibe un aumento de $25 000 en su sueldo base?

3. Lee la siguiente información. Luego, realiza lo pedido.

Existe una tabla, publicada anualmente por el Servicio de Impuestos Internos, que muestra las tasas de impuestos efectivas que se deben aplicar a los diferentes montos de renta imponible por concepto de impuesto a la renta. Ingresa el código **T20M4MP121A** en www.enlacesmineduc.cl. Identifica en qué tramo de renta se encontraría si su sueldo base aumentara en $150 000. Luego, multiplica su nuevo sueldo por el factor correspondiente y resta la cantidad a rebajar. ¿A cuánto corresponde el descuento de segunda categoría de su remuneración?

Un **trabajo dependiente** es aquel en el que existe un vínculo contractual entre empleador y empleado, que establece derechos y obligaciones para ambos, y en el cual el empleado asume una relación de subordinación y dependencia a cambio de una remuneración. Los trabajadores dependientes tienen los siguientes descuentos obligatorios:

- **Fondo de salud**: equivalente al 7 % de las remuneraciones y que el trabajador puede decidir si lo destina a una institución de salud previsional (ISAPRE) o al Fondo Nacional de Salud (FONASA).
- **Fondo de pensión**, depositado en una administradora de fondos de pensiones (AFP): equivale al 10 % destinado a este fondo más un porcentaje de comisión para la AFP por administrar los fondos.
- **Descuento por seguro de cesantía**: corresponde a un porcentaje que se aplica sobre la renta imponible. En el caso de los trabajadores con contrato indefinido, se descuenta el 0,6 %.
- **Impuesto a la renta**: se calcula según la tabla vista en la actividad 3, publicada anualmente por el Servicio de Impuestos Internos (SII).

¿Cuáles crees que son las ventajas y desventajas de un trabajador independiente?, ¿y las de un trabajador dependiente? Discútanlo en parejas.

4. Observa la imagen y analiza la situación. Luego, responde.

Marcia presta servicios a honorarios a una empresa que confecciona manteles.

Si deciden contratarla, ofreciéndole un sueldo base de $550 000 y una gratificación de $110 000, ¿qué opción le conviene económicamente a Marcia: seguir trabajando como independiente o ser contratada por la empresa? Justifica tu respuesta.

Para concluir

a. En este tema se trabajaron varios conceptos relacionados con el ámbito laboral. Elaboren de manera colaborativa un glosario de los términos económicos estudiados durante el tema.

b. De lo estudiado en este tema, ¿qué fue lo más difícil?, ¿y lo más fácil? Justifica tu respuesta.

11 y 22

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que conozcas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. ¿Qué oferta escogerías en esta situación? Fundamenta tu respuesta.

2. Ernesto quiere cambiar en un banco que cobra un 1 % de comisión un total de 800 euros en yenes japoneses. En la imagen se muestran los valores de compra y venta.
   a. ¿Cuántos yenes recibe Ernesto?
   b. Si Ernesto cambiara inmediatamente los yenes a euros, ¿cuántos recibiría?
   c. ¿Cuál es la comisión total en euros resultante de esta doble transacción?

3. Los ingresos de una familia fueron $870 000 al mes durante el año pasado. ¿Cuál debiese ser el ingreso mensual este año para mantener el mismo nivel de vida si el IPC ha subido 2,7 % con relación al año pasado?
4. Imagina que realizarás un paseo junto a tu familia por uno o dos dias a algún lugar (por ejemplo, a la playa, al campo, a un camping, etc.). Realiza una lista de lo que necesitas y el dinero que estimas que gastarás. Luego, responde.
   a. ¿Qué consideraste para repartir el dinero entre lo que necesitas comprar? Explica.
   b. Observa la lista de lo que comprarás: Llevas solo lo necesario o hay algo que puedes evitar comprar?

Reflexiono

13

- Lee las definiciones de conceptos financieros utilizados dentro de la Lección y construye un esquema para reforzar los contenidos débiles.
- ¿Cómo podrías mejorar tu aprendizaje de la lección? Crea un plan y compártelo con un compañero. Evalúa sus sugerencias y corrígelo

Lección

2

Toma de decisiones aplicando tasas de interés compuesto

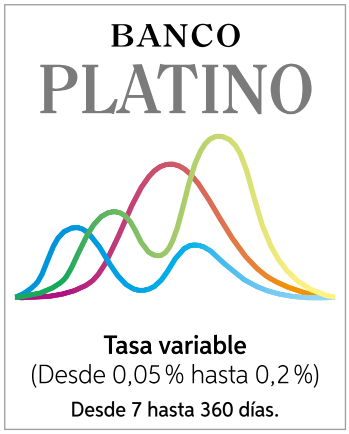
Ahorro e inversiones

Objetivo: Analizar situaciones que involucren productos financieros de ahorro considerando la rentabilidad y el tiempo.

¿Qué instrumentos de ahorro conoces?, ¿qué necesitas para contratarlos?

¿Qué factores personales influyen en el ahorro?

1. Observa los siguientes anuncios. Luego, realiza las actividades.



a. ¿Qué instrumentos financieros conoces de los anuncios mostrados?, ¿qué información entrega cada uno?

b. Discutan en parejas: ¿cuál de las ofertas entrega más información?, ¿cuál entrega menos?

c. Discutan en grupos de 4 personas: ¿hasta cuánto dinero dejarían en cada una? Fundamenten su respuesta.

El ahorro y la inversión son operaciones financieras que involucran la postergación de un dinero en el presente por la probabilidad de obtener un beneficio mayor a futuro. En general, se lo pone a disposición de una empresa financiera, como un banco, con la finalidad de que el monto se incremente con las ganancias que genere. Algunos de los conceptos financieros asociados son los siguientes:

- **Rendimiento esperado o rentabilidad**: monto que esperamos obtener de nuestra inversión. Se suele medir como porcentaje de la cantidad invertida.
- **Riesgo**: variable subjetiva que se refiere a la posibilidad de que no se recupere el dinero invertido, es decir, la incerteza sobre el rendimiento.

Los ahorros tienen un riesgo casi nulo, es decir, existe una alta probabilidad de que el beneficio sea el esperado. Además, tienen una rentabilidad más baja que las inversiones, cuyo riesgo y rentabilidad depende del producto invertido.

Lee la siguiente afirmación: "No existen rentabilidades altas y fijas sin riesgo asociado". ¿Cómo se aplica esto a los anuncios del inicio de la actividad 1?

Llamaremos capitalización a la proyección de un monto en el futuro con un interés dado. Por ejemplo, una inversión de un monto de $100 000 que tiene una rentabilidad del –5 % el primer mes, y del 10 % el mes siguiente, se capitalizará mensualmente de la siguiente forma:

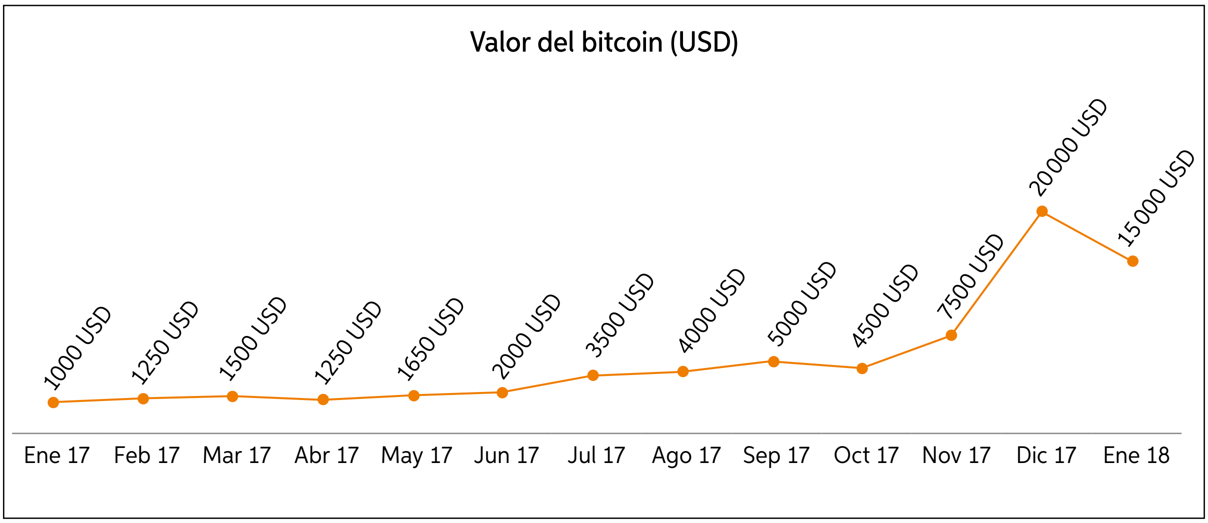
	Mes 1	Mes 2
$\$100\,000 \xrightarrow[\cdot\, 0{,}95]{-5\,\%}$	$\$95\,000 \xrightarrow[\cdot\, 1{,}1]{10\,\%}$	$\$104\,500$

Lo anterior es equivalente a la multiplicación del monto inicial por 0,95 y por 1,1, es decir 1,045; o bien a la capitalización del monto inicial con una rentabilidad del 4,5 %.

En general, tendremos que un monto inicial D capitalizado en periodos de distintos intereses $i_1, i_2, \ldots, i_n$ será equivalente a capitalizarlo por la totalidad del periodo bajo un rendimiento i_f, que es el producto de los intereses parciales. El monto final M será $M = D \cdot (1 + i_f)$.

2. A partir del gráfico del valor del bitcoin, responde:

El bitcoin es un tipo de divisa digital.



a. ¿Cuál fue la rentabilidad final de todo el periodo?

b. Se compró 1 bitcoin en enero de 2017 y se lo vendió en diciembre de 2017. Ignorando las tarifas y comisiones, ¿cuál fue el rendimiento de la inversión? ¿Cuántos dólares se ganaron?

c. ¿Cuántos dólares, ignorando las tarifas y comisiones, se perdieron si se compró 1 bitcoin durante diciembre de 2017 y se lo vendió en enero del 2018?, ¿cuál fue el rendimiento de la inversión?

d. Demuestra que el rendimiento final de la inversión es equivalente a la multiplicación de los rendimientos entre periodos de meses continuos.

¿Calificarías los bitcoins como riesgosos? Justifica tu respuesta.

3. Analiza las siguientes ofertas y responde:

Recuerda que el reajuste al capitalizar un monto se realiza al terminar el periodo.

a. ¿Cuántas veces debe capitalizarse cada oferta para que un monto de \$1 000 000 se convierta al menos \$1 020 000?, ¿y en \$1025 000?

b. Una de las ventajas de los depósitos a plazos es la posibilidad de retirar el dinero antes de terminar el periodo pactado, sin embargo, no generará intereses. Si se necesita retirar el dinero luego de 3 meses, ¿cuál de las ofertas de depósitos a plazo resulta más conveniente? (Considera un mes de 30 días)

c. Si se tiene la certeza de que el dinero no se necesitará durante el periodo de un año, ¿cuál oferta resulta mejor? (Considera un año como 360 días)

¿Qué criterios utilizarías para decidir personalmente en qué opción ahorrar?

4. Se realizan depósitos periódicos mensuales de \$10 000 durante 3 meses a una tasa de interés fija del 4 % mensual, como se observa en el siguiente esquema:

Primer mes		Segundo mes		Tercer mes
\$10 000	4 % →	\$10 000	4 % →	\$10 000
		\$10 400	4 % →	\$10 400
				\$10 816

a. Transforma los depósitos finales en multiplicaciones del monto depositado por los intereses generados en el periodo.

b. ¿Cuántas veces se capitalizó cada monto? ¿Cómo se relaciona la cantidad de veces que se capitaliza con el mes en el que se realizó el depósito?

c. ¿Cuál es el monto final obtenido? ¿A cuántas veces corresponde el monto depositado mensualmente?

Actividad de aplicación Comparando productos de ahorro

¿Qué haremos? Comparar las distintas formas de ahorro

Planifiquemos

Paso 1: En grupos de 3 o 4 integrantes, determinen qué tipo de instrumento de ahorro van a comparar.

Investiguemos

Paso 2: Investiguen en distintas instituciones las opciones de ahorro que ofrecen. Pueden utilizar distintos canales de comunicación con distintas instituciones financieras, como sus redes sociales. Elaboren algunas preguntas iniciales, por ejemplo:

- ¿Qué diferencia este instrumento de ahorro de los otros?
- Si tengo una emergencia, ¿puedo contar con ese dinero?
- ¿Cuál es la frecuencia de su capitalización?
- ¿Cuál es la rentabilidad?
- ¿Cuándo puedo recuperar mi dinero?
- ¿Debo cumplir algún requerimiento para cada producto?
- Incluyan, además, algunas dudas personales o grupales.

Analicemos

Paso 3: Ingresen a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP126A** y utilicen el simulador para analizar las opciones de ahorro. Compárenlas considerando un mismo monto y tiempo para determinar cuál es más conveniente.

Paso 4: Elaboren una presentación que muestre sus conclusiones respecto de qué opción es más conveniente. Incluyan las preguntas que plantearon al comenzar su investigación.

Algunas instituciones ofrecen productos orientados al financiamiento de la educación, como cuentas de ahorro para estudio.

Otros ejemplos son los depósitos a plazo fijo.

Para concluir

a. ¿Cuál de todos los criterios que utilizaste en este tema para definir cuándo una opción es mejor que la otra te parece más importante?

b. El ahorro informal corresponde a guardar dinero sin generar intereses. ¿Qué ejemplo de esto conoces? ¿De qué forma afectaría una inflación positiva de un 1 % mensual a un monto ahorrado informalmente durante 1 año?

14 y 15

Créditos

Objetivo: Comparar situaciones que involucren productos financieros de crédito.

¿Qué tipos de instrumentos crediticios conoces? ¿Todos tienen los mismos usos?

¿Por qué las personas tienen que comprar en cuotas algunos productos?

1. En parejas, analicen la siguiente información y realicen las actividades.
Pedro consideró las siguientes opciones de financiamiento para comprar el televisor que se muestra a continuación:

a. ¿Qué diferencia tienen los medios de pago anteriores?
b. ¿Cuánto suman en total las cuotas de cada medio de pago?
c. ¿Cómo relacionarías el indicador de CAE en estas ofertas?
d. Si tú realizaras la compra, ¿qué opción escogerías?, ¿con qué criterio?

Un **crédito** es una operación financiera mediante la cual una institución otorga un préstamo a una persona por una cantidad de dinero determinada, que corresponde a la solicitada más los gastos operacionales (**monto bruto**). La persona se compromete a devolver el **costo total del crédito**, es decir, el monto bruto más los intereses en un tiempo determinado. Un crédito tendrá los siguientes elementos:

Cuota mensual: *monto que el consumidor se compromete a pagar mensualmente.*

Tasa de interés*: relación que existe entre el interés y el monto prestado.*

Simulación de crédito	
$1 000 000 en 48 cuotas	
Monto bruto	$1 119 311
Valor de la cuota	$38 581
CAE	33,78 %
Tasa interés mensual	2,24 %
Costo total del crédito	$1 851 866

Carga Anual Equivalente (CAE)*: indicador porcentual, que incluye los intereses, gastos y seguros asociados al crédito expresados en forma anual. Permite comparar en forma objetiva el costo del crédito entre entidades.*

Una CAE más cercana a 0 significa que financieramente la alternativa es mejor.

Costo Total del Crédito (CTC)*: valor final que se va a pagar por el crédito, es decir, el monto de dinero prestado más todos los costos asociados, como intereses, comisiones, impuestos y seguros.*

En cada **cuota**, pagaremos los **intereses** generados por el capital adeudado del periodo anterior. Al monto restante, destinado a reducir el capital aún adeudado, lo llamaremos **amortización**. Tendremos que cada cuota se divide en:

Amortización + Intereses = Cuota

Existen varios planes para reducir una deuda. El método más utilizado de amortización corresponde al "francés", en el cual el valor de la cuota es fijo, la cantidad amortizada aumenta en el tiempo y los intereses generados disminuyen.

Llamaremos **actualización** o **descuento** a la proyección de un monto equivalente M en n periodos previos con un interés i de una cuota C:

$$M = C \cdot (1 + i)^{-n}$$

2. Simulando el pago en 3 periodos de un crédito de $120 000 con un interés del 10% por periodo, obtenemos tres cuotas de $48 253,78 cada una.

A cada cuota se le aplica un 10% de interés hasta que es pagada.

	Cuota 1	Cuota 2	Cuota 3	Adeudado	Por pagar
Hoy	$43 867,07	$39 879,16	$36 253,78	$120 000,00	$120 000,00
Mes 1	$48 253,78	$43 867,07	$39 879,16	$132 000,00	$83 746,22
Mes 2	PAGADA	$48 253,78	$43 867,07	$92 120,85	$43 867,07
Mes 3	PAGADA	PAGADA	$48 253,78	$48 253,78	$0

a. ¿Cuál fue el costo total del crédito?
b. ¿Cuántos fueron los intereses generados, en pesos, por el monto adeudado en cada periodo? ¿Cuánto suman?
c. ¿Cuál fue la cantidad amortizada en cada pago? ¿Cuánto suman las amortizaciones?
d. ¿Qué relación existe entre la suma de las amortizaciones, el costo total del crédito, los intereses y el monto otorgado por el crédito?
e. ¿Cuántas veces se debe actualizar cada cuota para obtener su valor al día de hoy?

3. En parejas, discutan y justifiquen en su cuaderno si las siguientes ideas relacionadas con los créditos son correctas o incorrectas.

- Comprar a crédito es igual que comprar en efectivo, pero aplazando el pago.
- Un crédito no es dinero extra, sino dinero de nuestros ingresos futuros.
- Un crédito no es gratis. Por el servicio hay que pagar intereses y comisiones.
- Es nuestra responsabilidad saber cuánto podemos pagar cada mes y cumplirlo.

4. En parejas, lean la siguiente información y realicen las actividades.
Las tarjetas de crédito corresponden a un tipo de crédito llamado "rotativo", mediante el cual el banco presta hasta una cantidad máxima de dinero (cupo), pero los intereses generados corresponden solo a la cantidad actualmente adeudada. Además, incluyen gastos como la operación o mantención mensual.

Intereses: 0,175 % diario.
Mantención: $2500 mensual.

Intereses: 0,2 % diario.
Mantención: Sin mantención.

a. Construye una planilla de cálculo para ilustrar día a día la evolución durante los primeros 30 días de una deuda de $300 000 sin cuotas en ambas tarjetas. Agrega la mantención de ellas al finalizar los 30 días. Analicen cuál de las dos tarjetas es más conveniente y por cuánto.

¿Qué estrategia utilizaste para crear la planilla?

b. De manera similar, realicen una simulación para $340 000 pagándolos luego de 30 días. ¿Cuál de las dos tarjetas es más conveniente y por cuánto?
c. Determinen el valor aproximado en el que ambas tarjetas generan la misma deuda pagada a 30 días. ¿Para qué montos es mejor cada una?, ¿cuál de las dos tarjetas es más conveniente?

5. En parejas, analicen las siguientes opciones de financiamiento y realicen las actividades.

Crédito
AUTOMOTORA
PETER LTDA

- Máximo $7 000 000.
- 24 cuotas con un interés mensual del 1,5%.
- Gastos adicionales: $120 000.

¡NUEVO! Gran Xubi
0 km $7 400 000

Crédito personal bancario

- Financiamos la totalidad de su vehículo
- 24 cuotas.
- Interés mensual del 1 %.
- Gastos adicionales: $180 000.

a. Ingresen el código **T20M4MP129A** en www.enlacesmineduc.cl y utilicen el simulador para analizar las ofertas. ¿Según qué criterio es mejor cada opción?
b. ¿Cuál de las dos opciones de financiamiento considerarían ustedes como la más conveniente?, ¿consideran el valor del pie como un impedimento en este caso?
c. ¿Cómo explicarían la relación de la CAE con los valores pedidos y obtenidos en la simulación?

Si el tiempo de las cuotas hubiera sido distinto, ¿sería un criterio válido para determinar la mejor oferta?

Actividad de aplicación

Descuentos y créditos

¿Qué haremos? Comparar las distintas formas de pago en el comercio.

Pueden utilizar publicidad en revistas o diarios y páginas webs de distintas casas comerciales.

Planifiquemos

Paso 1: En grupos de 3 o 4 integrantes, busquen ofertas o productos que requieran el pago en cuotas mediante tarjetas de crédito o similares. Seleccionen una y anoten su precio en oferta y su precio normal.

Paso 2: Investiguen todos los cargos en los que incurrirán en la compra y no se encuentran explícitos, como la mantención de la tarjeta.

Comparemos

Paso 3: Analicen si la oferta es conveniente para 3, 6, 12 o 24 meses. Justifiquen considerando criterios como costo total del crédito, valor de las cuotas y tiempo.

Paso 4: Simulen cuánto tiempo demorarían en comprar el producto ahorrando mensualmente el valor de la cuota en cada caso (sin generar intereses).

Presentemos

Paso 5: Realicen un afiche que resuma sus conclusiones. Incluyan:

- ¿Qué oferta y producto escogieron?
- ¿Qué gastos no se encuentran explícitos?
- ¿Cuál es el costo total de la oferta para cada caso?
- ¿En qué casos consideraron más conveniente ahorrar el monto de la cuota?

Precio normal: $479 990

Para concluir

a. ¿Es siempre fácil distinguir la mejor decisión financiera?

b. ¿Qué factores creen que llevan a una persona a tomar una “mala decisión” financiera?

c. Discutan en grupo: ¿para qué tipo de necesidades ahorrarían y en qué situaciones pagarían con crédito?

16 y 17

Antes de continuar

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Un banco tiene la siguientes opciones para pagar una deuda de $500 000:

Opción 1

Crédito personal:

- Monto otorgado: $500 000
- Monto bruto: $515 000
- Tasa de interés mensual: 2,5 %
- 3 cuotas de $180 320

Opción 2

Tarjeta de Crédito

- Monto facturado próximo periodo: $500 000
- Tasa de interés mensual: 3 %
- Mantención mensual: $2000

   a. Si se decide pagar la tarjeta junto con la mantención en montos de $183 667 el primer mes, $178 667 el segundo y $173 666 el tercero, ¿cuánto se pagará por los intereses y mantención generados en esta opción?
   b. ¿Cuál es el costo total si se eligiera el crédito personal? ¿Cuánto se pagará en intereses y gastos legales?
   c. ¿Cuál opción genera menores intereses? Justifica tu respuesta.
   d. ¿Cuál opción es mejor considerando el costo total? Justifica tu respuesta.

2. Lee la información y responde:

   El "ahorro informal" consiste en guardar dinero sin generar intereses. Sin embargo, debido a la inflación, los precios de todos los artículos suben constantemente. Si la inflación mensual es positiva, podemos expresar la devaluación del monto como el interés $-\frac{i}{1+i}$. Si la inflación mensual fue constante e igual al 1 % durante un año:

   a. ¿Cuál es el interés equivalente de dicha tasa de inflación?
   b. ¿En cuánto se devaluará un monto de $100 000 luego del año?
   c. Explica la inflación a partir de la capitalización de un monto.

3. Francisca decide ahorrar, para la educación de su hijo, $55 000 mensuales. Para eso, abre una cuenta de ahorro en un banco que le ofrece un interés anual del 3,5 %. Si su hijo hará uso de ese dinero dentro de 3 años:

   a. ¿Cuánto dinero ahorrará durante un año?
   b. ¿Cuántas veces se capitalizará cada ahorro?, ¿cuál será el monto final?
   c. ¿Cuál fue el monto generado por los intereses?

18

Reflexiono

- De los temas de la Lección, ¿de cuál te gustaría saber más? Fundamenta e investiga la Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (SBIF).
- ¿En qué consideras que te ayuda la educación financiera? Explica por qué.
- Considerando tu desempeño en la evaluación anterior, ¿en cuáles actividades presentaste mayor dificultad?, ¿qué podrías hacer al respecto? Explica.

Síntesis

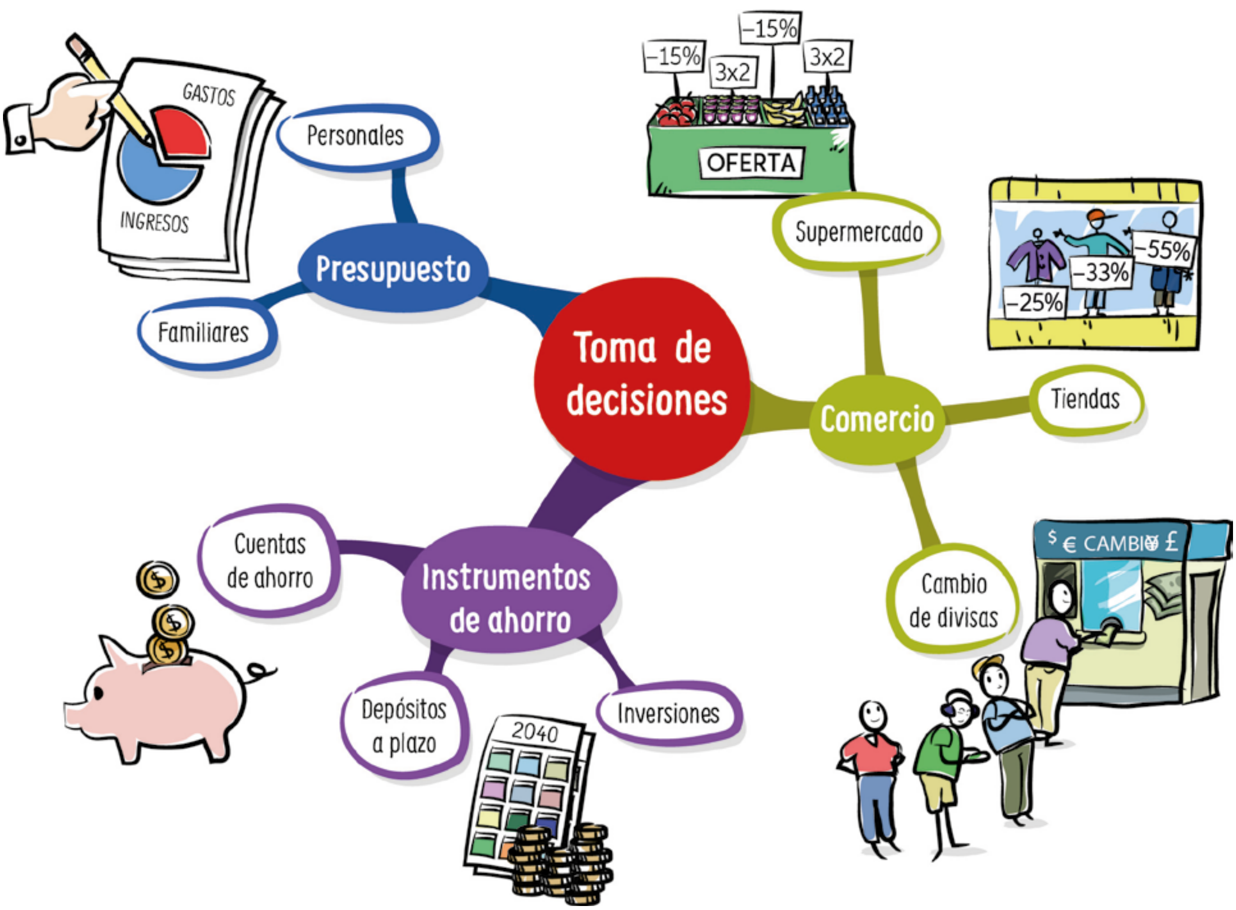
Lee atentamente la información y realiza lo solicitado.

¿Qué es un mapa mental?

Un mapa mental es un organizador visual que permite organizar la información o los conceptos. Parte de una idea central, la más importante o general, alrededor de la cual se van situando las ideas secundarias o los conceptos más concretos y las relaciones que se establecen entre sí. Algunos tips para realizar un mapa mental son:

- Expresa cada concepto con una sola palabra y un dibujo representativo.
- Une las ideas o conceptos con líneas curvas.
- Utiliza distintos colores para cada idea o concepto.

A continuación, se presenta un mapa mental con algunos de los conceptos estudiados en la Unidad.



Ahora, hazlo tú

1. Escoge una lección de la Unidad y sintetiza lo estudiado mediante un mapa mental.
2. Comparte con tu curso el mapa mental que elaboraste y responde:
   - ¿Qué aspecto consideró cada uno para su creación?
   - ¿Qué diferencias y semejanzas observas en los diferentes mapas mentales?

Repaso

Realiza las siguientes actividades:

Lección 1: Toma de decisiones aplicando porcentaje.

1. Una productora anuncia una promoción en Internet en su venta de entradas para el próximo evento.

Si Claudia quiere comprar 4 entradas, ¿qué opción le permite gastar menos?

2. Imagina que estás a cargo del paseo de fin del año de tu curso. Elabora un presupuesto sabiendo que han reunido a lo largo del año $500 000 mediante diversos eventos y responde:
   a. ¿Qué gastos consideraste en tu presupuesto?
   b. ¿Qué criterios utilizaste para destinar el dinero a cada tipo de gasto? Explica.

3. Francisco tiene 59 años y es profesor de Música. Si cobra $75 000 por revisar la planificación de un taller y un instituto de música lo contrata a través de honorarios para que revise 5 planificaciones:
   a. ¿Cuánto será el monto líquido que recibirá por este trabajo?
   b. Si quiere que sus ingresos líquidos aumenten en 10 %, ¿cuál es el monto bruto que debería cobrar por cada revisión de planificación?

Lección 2: Toma de decisiones aplicando tasas de interés compuesto.

4. Marcia quiere depositar $350 000 en el banco durante 1 año. El banco le ofrece las siguientes opciones:

   Opción 1: Ahorro con tasa de interés compuesto de 3 % semestral.

   Opción 2: Depósito a plazo fijo mensual renovable con una tasa de interés de 0,5 % (considerando 1 mes como 30 días).

   ¿Con cuál de las alternativas anteriores obtiene mayor ganancia al cabo de 1 año si no realiza giros durante dicho periodo? Justifica tu respuesta.

¿Qué aprendí?

Lee atentamente la información y realiza lo solicitado.

1. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

   Durante abril, 3 compañías de telefonía móvil ofrecen las siguientes ofertas en sus planes:

Compañía A

Plan 13 GB
Habla hasta 250 minutos (a cualquier compañía)
$10 900
Precio normal del plan: **$14 000**

Compañía B

Plan 9 GB
Habla hasta 450 minutos (a cualquier compañía)
$11 330
Precio normal del plan: **$14 400**

Compañía C

Plan 15 GB
Habla hasta 150 minutos (a cualquier compañía)
$10 650
Precio normal del plan: **$13 800**

La tabla siguiente muestra el precio por GB extra durante la oferta en cada una de las compañías.

Compañía	A	B	C
Precio GB	$838	$1259	$710

a. ¿Cuál de las compañías anteriores ofrece el mayor descuento con respecto a los precios normales de sus planes? Exprésalo en porcentaje.

b. Juan quiere contratar un plan que le ofrezca el menor precio por minuto. Si suele utilizar el máximo de minutos y de GB, ¿qué compañía debería escoger? ¿Por qué? Explica qué estrategia utilizaste para responder.

c. La compañía A rebaja aún más el precio de su plan, aplicando 10 % de descuento al precio de oferta. Si las compañías B y C quieren igualar el precio por GB extra con la compañía A, ¿en qué porcentaje deberán variar el precio por GB extra considerando su propio precio de oferta?

2. La lista muestra las compras realizadas por Marcelo en enero para un fin de semana de camping con sus amigos.

- 4 L de jugo: $2440
- 2 kg de tomates: $2380
- 3 paquetes de fideos: $1980
- 1 kg de limones: $1890
- 1 caja de té: $610
- 2 kg de carne: $15 640
- 3 kg de manzana: $2290
- 2 kg de pan: $1980
- ½ kg de azúcar: $370
- 3 lechugas: $2190

a. Al comprar por Internet, cada producto tiene 3 % de descuento, pero el cobro por el despacho de productos es $3990. ¿Qué tipo de compra le conviene realizar a Marcelo?

b. A fines de marzo, Marcelo repitió la salida y realizó las mismas compras. ¿Cuánto pagó si el IPC entre los meses de enero y marzo fue de 0,7 %?

3. Pedro está interesado en estudiar fotografía al egresar del colegio y desea comprar su primera cámara. Dos tiendas venden el mismo modelo:

Tienda A

Tienda B

a. ¿Qué significa el valor de la CAE en ambas ofertas? Explica.

b. Si Pedro quiere comprar la cámara, ¿en qué tienda le conviene hacerlo para pagar lo menos posible en interés? Justifica tu respuesta.

4. Marcela asiste a una entrevista de trabajo.

a. Si Marcela acepta el contrato, ¿cuál será su sueldo líquido a fin de mes? Considera un descuento de AFP del 10,6 % y FONASA del 7 %.

b. Una isapre le ofrece un plan de 3,25 UF mensuales (monto UF considerado: $26 713). Marcela decide cambiarse siempre y cuando el sueldo líquido que reciba no disminuya más del 5 %. ¿Se cambiará de isapre? Explica.

5. Claudia quiere realizar un depósito anual de $2 000 000. Las opciones que tiene son:

Banco Seguridad
Interés de 0,7 % semestral por depósitos anuales.

Banco Confianza
Interés de 0,07 % bimestral por depósitos anuales.

a. Al cabo de un año, ¿cuál es la ganancia que obtendría Claudia al depositar en cada banco?

b. ¿En cuál de ellos le conviene depositar su dinero?, ¿por qué? Argumenta tu respuesta.

Reflexiono

- ¿Tuvieron buenos resultados tus planes de mejora propuestos en las evaluaciones anteriores? ¿A qué crees que se debe? Explica.
- ¿Qué criterios utilizaste para tomar decisiones financieras durante la Unidad?, ¿cómo te ayudo esta Unidad a aplicarlos en tu vida cotidiana?

P ¿Qué aprendizajes de la Unidad te ayudaron en la realización del proyecto? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

Unidad 2

MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR Y PREDECIR

Álgebra y funciones

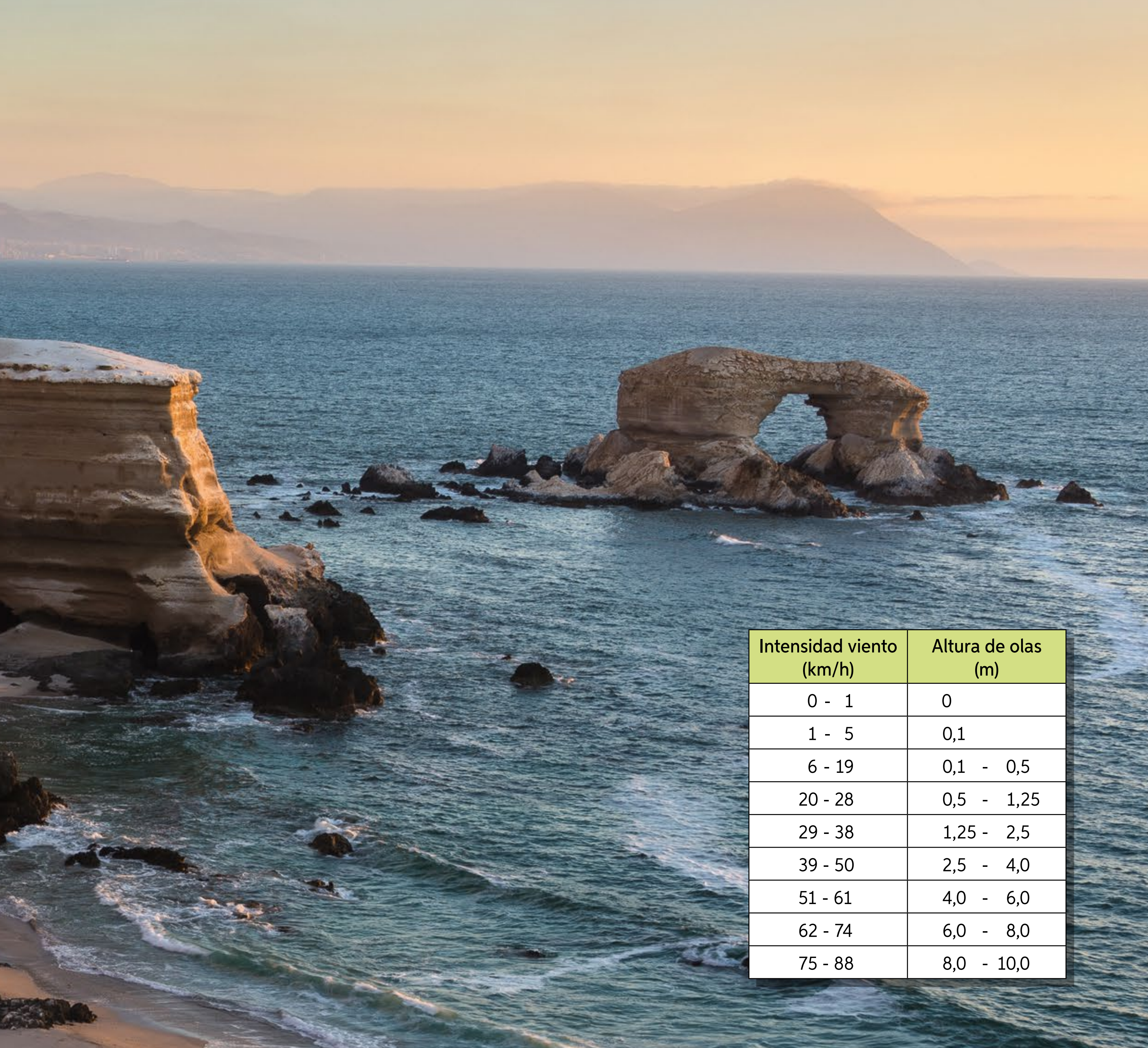
Observa la imagen. Luego, comenta con tu curso.

1. ¿Qué te llama la atención de la marea en la imagen?
2. ¿Crees que es posible predecir cuánto subirá la marea o el alto promedio de las olas?
3. ¿Cada cuántos días u horas se espera marea baja?
4. ¿Cómo se relacionan la velocidad del viento y el alto de las olas?
5. ¿Qué fenómenos naturales crees que se pueden predecir?, ¿cuáles son impredecibles?

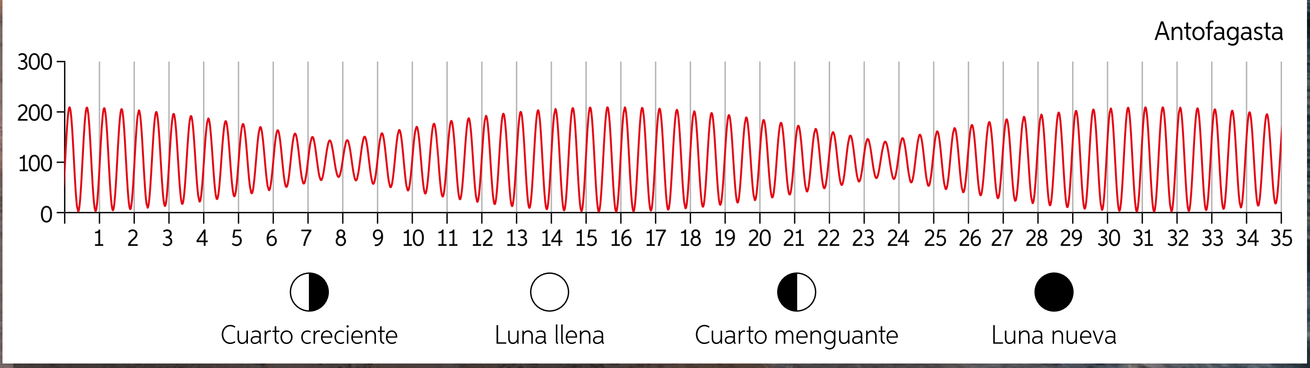
En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Construcción de modelos con la función potencia.
- Construcción de modelos con las funciones seno y coseno.

La Portada, Antofagasta. Chile.



Intensidad viento (km/h)	Altura de olas (m)
0 - 1	0
1 - 5	0,1
6 - 19	0,1 - 0,5
20 - 28	0,5 - 1,25
29 - 38	1,25 - 2,5
39 - 50	2,5 - 4,0
51 - 61	4,0 - 6,0
62 - 74	6,0 - 8,0
75 - 88	8,0 - 10,0



Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

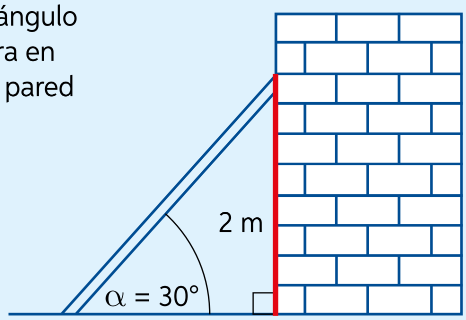
1. Clasifica cada una de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$. Para ello, determina si es lineal, afín, constante o cuadrática.
   - a. $f(x) = -\frac{x}{2} + 5$
   - b. $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$
   - c. $f(x) = 9$
   - d. $f(x) = 5 - x^2$
   - e. $f(x) = \frac{2}{5} - 3x$
   - f. $f(x) = 6x$
   - g. $f(x) = 12x^2 - 12$
   - h. $f(x) = -4x + 2$

2. Sea $f(x) = x^2 - 2x - 4$, calcula los siguientes valores de cada función.
   - a. $f(4)$
   - b. $f(-3)$
   - c. $f(0) + f(5)$
   - d. $f(-1) + f(3)$
   - e. $3f(2) + f(7)$
   - f. $f(-4) - 2f(\ 4)$

3. En un triángulo isósceles, la medida del ángulo desigual se puede modelar por la regla de formación $f(x) = 180 - 2x$, donde x corresponde a la medida de uno de los ángulos de igual medida.
   - a. Realiza un esquema que ilustre la situación.
   - b. ¿Cuál es el dominio de la función?
   - c. ¿Cuál es el recorrido de la función?

4. Analiza la información. Luego, realiza las actividades.

Una escalera apoyada a un muro forma un ángulo de 30° con la horizontal, tal como se muestra en la figura. El punto alto de la escalera toca la pared a 2 metros de altura.



   - a. ¿Qué datos entrega el problema?
   - b. ¿Qué razón trigonométrica relaciona la altura del punto de apoyo sobre el muro con el largo de la escalera?
   - c. ¿Cuál es la distancia entre la base de la escalera y la base del muro? ¿Cuál es la razón trigonométrica que las relaciona?
   - d. ¿Cuál es el largo de la escalera?

Reflexiono

- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de esos contenidos crees que debes repasar antes de continuar? Explica.
- ¿Cuáles son las limitaciones del modelo de la actividad 3? Argumenta.

Lección 3

Construcción de modelos con la función potencia

Crecimiento y decrecimiento potencial

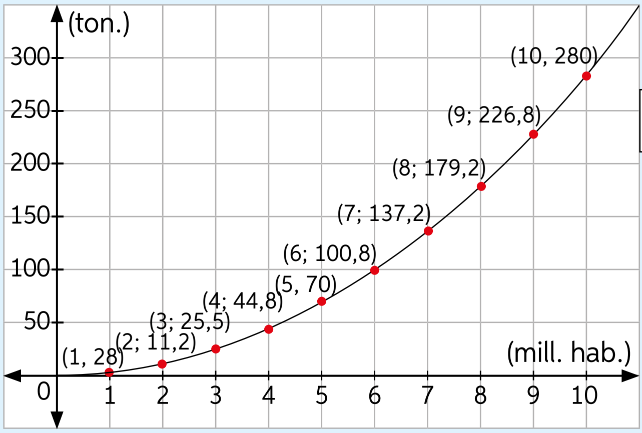
Objetivo: Reconocer y analizar crecimiento y decrecimiento de la función potencia.

¿Cómo distingues algebraicamente la función lineal de la cuadrática?

¿Qué tipo de fenómenos puedes modelar mediante el crecimiento exponencial?

1. Analiza la siguiente información. Luego, respondan en parejas.

La cantidad de basura en toneladas que se genera mensualmente por cada millón de habitantes en cierto país está representada en el siguiente gráfico:



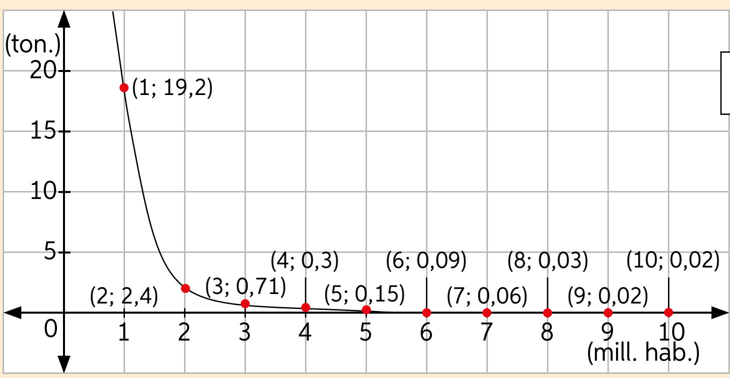
$f(x) = 2,8x^2$

Si consideramos que en el mundo hay 7530 millones de habitantes y que la producción de basura es similar en todas partes, ¿cuántas toneladas de basura se generan mensualmente en el planeta?

a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué representa cada variable?

b. Si en ese país hay aproximadamente 19,2 millones de habitantes, ¿cuántas toneladas de basura se generan mensualmente?

La función que modela la cantidad de basura que se reduce a fin de mes en toneladas por cada millón de habitantes que recicla es:



$f(x) = 19,2 \cdot x^{-3}$

Mientras más habitantes reciclen, menos basura habrá a fin de mes. El valor 19,2 corresponde a la cantidad de millones de habitantes que hay en dicha localidad.

c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué representan?

d. Si en Chile hay 18 millones de habitantes, ¿cuál sería la función que modela el mismo comportamiento?

e. ¿Cuántos millones de habitantes deben reciclar en Chile para reducir la cantidad de basura a 0,01 toneladas?

Clasificaremos el comportamiento de las funciones según su crecimiento:

- Llamaremos **función creciente** a una función $f(x)$ tal que si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$.
- A su vez, una **función decreciente** es una función tal que si $c < d$, entonces $f(c) > f(d)$.

¿Cuál de las funciones usadas anteriormente es creciente?, ¿cuál es decreciente?

Llamaremos **función potencia** a una función de la forma $f(x) = a \cdot x^n$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, cuyo dominio está en los reales y su recorrido depende de a y n, donde a es llamado **coeficiente** y n es llamado **exponente**.

Por ejemplo, las siguientes funciones corresponden a funciones potencia:

$f(x) = 3x^5$ $\quad$ $f(x) = 0{,}2x^{-2}$ $\quad$ $f(x) = -5x$ $\quad$ $f(x) = -7x^{-15}$

Actividad de aplicación — El reciclaje en Chile

¿Qué haremos? Analizar las tendencias de reciclaje en Chile.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 integrantes. Determinen qué tipo de basura investigarán.

Investiguemos

Paso 2: Investiguen en distintas fuentes los montos históricos de producción y de reciclaje en Chile durante últimos años del desecho escogido.

Pueden revisar instituciones como:

- *chilerecicla.gob.cl.*
- *Greenpeace u otras ONG.*
- *Diarios y revistas.*

Paso 3: Determinen cómo reducir la producción de este tipo de basura, dónde se puede reciclar en su comunidad o cómo se puede reutilizar.

Paso 4: Realicen una tabla que contenga loa cantidad de basura producida, basura reciclada y basura no reciclada durante al menos dos años. ¿La basura no reciclada tiene una tendencia creciente o decreciente a lo largo del tiempo?

Algunas categorías de residuos son diferentes tipos de plásticos, metales, cartones y papeles.

Presentemos

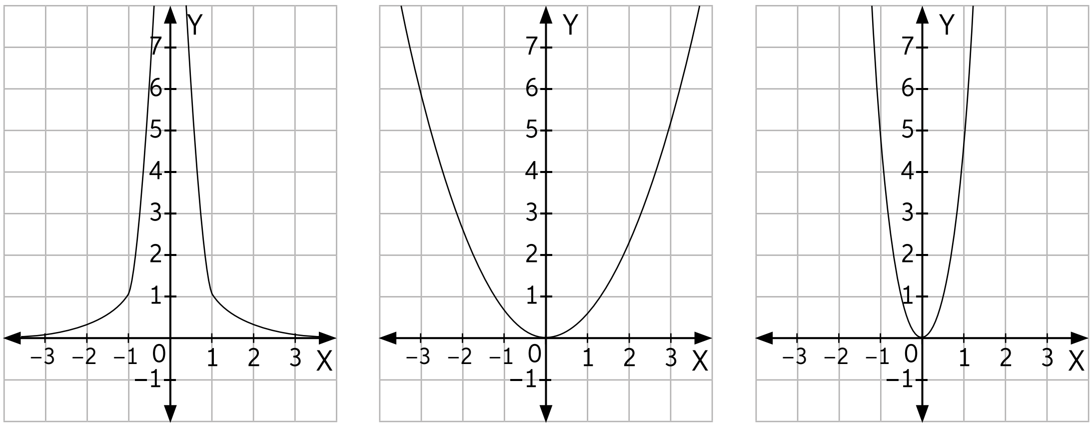
Paso 5: Presenten los resultados de su investigación en un afiche que contenga los datos de la tabla de manera creativa. Incluyan los consejos de reducción, reutilización y reciclaje, además de las fuentes investigadas.

2. Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP141A**. Luego, realiza las siguientes actividades:

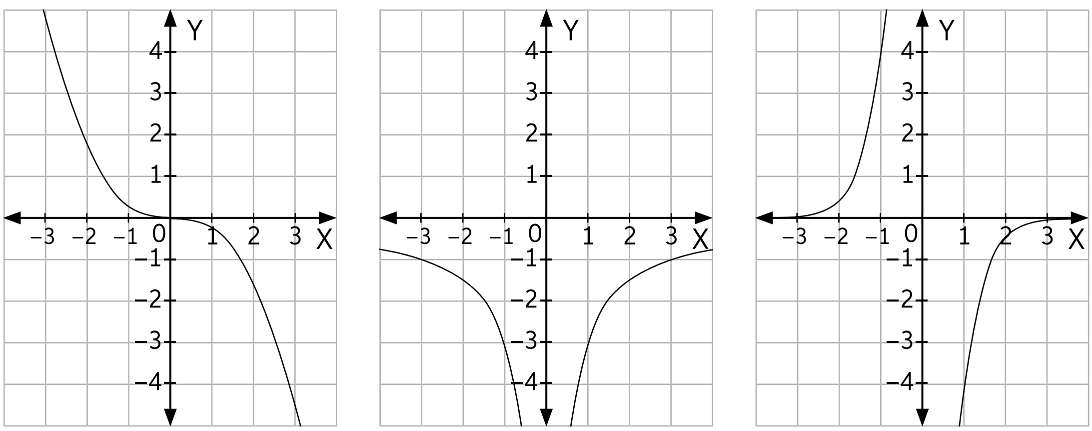
   a. Fija el deslizador *a* en 0 y mueve el deslizador *n*. ¿Qué resultados obtienes?, ¿a qué se debe? Comenten sus conclusiones en parejas.

   b. Fija el deslizador *n* en 0 y mueve el deslizador *a*. ¿Qué resultados obtienes?, ¿a qué se debe? Comenten sus conclusiones en parejas.

   c. ¿Qué característica tienen en común los parámetros de las siguientes gráficas? Comprueben sus hipótesis utilizando el recurso.



   d. ¿Qué característica tienen en común los parámetros de las siguientes gráficas? Comprueben sus hipótesis utilizando el recurso.



Llamaremos **función par** a una función *f*(*x*) si se cumple que *f*(*x*) = *f*(−*x*) y **función impar** a una función *g*(*x*) si se cumple que *g*(−*x*) = −*g*(*x*), para todo *x* del dominio.

¿Cuál es el punto de simetría de las funciones anteriores?, ¿cómo se relaciona con el exponente y la clasificación de par e impar?

19 y 20

Para concluir

a. A partir de lo experimentado a lo largo del tema, ¿cómo explicarías con tus palabras la restricción de $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ en la definición de función potencia $f(x) = a \cdot x^n$? ¿Por qué crees que la estudiamos solo cuando $n \in \mathbb{Z}$?

b. ¿Qué tipos de fenómenos crees que se pueden modelar con ella?

Función potencia de exponente positivo

Objetivo: Modelar situaciones mediante la función potencia para exponente positivo.

¿Cómo diferenciar una función creciente de una decreciente? Explica con tus palabras.

¿Qué diferencia la función potencia de la exponencial?

1. Analiza la siguiente información. Luego, respondan en parejas.

Algunos de los fenómenos virales en las redes sociales pueden ser modelados mediante la función potencia; por ejemplo, un video blog titulado "maquillaje sale mal" se visualizó de la siguiente forma:

x (min)	$f(x)$ (visualizaciones)
1	3
2	24
3	81
4	192

Podemos modelar la situación anterior de personas que han visto el video $f(x)$ y de los x minutos que han transcurrido desde su publicación mediante la función $f(x) = 3x^3$.

a. ¿Cuáles son los coeficientes a y n de la función $f(x)$?, ¿es una función creciente o decreciente?

b. ¿Cuántas personas habrán visto el video luego de una hora?

c. ¿Cuánto demoró el video en llegar al millón de visualizaciones?

Otro fenómeno viral corresponde a las reacciones negativas reflejadas en las redes sociales causadas por comentarios, actitudes o acciones reprochables. Por ejemplo, la publicación de una noticia de dudosa fuente le originó una pérdida de seguidores en las redes sociales a una estrella de cine:

–300 personas día 1 → –9600 personas día 2 → –72 900 personas día 3

Podemos modelar la situación anterior de subscriptores que han perdido $g(x)$ y de los x días que han transcurrido desde la publicación de la noticia mediante la función $g(x) = -300x^5$.

d. ¿Cuáles son los coeficientes a y n de la función $g(x)$?, ¿es una función creciente o decreciente?

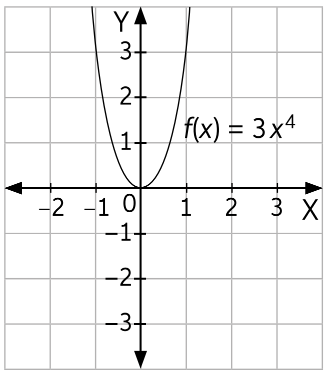
e. Si la persona contaba con 10 000 000 de subscriptores antes de la noticia, ¿cuántos días deben transcurrir para que se quede sin subscriptores?

¿Qué limitaciones tienen los modelos anterior con respecto al dominio?

Para el caso de las funciones potencia $f(x) = a\,x^n$ de exponente positivo, tendremos:

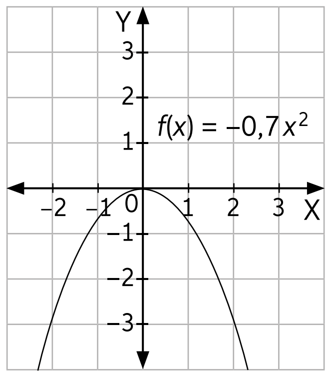
- Exponente par:

Coeficiente *a* positivo



Recorrido: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Coeficiente *a* negativo

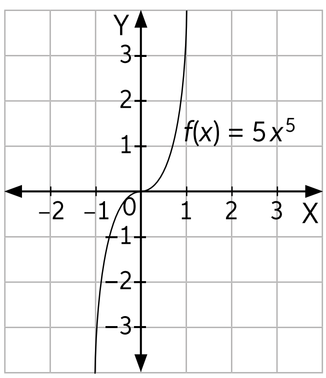


Recorrido: $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$

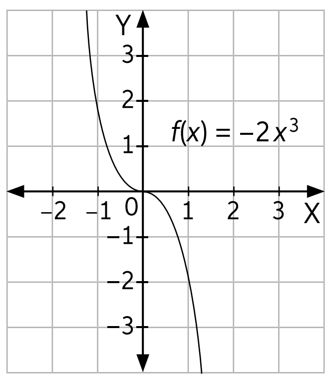
Las funciones de exponente par son simétricas con respecto al eje Y.

- Caso de exponente impar:

Coeficiente *a* positivo



Coeficiente *a* negativo



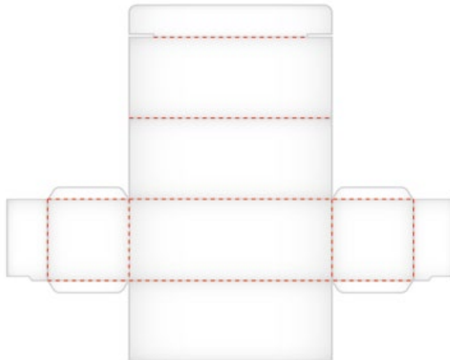
Las funciones de exponente impar son simétricas con respecto al origen y su recorrido es $\mathbb{R}$.

¿A qué tipo de gráfico corresponden las funciones de la página anterior?

2. Comenten y discutan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   - Todas las funciones potencias con exponente *n* impar y coeficiente *a* positivo son crecientes.
   - Todas las funciones potencias con exponente *n* impar y coeficiente *a* negativo son decrecientes.
   - Las funciones de exponente par cumplen con la condición de ser pares.
   - Las funciones de exponente impar cumplen con la condición de ser impares.
   - Las funciones con coeficiente par son solo crecientes o solo decrecientes.

¿Cómo resumirías la relación entre el crecimiento y los coeficientes algebraicos?

3. Analiza la siguiente información y realiza las actividades.
Una empresa de jugos diseña el siguiente envase:



Aristas basales: x cm
Arista lateral: $3x$ cm

a. ¿Cuál es el volumen de la caja en cm^3 si la x mide 2 cm, 3 cm o 4 cm?
b. ¿Cuál es la superficie de la caja en cm^2 si la x mide 2 cm, 3 cm o 4 cm?
c. ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar el área y el volumen de la caja?
d. ¿Cuál es el recorrido de las funciones anteriores?
e. Compara los crecimientos de ambas funciones. ¿Cuál crece más rápido?
f. Si la compañía de jugos quiere gastar menos de 350 cm^2 y envasar más de 370 cm^3 utilizando su envase, ¿qué valor recomendarían para la arista? Discútanlo en parejas.

4. Un estudio de una población de insectos muestra la siguiente tendencia luego de haber sido expuestos a un pesticida:

x (días)	$f(x)$ (individuos muertos)
5	–50 000
10	–1 000 000
12	–2 000 000
16	–4 500 000

Algunos pesticidas afectan indirectamente a otras poblaciones, por lo que deben ser regulados

a. Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP144A** y mueve los deslizadores. ¿Qué parámetros de a y n son los que mejor se ajustan a los datos obtenidos? Discútanlo en parejas.
b. ¿Considerarían ustedes que el ajuste anterior es un buen modelo de la situación modelada?
c. Si la población consta de 5 000 000 individuos, ¿cuáles son el dominio y el recorrido de la función?

21 y 22

Para concluir

- ¿Qué criterio utilizarías para definir cuando una expresión algebraica es un buen modelo o un mal modelo de una situación?
- ¿Qué otros fenómenos son modelados mediante la función potencia de exponente positivo?

Función potencia de exponente negativo

Objetivo: Analizar el comportamiento de la función potencia de exponente negativo.

¿Qué diferencia tienen las funciones potencia de exponente negativo y positivo?

¿Qué ocurre en la expresión $\frac{1}{x}$ a medida que el valor de x crece?

1. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Al anestesiar a un paciente, se debe monitorear la concentración de anestesia en el torrente sanguíneo. En el tiempo $t > 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) fue modelada por:

$$c_1(t) = \frac{30}{t^2}$$

t	$c_1(t)$
1	30
1,5	$13{,}\overline{3}$
2	7,5
2,5	4,8
3	$3{,}\overline{3}$

La anestesia usa fármacos que bloquean la sensibilidad táctil y dolorosa de un paciente. La concentración de la droga es absorbida por el organismo y se reduce hasta que se recupera la sensibilidad.

a. Identifica los valores de n y a de la función potencia.

b. ¿Cuál es el dominio de la expresión anterior?

c. A partir de la tabla, construye en tu cuaderno la gráfica la función.

d. Si la anestesia se debe volver a inyectar cuando su concentración se encuentre bajo los 1 mg/L, ¿en cuánto tiempo se debe volver a administrar?

Para compararla con la droga normalmente utilizada como anestesia, se estudia en otro paciente con las mismas características. En el tiempo $t > 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) fue modelada por:

$$c_2(t) = \frac{30}{t^3}$$

t	$c_2(t)$
1	30
1,5	$8{,}\overline{8}$
2	3,75
2,5	1,92
3	$1{,}\overline{1}$

e. Identifica los valores de n y a de la función potencia.

f. ¿Cuál es el dominio de la expresión anterior?

g. A partir de la tabla, construye en tu cuaderno la gráfica la función.

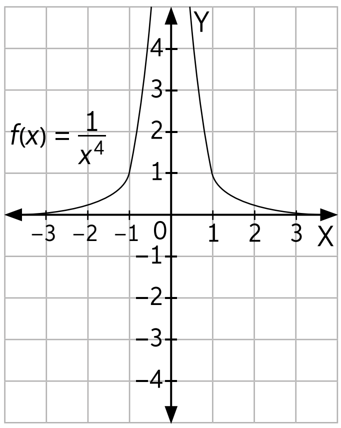
h. Al igual que la anestesia anterior, se debe volver a inyectar cuando su concentración se encuentre bajo 1 mg/L. ¿En cuánto tiempo se debe volver a administrar esta droga?

i. Discutan en parejas: ¿cuál de las dos anestesias tiene una mayor duración?, ¿cómo se refleja en el comprotamiento la diferencia de los valores del exponente n de las funciones potencia $c_1(t)$ y $c_2(t)$?

Para el caso de las funciones potencia de exponente negativo de la forma $f(x) = \frac{a}{x^n}$, $n > 0$, tendremos que su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$. Las gráficas de dichas funciones son:

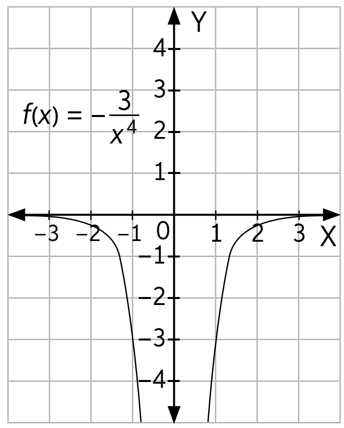
- Caso de exponente par:

Coeficiente *a* positivo



Recorrido: $\mathbb{R}^+$

Coeficiente *a* negativo

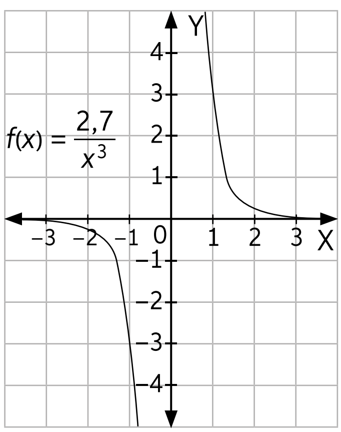


Recorrido: $\mathbb{R}^-$

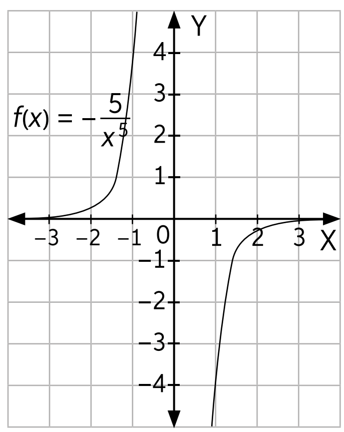
Las funciones de exponente par son simétricas con respecto al eje Y.

- Caso de exponente impar:

Coeficiente *a* positivo



Coeficiente *a* negativo



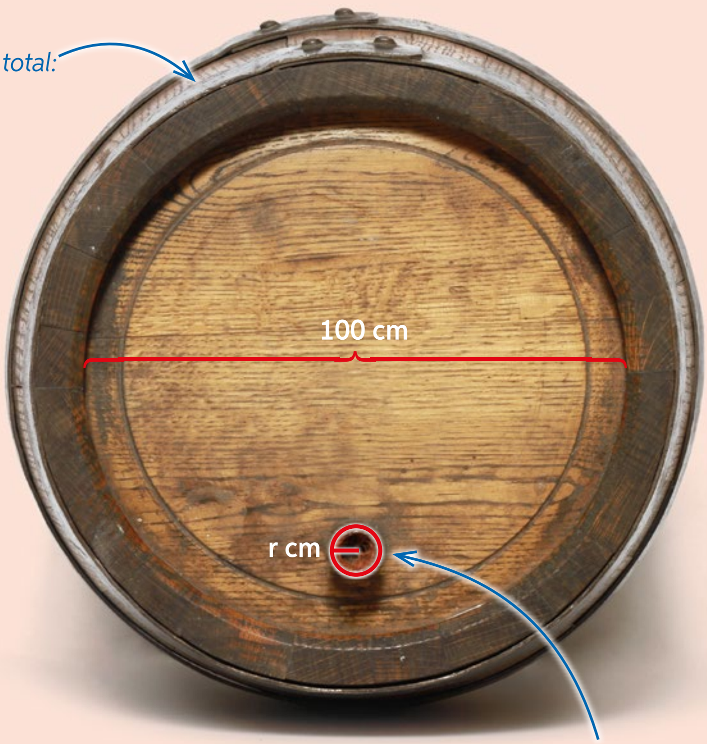
Las funciones de exponente impar son simétricas con respecto al origen y su recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$.

¿Por qué se restringe el dominio de las funciones potencia de exponente negativo y se les quita el 0?

2. Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP146A** y responde:
   a. ¿Qué sucede a medida que aumenta el valor de *n*?
   b. Utiliza la herramienta “intersección” y selecciona la curva con cualquiera de los dos ejes. ¿Por qué crees que sucede eso?

3. Analiza la siguiente información.

El tiempo de vaciado (en minutos) de una barrica es inversamente proporcional al flujo de líquido que se deja salir.



a. Plantea la función que modela el tiempo en función del radio del agujero.
b. ¿Cuáles son los coeficientes *a* y *n* de la función potencia?
c. ¿Cuál es dominio de la función? Compara tu respuesta con un compañero.
d. ¿Es posible determinar el recorrido de la función? Justifica tu respuesta.
e. En tu cuaderno, construye el gráfico de la función.

¿Es un buen modelo de la situación la función anterior? ¿Qué suposiciones se realizaron para poder modelarla?

23 y 24

Para concluir

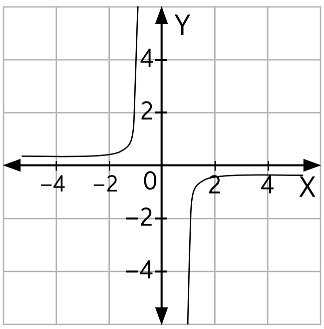
a. ¿Qué tipos de fenómenos crees que se pueden modelar con las funciones potencia de exponente negativo? ¿Modelan las mismas situaciones que las funciones de exponente positivo?
b. ¿Cómo distinguirías gráficamente una función potencia de coeficiente *n* positivo de otra con coeficiente negativo?
c. ¿Qué limitaciones consideras que tienen los modelos de función potencia de exponente negativo?

Antes de continuar

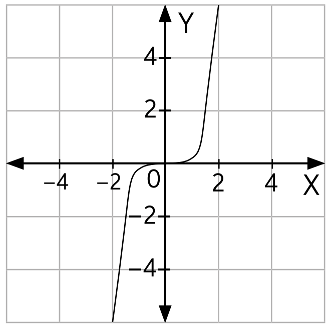
Realiza las siguientes actividades para que conozcas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. A partir de cada gráfico, describe los signos de los coeficientes *a* y *n* de las siguientes funciones potencias:

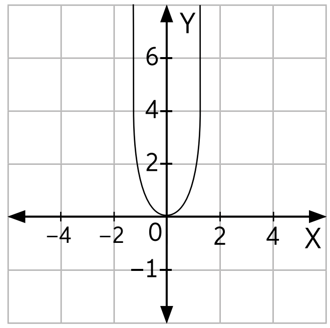
a.



b.



c.



2. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

A partir de las observaciones realizadas por Tycho Brahe, Kepler logró describir la relación del tiempo que tardan los planetas en dar la vuelta al Sol con la distancia media que los separa.

La siguiente tabla resume el periodo al cuadrado (con respecto a la Tierra) y la distancia media *R* (en unidades astronómicas) de 4 planetas.

Planeta	R (UA)	T^2
Mercurio	0,389	0,05
Venus	0,724	0,38
Tierra	1	1
Marte	1,524	3,53

Identifica si el periodo al cuadrado en función de la distancia corresponde a una función creciente o decreciente.

a. ¿Cuáles debiesen ser los signos de *a* y *n* de la función potencia que modela la tercera ley de Kepler?

b. Utilizando la calculadora, tantea el valor más adecuado para *n* y *a*.

c. Compara los datos de la tabla con los obtenidos por el modelo. ¿Constituye una buena aproximación?

Reflexiono

25

- ¿Qué tipo de limitaciones tienen los modelos matemáticos que construiste durante esta Lección?, ¿cómo las identificaste?
- ¿Cómo diferenciaste "un buen modelo" de "un mal modelo"? Comparte y discute las estrategias con tus compañeros.
- A partir de tu desempeño en la evaluación anterior, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Explica.

Lección **4**

Construcción de modelos con las funciones seno y coseno

La circunferencia unitaria

¿Qué significado geométrico crees que tienen las expresiones sen(91°) y cos(−40)?

¿Cuántos grados sexagesimales hay entre 0° y 60°?

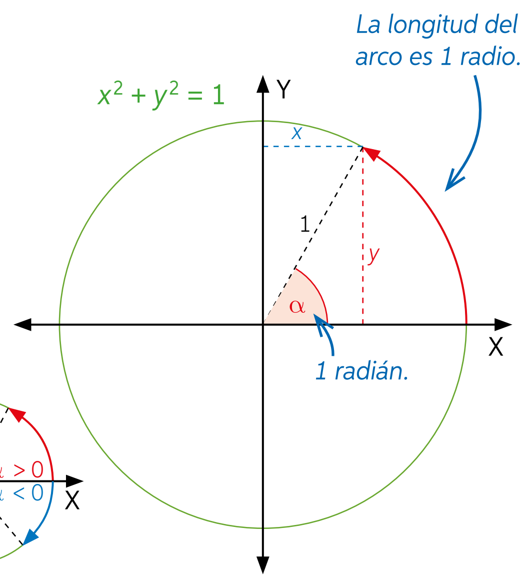
Objetivo: Analizar el comportamiento gráfico de las relaciones trigonométricas seno y coseno.

Una **circunferencia unitaria** es la curva ubicada en el plano cartesiano con centro en el origen y de radio 1, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

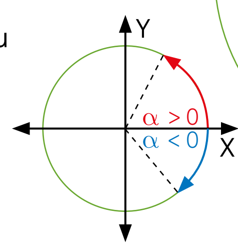
Un **radián** es el ángulo central de la circunferencia necesario para que la longitud del arco subtendido por ella que parte en el punto (1,0) sea igual a su radio. Su equivalencia en grados es la siguiente:

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}2957°$$

Utilizaremos "1 rad" o "1".

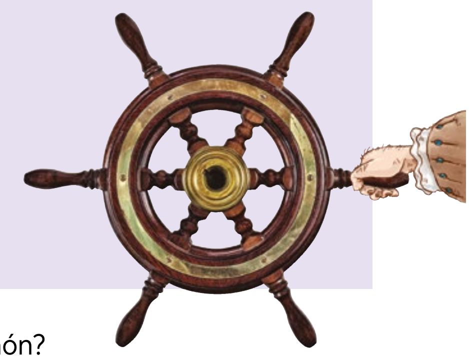


Los radianes se usan como unidad para medir ángulos y su valor es **positivo** si su sentido es antihorario y **negativo** si su sentido es horario.



1. Lee la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Jack es un pirata y ha encontrado el mapa del tesoro de Sir Francis Drake. Sin embargo, tiene un problema, después de escapar de Caicai-Vilu, el timón de su barco ha sufrido un desperfecto y solo puede girarlo entre 0 y 90° desde donde se encuentra su mano.



a. ¿Entre cuántos radianes puede moverse el timón?

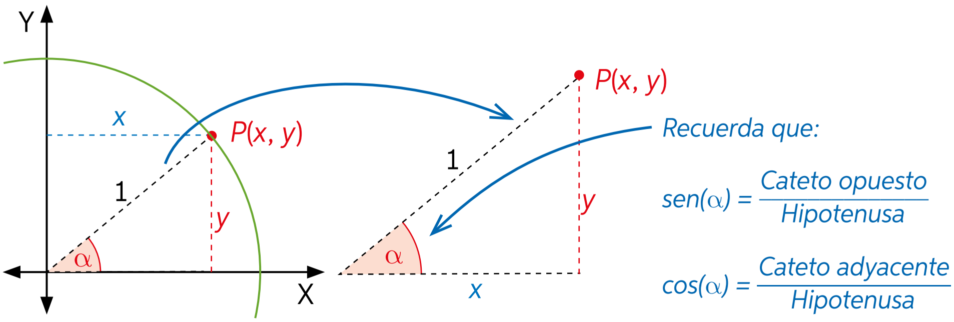
b. Para moverse 180° o 270°, ¿cuántas veces debe girar el timón en 90°? ¿A cuántos radianes corresponden dichos ángulos?

c. Su contraalmirante le sugiere girar en 2π radianes el timón. ¿Cuál es la posición final del timón? ¿A cuántos grados sexagesimales es equivalente?

- ¿Qué fórmula o procedimiento utilizas para transformar de grados a radianes?, ¿es similar al paso de radianes a grados? Comparte tu respuesta con el curso.

- ¿A cuántas vueltas de timón equivale 12π?

Definiremos en la circunferencia unitaria las coordenadas del punto $P(x, y)$ en términos del ángulo α utilizando las razones:

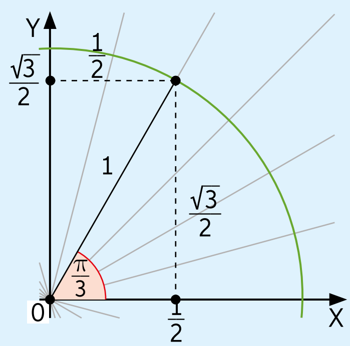


Tenemos que: $cos\alpha = x$ y $sen\alpha = y$. Ahora, podemos reescribir las coordenadas del punto en términos de α: $P(cos(\alpha), sen(\alpha))$.

2. Observa la siguiente tabla de valores:

α	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(\alpha)$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Por ejemplo, para el ángulo $\frac{\pi}{3}$ se tiene $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Esto quiere decir que el punto $P(x, y)$ tiene su coordenada x en $\frac{1}{2}$ y su coordenada y en $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



a. Determina los valores de x para los ángulos $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$.

b. ¿Qué regularidad cumplen $cos(\alpha)$ y $cos(-\alpha)$?

c. Determina los valores de y para los ángulos $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$.

d. ¿Qué regularidad cumplen $sen(\alpha)$ y $sen(-\alpha)$?

3. Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP150A**. Mueve el punto P para realizar las actividades.

a. Presiona el botón de animación y observa. ¿Entre qué valores oscilan seno y coseno en la gráfica de la segunda vista?

b. Discute con tus compañeros: ¿es necesario conocer más allá de los valores de 0 y 2π? Justifica tu respuesta.

c. ¿Cada cuántos radianes se repetirá el comportamiento de las relaciones de seno y coseno?

4. Lee la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Luego de reparar su nave en el puerto, Jack se dirige en búsqueda del tesoro. Sin embargo, el mapa está escrito en acertijos con radianes y razones trigonométricas que indican la posición del timón.

El mapa toma de referencia el norte como el punto (1, 0) de la circunferencia unitaria.

a. Jack asume que la primera pista indica cuánto debe girar el timón desde el puerto hasta la llave: ¿a cuántos grados sexagesimales equivale la pista? ¿cuál es la posición final del timón?, ¿es posible girar el timón de forma positiva para llegar a la misma posición?

b. La segunda pista indica la dirección de la llave hasta la torre. Ubica el punto en la circunferencia unitaria: ¿a qué ángulo equivale?

c. La tercera pista indica el ángulo entre la torre y el tesoro. Jack asume que indica las coordenadas en *y*. ¿Qué ángulos positivos en radianes pueden estar asociados a esa pista? Dibuja las posibles posiciones del punto en la circunferencia unitaria asociada a la pista. Compara tu respuesta con un compañero.

d. Finalmente, Jack decide seguir el rumbo hacia el tesoro que más se parezca al del mapa. ¿Cuál es el valor de dicho ángulo?

26 y 27

Para concluir

a. ¿Cómo relacionas la expresión algebraica $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$ con la circunferencia unitaria?

b. ¿Cómo explicarías la afirmación “todos los ángulos negativos se pueden transformar a positivos y viceversa”?

c. ¿Qué diferencia los grados sexagesimales de los radianes? Comenta tu respuesta con tu profesor.

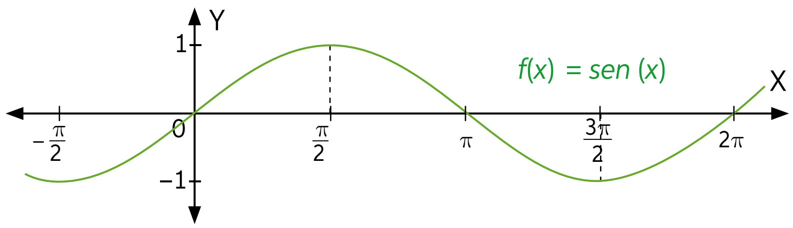
Funciones seno y coseno

Objetivo: Comprender el comportamiento de las funciones seno y coseno.

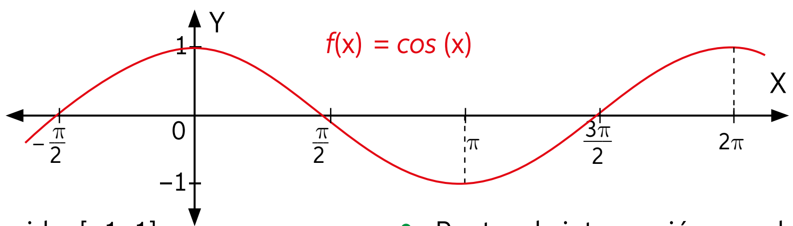
¿Cuál es la variable dependiente de las funciones?, ¿cuál es la independiente?

¿Qué ejemplos de ondas mecánicas o electromagnéticas conoces?

Definiremos las funciones de dominio real **seno** y **coseno** de la siguiente forma:



- Recorrido: $[-1, 1]$
- $sen(x) = sen(x + 2\pi)$
- Puntos de intersección con el eje X: $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$



- Recorrido: $[-1, 1]$
- $cos(x) = cos(x + 2\pi)$
- Puntos de intersección con el eje X: $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$

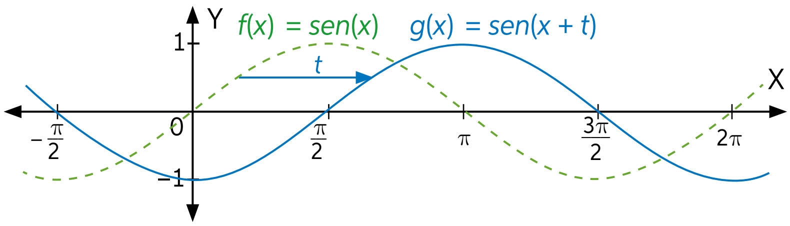
¿Cuál es la diferencia entre las funciones trigonométricas y las relaciones trigonométricas? Explica con tus palabras.

Una función se llama **periódica** cuando su valor se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo o completa un ciclo determinado. El valor de este intervalo se llama periodo: $f(x + \text{periodo}) = f(x)$.

¿Cuál es el periodo de la funciones seno y coseno?, ¿cómo se relaciona con la cantidad de vueltas alrededor de la circunferencia unitaria?

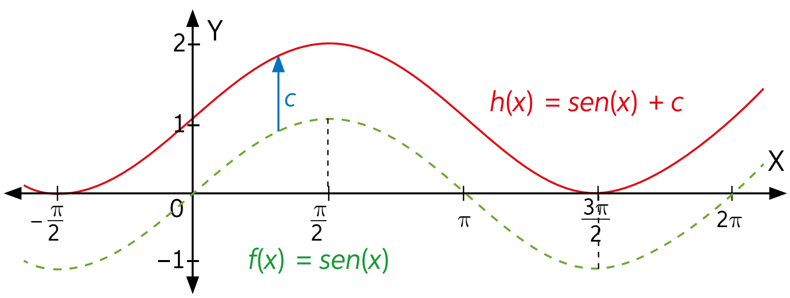
1. En parejas, ingresen a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP152A**. Muevan los deslizadores y respondan:
   a. ¿Qué diferencia observan entre los movimientos que provocan en la función seno los deslizadores *t* y *c*?
   b. ¿En qué eje realiza modificaciones el parámetro *t*, que se encuentra dentro del argumento de la función seno?
   c. ¿Qué regularidad observas cuando utilizas valores mayores que 2π? ¿Cómo relacionas este comportamiento con el periodo?
   d. ¿En qué eje realiza modificaciones el parámetro *c*, que se encuentra fuera del argumento de la función seno?
   e. Presiona la casilla de función coseno. ¿Cuánto hay que trasladar la función seno para obtener la función coseno?

Al sumar un valor t en el argumento de la función seno, esta se **traslada horizontalmente**, de modo que la gráfica trasladada $g(x) = sen(x + t)$ es:



¿Cuánto hay que trasladar horizontalmente la función coseno para igualarla a la función seno?

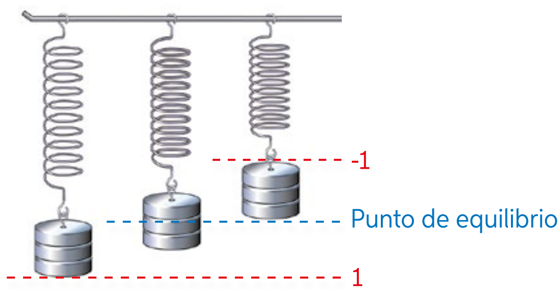
Además de trasladar horizontalmente la función seno, podemos **trasladarla verticalmente** mediante la suma de un valor c fuera del argumento de la función seno. La gráfica de $h(x) = sen(x) + c$ es:



2. La posición de un resorte con una masa colgada con respecto a su punto de equilibrio se modela mediante la siguiente función:

Datos	
Tiempo	Posición
0	0,8
1	0,9
2	0,1
3	−0,8
4	0,84

Ajuste	
t	$f(t) = sen(t)$
0	0,84
1	0,91
2	0,14
3	−0,76
4	0,84



a. ¿El modelo corresponde a un buen ajuste? Justifica.

b. ¿Qué ocurriría si el punto de referencia fuera el punto de soporte del resorte?, ¿a qué traslación correspondería?

c. ¿Qué ocurriría con la función si se tomara la posición del resorte al segundo 2 como el segundo 0?, ¿a qué traslación correspondería?

28

Para concluir

a. ¿Por qué crees que es necesario analizar el comportamiento de la función seno para comprender el comportamiento de la función coseno?

b. Esboza la gráfica de la función $f(x) = sen(x + 3\pi) - 1$

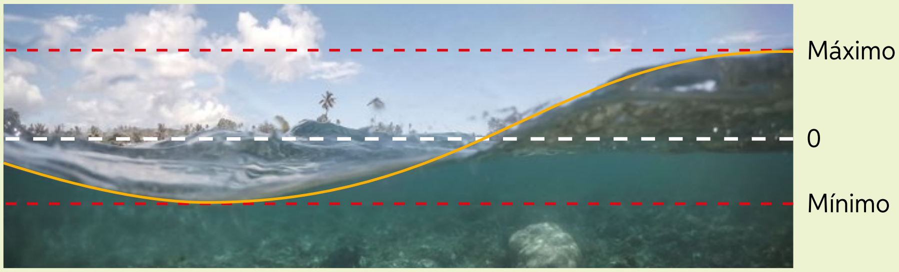
Amplitud y periodo

Objetivo: Modelar situaciones mediante la función seno.

¿Qué diferencia gráfica tiene la variación de un parámetro dentro del argumento de la función seno de aquellos que se encuentran fuera?

1. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Se registra, en la siguiente tabla, la altura de una ola en el lago con respecto a un marcador en la siguiente tabla:



Tiempo (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Altura (cm)	0	2	3	2	0	–2,1	–3	–2	0

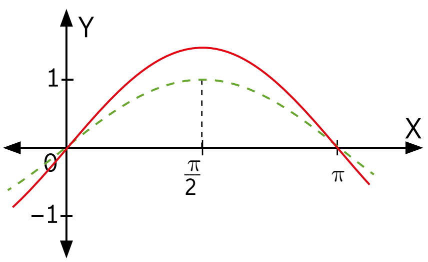
a. Grafica los puntos de la tabla con el tiempo como variable independiente y la altura como la variable dependiente. ¿A qué función se asemeja?

b. ¿Cuál fue la altura máxima y mínima registrada por la ola?

c. ¿Cuál es el periodo de la ola?

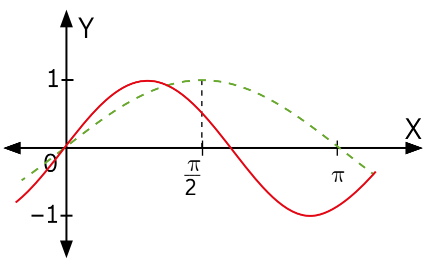
La **amplitud** equivale a la mitad entre la diferencia de los valores máximo y mínimo del recorrido de la función, por tanto, para la función $f(x) = a \cdot sen(x)$, su recorrido es $[-a, a]$ y su amplitud será a. Tendremos que:

- Si $|a| > 1$, se trata de una dilatación vertical de la función.
- Si $|a| < 1$, se trata de una contracción vertical de la función.



Podemos modificar la función seno de periodo 2π a una función de periodo p. Para ello, multiplicamos el argumento de la función seno por $b = \frac{2\pi}{p}$ y obtenemos $f(x) = a \cdot sen(b \cdot x)$.Tendremos que:

- Si $|b| > 1$, se trata de una **dilatación horizontal**
- Si $|b| < 1$, se trata de una **contracción horizontal**.



d. Si modelamos la ola con la función $f(x) = a \cdot sen(b \cdot x)$, ¿cuáles son los valores de los parámetros a y b? ¿Cuál es la función?

e. Construye una tabla de acuerdo con tu modelo, compárala con los datos obtenidos y discute: ¿Es un buen modelo?

2. En parejas, analicen la información. Luego, realicen las actividades.

Las horas de luz diurna promedio en la provincia de Arauco en Chile durante 12 meses se resumen en la siguiente tabla:

Mes	Horas de luz
Abril	11:07
Mayo	10:07
Junio	9:37
Julio	9:51
Agosto	10:42
Septiembre	11:50
Octubre	13:02
Noviembre	14:05
Diciembre	14:39
Enero	14:22
Febrero	13:27
Marzo	12:17

a. ¿Entre cuál(es) intervalo(s) de meses las horas de luz son crecientes?

b. ¿Entre cuál(es) intervalo(s) de meses las horas de luz son decrecientes?

c. ¿Cuáles son los mínimos y máximos de horas de luz?

d. ¿Cuál será la amplitud y el periodo de la función?

Recuerda transformar los minutos a horas.

e. Ingresen a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP155A** y modifiquen los parámetros del periodo y la amplitud dentro del recurso de acuerdo con los definidos anteriormente.

f. Trasladen la función utilizando el deslizador *c*, realicen un primer ajuste y respondan: ¿cuánto fue necesario desplazar la función?, ¿cómo se relaciona el parámetro *c* con el promedio entre el máximo y mínimo?

g. Trasladen la función utilizando el deslizador *t*, realicen un primer ajuste y respondan: ¿cuánto fue necesario desplazar la función?, ¿cómo se relaciona el parámetro *t* con la coordenada *x* del máximo?

h. Realicen un segundo ajuste de los parámetros utilizando las conclusiones que obtuvieron en pareja. Anoten la función obtenida y todos los parámetros de $f(x) = a \cdot sen(b \cdot x + t) + c$.

i. Utilicen la tabla para comparar los valores de la función y los originales. ¿Consideran la función modelada como una buena aproximación de los datos de la tabla?

Discutan con su profesor: ¿qué limitaciones tuvo el modelo?, ¿se debieron a la forma de medición de los datos (horas, días, meses) o la metodología utilizada para modelarlos?

Actividad de aplicación — El espectro de los sonidos

¿Qué haremos? Modelar los registros vocales de artistas, instrumentos musicales o animales mediante la función seno.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 integrantes y elijan un vocalista de una banda, un instrumento musical o un animal para investigar.

Investiguemos

Paso 2: Investiguen:

- ¿Cuál es el registro vocal del artista o la frecuencia del sonido del animal?
- ¿De qué depende que un sonido sea más débil o más fuerte? ¿A cuál parámetro de la función se ajustaría?
- ¿De qué depende que un sonido sea más agudo o más grave? ¿A cuál parámetro de la función se ajustaría?

Paso 3: En equipos, representen el espectro sonoro mediante una función de la forma $f(x) = a \cdot sen(b \cdot x)$. Ajusten aproximadamente teniendo en cuenta:

- ¿Es característicamente agudo o grave?
- Si se trata del sonido de un animal, ¿es detectable por el oído humano?
- Realicen una gráfica de la función que ilustre la amplitud y la frecuencia que determinaron.

Presentemos

Paso 4: Pueden usar diversos medios para presentar su investigación. Acuerden uno con su profesor. La presentación debe contener los siguientes elementos:

- ¿Cuál fue el motivo de su elección?
- ¿Cómo describirían el sonido que emiten?
- ¿Qué funciones eligieron para graficarlos y por qué?
- Una muestra del sonido determinado.

Las ballenas se comunican mediante sonidos inaudibles para los seres humanos.

Freddie Mercury tenía un gran rango vocal. Era capaz de producir sonidos muy graves y muy agudos.

Una guitarra de 12 cuerdas produce sonidos de distinta frecuencia que los del bajo.

29 y 30

Para concluir

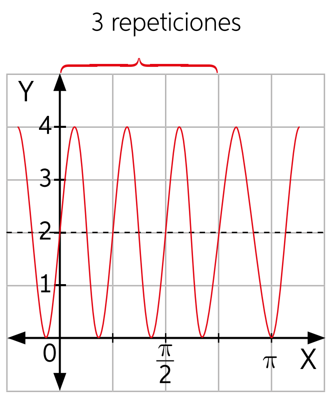
a. ¿Qué diferencia gráfica existe entre multiplicar un número fuera del argumento de la función seno y multiplicar dentro del argumento? Esboza una gráfica de $f(x) = 2 \cdot sen(x)$ y $f(x) = sen(2 \cdot x)$ en tu cuaderno para ilustrar la diferencia.

b. Se quiere aumentar el periodo al doble en la función $f(x) = a \cdot sen(b \cdot x)$. ¿Por cuánto hay que multiplicar el coeficiente b?

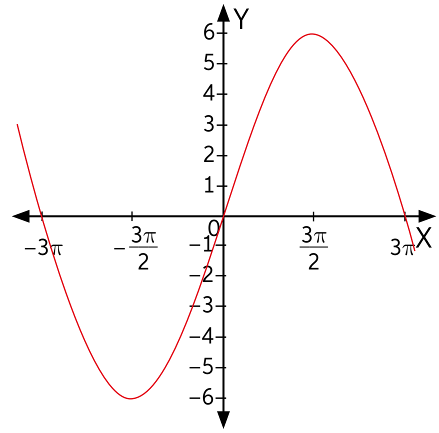
Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Identifica la amplitud y el periodo de las siguientes funciones:

a.



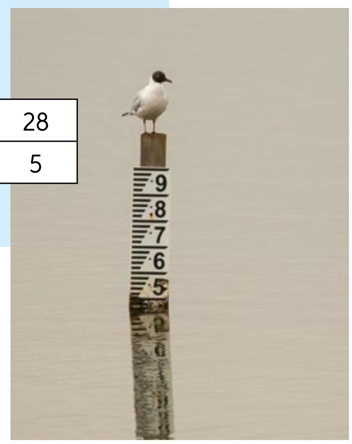
b.



2. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

En una bahía se tomaron los siguientes datos de la variación de la altura en pulgadas del agua sobre una vara marcada.

Días	0	3	7	10	14	18	21	25	28
Altura	5	7,5	9	8	5	1,8	1	2,5	5



Se quiere modelar la altura en función de los días:

a. ¿Cuál es el periodo y la amplitud de la función?
b. ¿Cuánto se debe trasladar horizontalmente?
c. ¿Cuánto se debe trasladar verticalmente si se modela mediante la función seno?
d. Plantea la función seno para modelar los datos.
e. ¿Es un buen modelo? Elabora una tabla para contrastar el modelo con los datos obtenidos.
f. ¿Cada cuántos días se debe esperar marea alta?, ¿cuántos días después habrá marea baja?
g. ¿Qué modificación hay que realizar en la función para medir la altura en centímetros? (1 pie = 2,54 cm)

Reflexiono

31

- ¿Qué importancia crees que tiene utilizar el dominio en radianes en las funciones seno y coseno? Explica y discute con tu curso.
- De acuerdo con tu desempeño en la evaluación anterior, ¿en qué actividad(es) tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Explica.

Síntesis

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es una lluvia de ideas?

Una lluvia de ideas corresponde a una fase creativa del pensamiento, en la que se intenta imaginar el máximo de posibilidades con respecto a un concepto. Simplemente, se deja fluir la imaginación a fin de capturar las ideas más relevantes y significativas relacionadas con lo que se quiere sintetizar.

A continuación, se presenta un ejemplo de lluvia de ideas con algunos de los conceptos estudiados a lo largo de la Unidad.

Ahora, hazlo tú

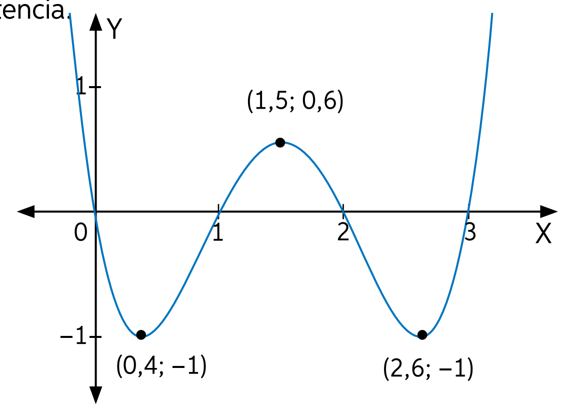
1. Escoge una lección de la Unidad y sintetiza lo estudiado mediante una lluvia de ideas.
2. Comparte con tus compañeros la lluvia de ideas que elaboraste y responde: ¿qué nuevas ideas identificas en las creaciones de tus compañeros?

Repaso

Realiza las siguientes actividades:

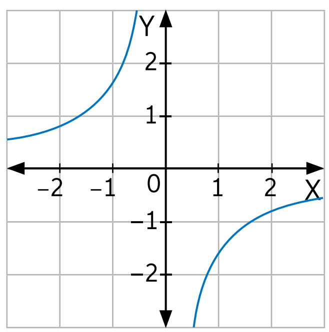
Lección 3 Construcción de modelos con la función potencia.

1. Determina para qué valores de x la función es creciente y para cuáles es decreciente.

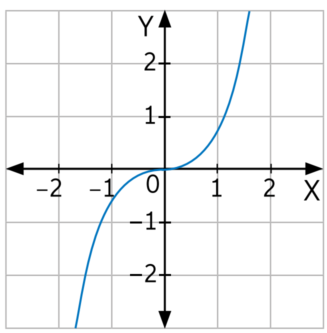


2. Determina la paridad y los signos de los coeficientes a y n de las siguientes funciones potencias:

a.



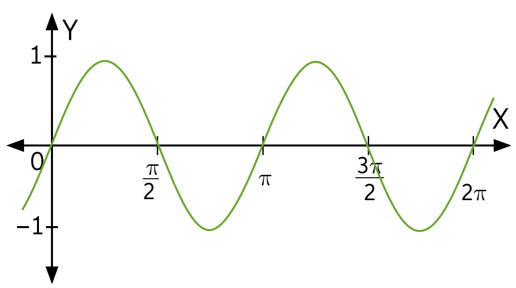
b.



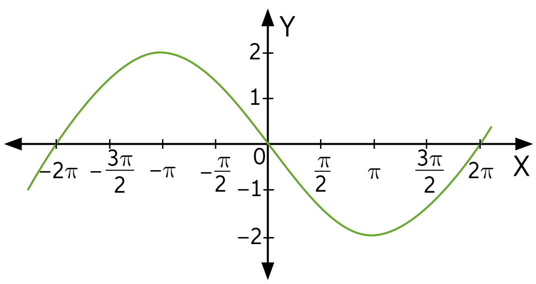
Lección 4: Construcción de modelos con las funciones trigonométricas.

3. Identifica el periodo y la amplitud de las siguientes funciones seno:

a.



b.



4. Se tiene el siguiente ajuste. ¿Constituye un buen modelo de la situación?

Datos	
A	*B*
1	3
2	4
3	1
4	–1
5	–2

Modelo	
x	$f(x) = 3 \cdot sen(x)$
1	3,52
2	3,73
3	1,42
4	–1,27
5	–1,88

¿Qué aprendí?

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

1. Se quiere confeccionar un frasco con las siguientes proporciones:
   a. Determina el volumen que contendrá del frasco en función del radio basal.
   b. Identifica el comportamiento creciente o decreciente de la función.
   c. ¿Qué restricciones realizarías al dominio de la función para ajustarla al modelo?

2. Modela la siguiente situación mediante una función potencia.

El tiempo de absorción de un medicamento está dado por la siguiente tabla:

Tiempo transcurrido en minutos (t)	Cantidad en gramos no absorbida (c)
10	10
20	5
30	3,3
40	2,5
50	2

   a. ¿Utilizarías exponente positivo o negativo? Justifica.
   b. ¿El signo del coeficiente a es positivo o negativo? Justifica.
   c. Plantea un modelo matemático que se ajuste a la situación anterior. Utiliza una calculadora o software para ajustar los parámetros.
   d. Compara los datos con los obtenidos por la tabla: ¿constituye un buen modelo de la situación?
   e. ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que la cantidad no absorbida sea inferior a 1?
   f. Si el cuerpo absorbe completamente el medicamento luego de dos horas, ¿cómo se refleja esta situación según el modelo?
   g. Si la dosis original corresponde a 15 g, ¿cómo se ve reflejado en la función que modela la situación?

3. Identifica el periodo, la amplitud y los valores máximos y mínimos del recorrido de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = sen(3x) + 1$
   b. $f(x) = -cos(x + 4\pi)$
   c. $f(x) = 5 \cdot sen\left(\frac{\pi \cdot x}{8}\right)$
   d. $f(x) = 15 \cdot sen\left(\frac{\pi \cdot x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$

4. Analiza el siguiente modelo:

En una provincia de un país cercano al polo norte, la cantidad de horas diurnas $f(x)$ que recibe desde los días (x) transcurridos desde el 13 de marzo se modelan mediante la función:

$$f(x)=6{,}5 \cdot sen\left(2\pi \cdot \frac{x}{365}\right)+11$$

a. Determina el dominio y el recorrido de la función anterior.
b. ¿En cuántos días, a partir del 13 de marzo, se tendrá la cantidad máxima de horas diurnas?, ¿cuántas horas serán?
c. ¿En cuántos días, a partir del 13 de marzo, se tendrá la cantidad mínima de horas diurnas?, ¿cuántas horas serán?
d. ¿Cuantos días del año habrá una cantidad inferior a 11 horas de luz?, ¿a qué meses corresponden aproximadamente?
e. ¿Cuantos días del año habrá una cantidad superior a 11 horas de luz?, ¿a qué meses corresponden aproximadamente?
f. Si los turistas esperan ver auroras boreales durante la noche, ¿en qué meses se esperará un mayor número de turistas?

5. Modela la siguiente situación:

El promedio de la probabilidad diaria de precipitaciones diarias durante un año en una ciudad alcanza su valor máximo el 27 de junio con un 0,2, mientras que su menor valor alcanza un 0,02.

a. Determina el dominio y el recorrido de la función seno asociada a la probabilidad diaria de precipitaciones a partir de los días transcurridos desde el día 27 de junio.
b. Determina la amplitud y el periodo de la función seno anterior. Considera un año de 365 días.
c. Determina las traslaciones necesarias para ajustar la función.
d. Encuentra un modelo que describa la variación de la probabilidad diaria de precipitaciones.
e. ¿Cuántos días después del 27 de junio nos encontraremos con la menor probabilidad diaria de precipitaciones del año?
f. ¿Cuántos días después del 27 de junio nos encontraremos con el primer día en que la probabilidad diaria de precipitaciones es inferior al 11 %?
g. ¿Cómo explicarías que se produzca una lluvia en diciembre?, ¿constituye un buen modelo?

Reflexiono

- De las actividades realizadas en la evaluación anterior, ¿en cuál(es) de ellas tuviste más dificultades?, ¿qué estrategias utilizaste? Explica.
- ¿Qué importancia crees que tiene para las disciplinas científicas el modelamiento a partir de datos empíricos? Investiga y comenta con tu curso.

P ¿Cómo aplicaste el modelamiento matemático en la realización del proyecto? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

Unidad 3

LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA

Estadística y probabilidades

Observa la imagen. Luego, comenta tu respuesta con tu curso.

1. El Metro de Santiago es uno de los que entrega mejor calidad de servicio a nivel mundial. ¿Cuál crees que es la probabilidad de que sufra algún atraso uno de sus trenes?
2. ¿Cómo crees que se modela matemáticamente el tiempo de viaje promedio de una línea de Metro? ¿Es una función determinista o probabilística?
3. ¿Cómo crees que se toma la decisión de construir futuras líneas del Metro en Santiago?
4. ¿Qué datos crees que se tenían al momento de planificar el Metro hace 45 años? ¿Son los mismos que se tienen ahora para decidir las extensiones?

En esta unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Toma de decisiones analizando la distribución binomial.
- Toma de decisiones analizando la distribución normal.

Estación Universidad de Chile.
Metro de Santiago.

CAMBIO DE ANDEN y
Dirección San Pablo

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos relacionados con la Unidad.

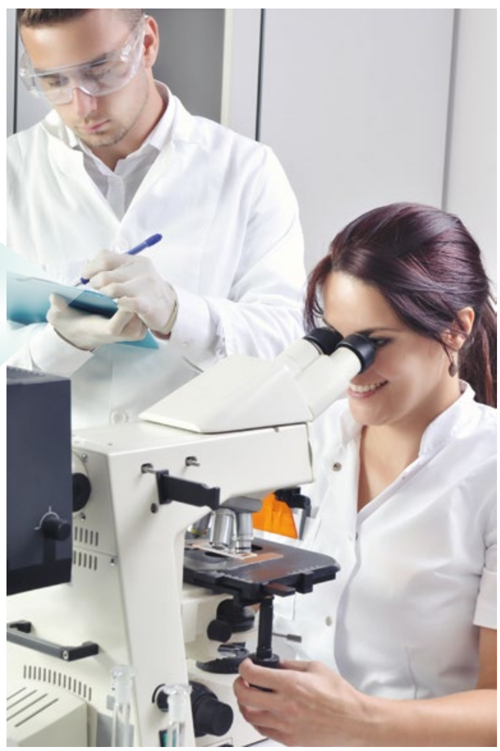
1. Define el recorrido de las siguientes variables aleatorias:
   a. Escoger alumnos con lentes en la sala de clases.
   b. Tiempo de duración de una pila de reloj.
   c. Obtener un número par en el lanzamiento de un dado de 6 caras.

2. Calcula la probabilidad de cada suceso.
   a. Obtener un número par al lanzar un dado no cargado.
   b. Escoger al azar un número de dos cifras menor que 20 y que la suma de ellas sea 9.
   c. Obtener un número primo en el lanzamiento de un dado de 20 caras.

3. Determina la media, la varianza y la desviación estándar de las siguientes muestras:
   a. {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
   b. {3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5}
   c. {2, 2, 3, 4, 4, 4, 6, 8, 15, 21}

4. Se tomaron muestras de sangre a 65 pacientes, los cuales fueron clasificados por grupo sanguíneo y género. Los resultados se detallan en la tabla.

Grupo sanguíneo	Hombre	Mujer
0	7	9
A	12	18
B	3	2
AB	6	8



   a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar una persona, esta sea del tipo A o B?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar una persona, esta sea AB?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar una persona, esta no sea AB y sea hombre?

Reflexiono

- ¿Puedes definir otro recorrido para la variable aletoria X: "Tiempo de duración de una pila de un reloj"? Compara tu respuesta con tus compañeros.
- ¿Cuál fue la actividad más difícil para ti?, ¿y la más fácil?, ¿por qué?

Lección
5
Toma de decisiones analizando la distribución binomial

Valor esperado y varianza de una variable aleatoria

Objetivo: Calcular e interpretar la media y la desviación estándar de una variable aleatoria.

¿A qué corresponde una variable aleatoria?

¿En qué consiste una función de probabilidad?

1. Analiza la situación y responde:

   Rafael quiere armar un mueble que requiere dos tornillos distintos por repisa. Las proporciones de cada tipo de tornillo en sus bolsas son:

   Se extrae al azar un tornillo de cada bolsa:

   a. Si quisieras determinar el número de tornillos defectuosos extraídos en este experimento, ¿cómo definirías la variable aleatoria X asociada?
   b. ¿Cuáles son los elementos del recorrido de la variable?, ¿cuál es la probabilidad de cada uno?
   c. Determina la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria.
   d. Discutan en parejas: ¿cómo se podría obtener el promedio de tornillos defectuosos al extraer uno de cada bolsa?

Una variable aleatoria X, cuya función de probabilidad es $p(x)$ de dominio $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tendrá una **media** o **valor esperado** (μ) dado por:

$$\mu = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \ldots + x_n \cdot p(x_n)$$

Cada valor del recorrido de la variable aleatoria se multiplica por la probabilidad correspondiente.

Por ejemplo, para el caso anterior, tendremos que:

$$\mu = 0 \cdot 0{,}56 + 1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}06$$

$$\mu = 0{,}5$$

En este caso, ¿el valor de la media pertenece al recorrido de la variable?, ¿cómo lo interpretarías?

Se llamará **varianza** (σ^2) de una variable aleatoria X de media μ, recorrido $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con probabilidades $p_1, p_2, \cdots, p_n$ respectivamente, al valor obtenido mediante:

$$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p(x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot p(x_2) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot p(x_n)$$

La desviación típica o estandar(σ) de la variable aleatoria X es la raíz cuadrada de la varianza. Por ejemplo, para el caso anterior, tendremos que:

$$\sigma^2 = (0 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}56 + (1 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}38 + (2 - 0{,}5)^2 \cdot 0{,}06$$

$$\sigma^2 = 0{,}37 \rightarrow \sigma \approx 0{,}608$$

- ¿Qué mide la varianza de una variable aleatoria? Compara tu respuesta con tus compañeros.
- ¿Existe variabilidad en el número de tornillos defectuosos?

2. Analiza la siguiente situación y responde:

   Se lanzan dos dados de seis caras y se anota la suma de los números obtenidos.

   a. Define la variable aleatoria X para este experimento.
   b. Determina el recorrido de X.
   c. Calcula y grafica su función de probabilidad de X.
   d. ¿Cuál es la media de X? ¿Cuál es su varianza?

3. Se define la variable aleatoria X: número de mascotas que tiene un estudiante. La función probabilidad asociada es:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,325	0,375	0,225	0,075

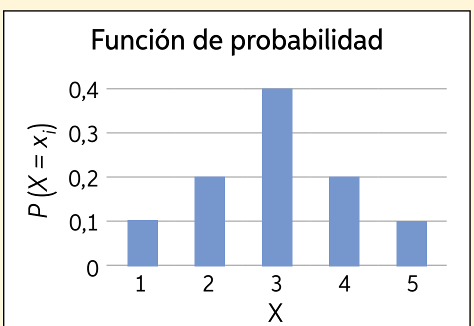
   a. ¿Cuál es el número medio de mascotas que tiene un estudiante?
   b. ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar de la variable?
   c. ¿Cómo interpretarías cada uno de los resultados?

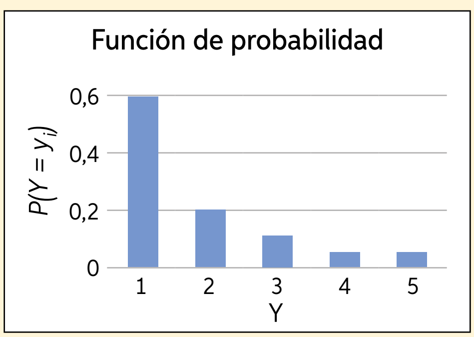
- ¿Cómo interpretarías la media y la varianza para cada uno de los problemas anteriores?

32

Para concluir

Se tienen los gráficos de las siguientes variables aleatorias:





a. ¿Cuál tiene menor media?, ¿cuál menor varianza?
b. Gráficamente, ¿cómo interpretarías la media y la varianza de una variable aleatoria?

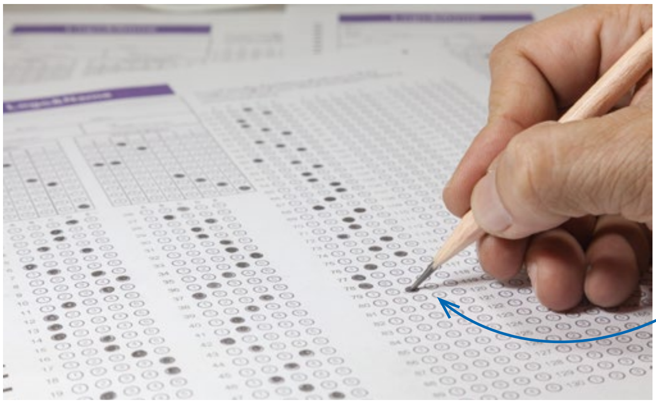
Distribución binomial

Objetivo: Utilizar el modelo binomial para predecir resultados de experimentos aleatorios.

¿Qué representa la media de una variable aleatoria?

¿Qué significado se le puede atribuir a la varianza de una variable aleatoria?

1. Analiza la siguiente situación. Luego, responde las preguntas.
   José responde la siguiente prueba de selección múltiple al azar:



Cada pregunta tiene 5 alternativas . Solo una de ellas es correcta.

   a. ¿Cuáles son las características del experimento? Define la variable aleatoria asociada.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de contestar acertadamente una pregunta? ¿Cómo se relaciona con la probabilidad de contestar erróneamente?

> Llamaremos experimento “de Bernoulli” a aquel que tiene solo dos posibles resultados excluyentes. Si la probabilidad es favorable, la designaremos con la letra es p, y si no, la designaremos con la letra q. Por lo tanto $p + q = 1$.

Si José quisiera estudiar la probabilidad de contestar erróneamente una pregunta de selección múltiple, ¿cambiarían los parámetros p y q? ¿Por qué?

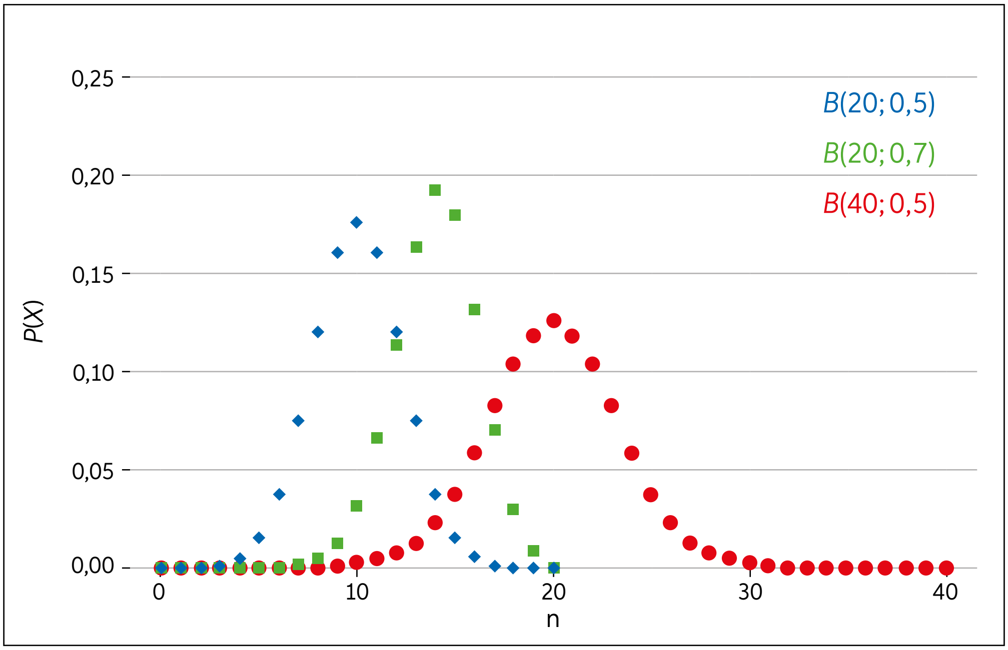
> Sea un experimento aleatorio de Bernoulli con las siguientes características:
> - El experimento se puede realizar tantas veces como se quiera.
> - Cada repetición es independiente de las anteriores.
> - La probabilidad de éxito (p) y de fracaso (q) se mantiene constante en cada ensayo.
>
> *Los parámetros p y q denotan éxito y fracaso con respecto a nuestro suceso de interés.*
>
> Si consiste en n pruebas de Bernoulli, entonces diremos que sigue el modelo de la distribución binomial. La variable que expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba la denotaremos como:
>
> $$X \rightarrow B(n, p)$$
>
> Siendo n y p los parámetros de dicha distribución.

   c. Si el test que realiza José contiene 20 preguntas de selección múltiple, ¿cuáles son los parámetros n y p que permiten estudiar la probabilidad de contestar acertadamente en las preguntas?

La función de probabilidad para una variable X que se distribuye de forma binomial con parámetros n y p está dada por la expresión:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

El gráfico asociado a ella es:



d. Con 9 preguntas contestadas correctamente como mínimo, José aprobará su examen ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga dicha cantidad de preguntas correctas?

e. Si se quisiera determinar la probabilidad de que José repruebe su examen: ¿cuáles son los valores de la variable aleatoria que cumplen esa condición?, ¿cuál es la probabilidad de que suceda?

f. ¿Cómo es posible determinar una estimación del número medio de respuestas correctas?

Los estadísticos de la función binomial son:

Media: $\mu = n \cdot p$ Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$

Por ejemplo, para una prueba de selección multiple de 20 preguntas, tendremos los siguientes estadísticos:

$n = 20$ $p = 0{,}2$ $q = 0{,}8$

$\mu = 20 \cdot 0{,}2 = 4$ $\sigma^2 = 20 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$

Recuerda que $q = 1 - p$.

¿Recomendarías a José realizar este experimento?

2. Los exámenes para estudiantes de otros cursos tienen solo 4 opciones. ¿Cómo se modifican la variabilidad y la media?

3. Analiza el siguiente experimento y responde:

Se lanza doce veces un dado de seis caras y se define la variable aleatoria X: número de caras obtenidas que son múltiplos de 3.

a. Determina el valor de los parámetros p, q y n.
b. ¿Reúne las condiciones para ser modelado mediante la distribución binomial? Justifica tu respuesta.
c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo más 4 éxitos?
d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 5 éxitos? ¿Cómo se relaciona con la probabilidad de obtener a lo más 4 éxitos?
e. ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del número de éxitos? Interprétalos.

4. Analiza la siguiente situación y responde:

En un supermercado, se tienen las siguientes filas:

En la caja rápida, la probabilidad de esperar 5 o más minutos en la fila es de 0,15.

En la caja normal, la probabilidad de esperar 5 o más minutos en la fila es de 0,35.

Se define la variable aleatoria X: cantidad de personas de que durante un día cualquiera tenga que esperar 5 o más minutos en la fila. Responde:

a. Determina el valor de q y el parámetro p para cada caso.
b. Si 4 personas deciden ir a las cajas normales del supermercado, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellas tengan que esperar 5 o más minutos para ser atendidas?
c. Si 4 personas deciden ir a la caja rápida del supermercado, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellas tengan que esperar 5 o más minutos para ser atendidas?
d. ¿Cuál es el valor de la esperanza para cada caso con 4 personas? ¿Qué significado tiene la esperanza en este experimento?
e. Si ingresan a la caja normal 4 personas un día, ¿cuántas personas deben ingresar aproximadamente en la caja rápida para que ambas cajas tengan el mismo valor esperado de esperar 5 o más minutos?

Actividad de aplicación

Describiendo los hábitos del colegio

¿Qué haremos? Estimar la cantidad de estudiantes que realizarán cierta acción en un día cualquiera.

Las pocas horas de sueño, los atrasos, el no tomar desayuno o el mal ambiente escolar son algunas variables comunes que afectan el desarrollo de los estudiantes.

Planifiquemos

Paso 1: En grupos de 3 o 4 integrantes, identifiquen un hábito o característica de los estudiantes del colegio o del curso que tenga efectos negativos en ellos.

Paso 2: Definan en conjunto una variable de Bernoulli asociada a dicho hábito o característica de los estudiantes.

Investiguemos

Paso 3: Investiguen los efectos negativos o positivos asociados a la característica o hábito seleccionado. Seleccionen fuentes confiables científicas.

Paso 4: Diseñen y apliquen una encuesta simple para obtener los datos asociados de su variable de Bernoulli. Recuerden proteger el anonimato de los encuestados.

Paso 5: Obtengan la probabilidad favorable p de su variable de Bernoulli. Utilicen la distribución binomial para determinar el valor esperado de dichos eventos en el colegio o curso.

Presentemos

Paso 6: Realicen una presentación que resuma la cantidad de estudiantes encuestados, los efectos y la esperanza de su variable. Determinen si es un problema para los estudiantes. Si es así, propongan soluciones para su comunidad.

Paso 7: Mediante un afiche resuman los puntos importantes de su investigación, los resultados obtenidos y la cantidad de estudiantes encuestados.

33 y 34

Para concluir

Se realiza el siguiente experimento: elegir un estudiante de un curso al azar y preguntarle si aprobó o reprobó la asignatura de Matemáticas. Si el curso consta de 38 alumnos, determina:

a. ¿Cuál es la variable asociada al experimento de Bernoulli?

b. Si la probabilidad de que al seleccionar un estudiante del curso y que este haya reprobado es del 0,07, ¿cuáles son los parámetros n y p asociados a la distribución binomial?

c. En el curso, ¿cuál es el valor esperado para la distribución binomial que modela la cantidad de estudiantes que aprueban Matemáticas?

Antes de continuar

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Analiza la siguiente situación y responde.

   Una tienda vende mensualmente dos modelos de zapatos en las cantidades indicadas.

   La probabilidad de que un zapato venga con una falla de fábrica es de 0,05 y se quiere determinar cuántas unidades debe haber en stock para remplazarlos.

   7 tacones rojos.

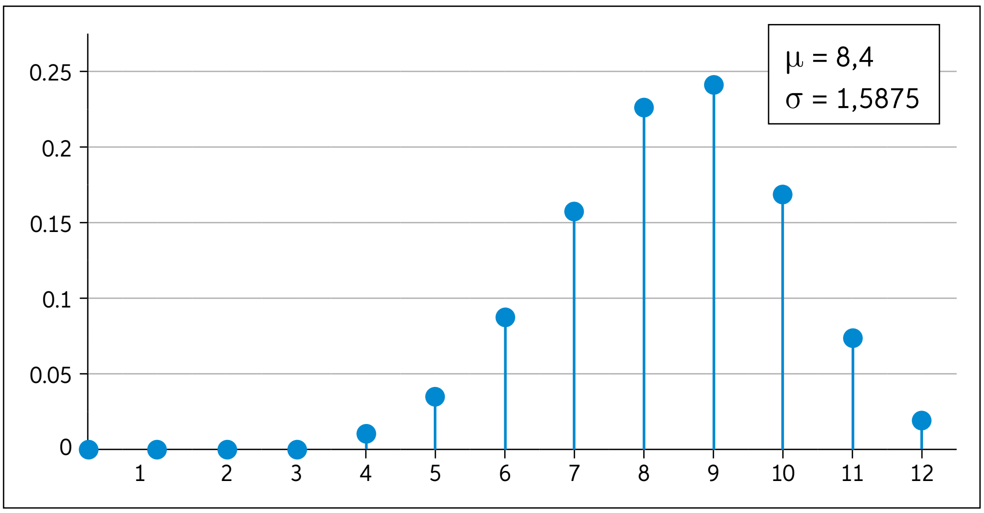
   

   37 zapatos formales.

   a. Define la variable aleatoria *X* asociada a dicho experimento.
   b. ¿Es una variable de Bernoulli? Justifica tu respuesta.
   c. ¿Cuántos zapatos de cada modelo se deben fabricar para remplazarlos?

2. Lee la información y responde.

   Se define la variable de Bernoulli, *X*: “Obtener un sello en el lanzamiento de una moneda cargada”. Además, se tiene la siguiente distribución binomial para 12 lanzamientos:

   a. ¿Cuál es el suceso favorable de la variable de Bernoulli asociada?
   b. ¿Cuál es el valor de *p* y de *q*?
   c. Se define *Y*: “Obtener una cara en el lanzamientos de dicha moneda cargada”. ¿Cuál es el suceso favorable en este caso? ¿Cuál es la distribución binomial asociada a 12 lanzamientos de dicha moneda?
   d. Construye el gráfico de la función de probabilidad asociada a *Y*.
   e. Determina el valor de la media y varianza de *Y*.

35

Reflexiono

- Explica la relación entre la probabilidad condicional y la combinatoria.
- ¿Qué importancia tiene definir los parámetros *p* y *q* en los experimentos? Explica.

Lección 6

Toma de decisiones analizando la distribución normal

Variable aleatoria continua

Objetivo: Identificar las variables aleatorias continuas y calcular probabilidades en su recorrido.

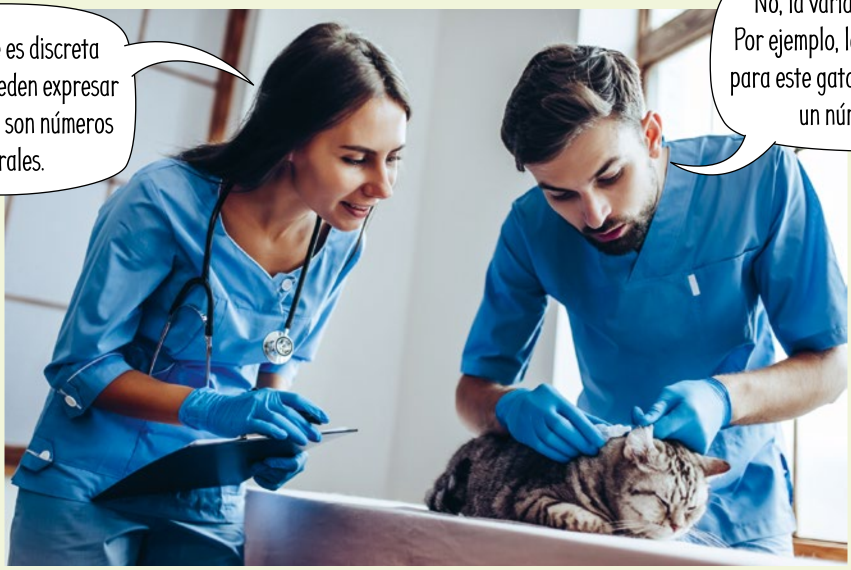
¿Qué es una variable aleatoria?

¿Qué tipos de variables aleatorias conoces?

La variable X: kilómetros recorridos en bicicleta, ¿es una variable aleatoria discreta?

1. Analiza la siguiente situación y responde:

Dos veterinarios discuten acerca de la variable X: "cantidad de liquido pulguicida aplicado en el gato".



a. ¿Con cuál de las dos personas estás de acuerdo? Discute con tu curso.
b. Para convencer a su colega, el veterinario dice que la variable aleatoria no es discreta porque la cantidad en ml del liquido puede interpretarse de la misma manera que un intervalo de números reales. Según su razonamiento, ¿cuántos cantidades distintas podría haber entre 0,1 ml y 0,25 cm?
c. ¿En qué otros casos ocurre algo parecido?

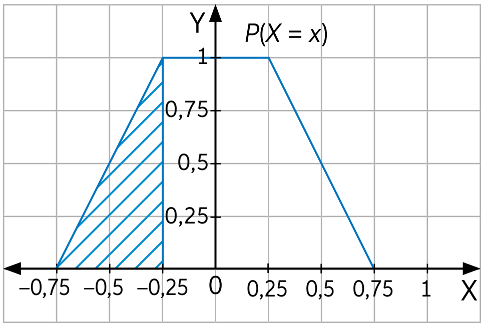
Una **variable aleatoria continua**, a diferencia de la discreta, es una variable que dentro de un intervalo puede tomar cualquier número real y su recorrido es un intervalo de los números reales.

2. En cada caso, determina a qué tipo de variable corresponde y define su recorrido:
   a. Número de goles marcados por la selección chilena durante el mes.
   b. Programa de televisión favorito de los adolescentes.
   c. Estatura de los integrantes de un equipo de básquetbol.
   d. Tiempo de espera en un servicio de urgencias.

Se denomina **función de densidad** de la variable aleatoria continua X el área bajo la curva entre el intervalo $[a, b]$, y se anota como $f(x)$ o $P(a \leq x \leq b)$, tal que $x \in [a, b]$. En otras palabras, la función de densidad es la probabilidad de que la variable aleatoria se encuentre entre los valores a y b.

- Para cualquier x se tiene $f(x) \geq 0$.
- El área bajo la curva en todo el dominio de la variable es igual a 1.
- La probabilidad $P(x = a) = 0$, ya que no existe área bajo la curva.

3. Para cada una de las siguientes funciones de densidad, determina del área achurada y calcula su valor. Guíate por el ejemplo:

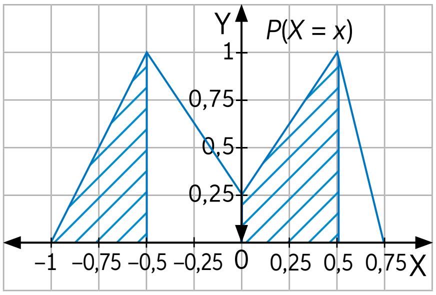


Para calcular la $P(-0,75 \leq x \leq -0,25)$, tendremos que determinar el área del triángulo:

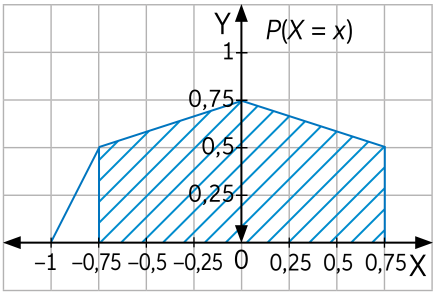
- Base: $-0,25 - (-0,75) = 0,5$
- Altura: 1
- Área achurada: $\frac{0,5 - 1}{2} = 0,25$

Finalmente, tenemos que: $P(-0,75 \leq x \leq -0,25) = 0,25$

a.



b.



4. Para una función de densidad cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de $P(1 \leq x \leq 1)$?

   ¿Cómo interpretarías gráficamente el resultado anterior?

Se denomina **función de distribución** de una variable aleatoria continua $F(X)$ a la función que da la probabilidad acumulada hasta un determinado valor x de la variable

$$F(x) = P(X < x)$$

¿Qué representa gráficamente la función de distribución?, ¿cuál es su valor máximo?

36

Para concluir

a. Explica con tus palabras las propiedades de la función de densidad.
b. ¿Qué otras estrategias puedes utilizar para calcular el área asociada a las funciones de densidad? Comenta con tu curso.

Distribución normal

Objetivo: Calcular probabilidades asociadas a una distribución normal.

¿Qué significado atribuyes a la media y la desviación estándar de una variable aleatoria continua?

Si consideramos las estaturas de los estudiantes de cuarto medio de un colegio, ¿en qué estatura se encontraría la mayor cantidad de ellos?

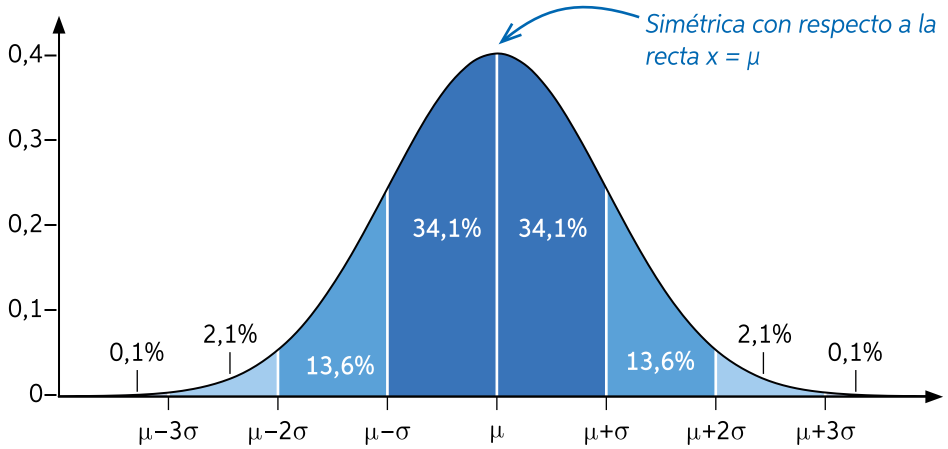
1. Analiza la información. Luego, responde las preguntas:

Una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal con media μ y desviación típica σ si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Cuyo dominio son los números reales.

Denotaremos la función anterior como $N(\mu, \sigma)$ y su gráfica, también llamada "campana de Gauss", es la siguiente:



Como se muestra en la figura, los valores de la función de probabilidad son:

- $P(x \leq \mu) = 0{,}5$ Hay un 50 % de los valores hasta la media de la distribución.
- $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0{,}683$ Hay un 68,3 % de los valores en este intervalo.
- $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}954$
- $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}997$ Aproximadamente el 0,3 % de los valores quedan fuera de este intervalo.
- Es creciente en el intervalo $]-\infty, \mu]$ y decreciente en el intervalo $[\mu, \infty[$.

a. ¿Entre qué valores se concentra la mayor cantidad de datos?

b. ¿Con respecto a qué valor de X es simétrica la curva de densidad?

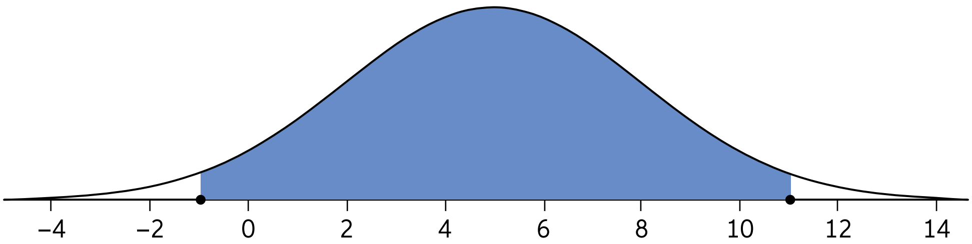
c. Según las propiedades de una variable aleatoria continua, ¿cuál es el área bajo la curva de densidad?

d. ¿Qué ocurre con la curva de densidad a medida que se aleja de la media?

e. Si se tiene una población que se distribuye de forma normal modelada por $N(2, 1)$, ¿cuál es la media y la desviación típica? ¿Qué porcentaje de los datos habrá en el intervalo $]-\infty, 2]$?

2. Observa el ejemplo. Luego, representa gráficamente y calcula las probabilidades en tu cuaderno.

Si $X \sim N(5, 3)$, para calcular $P(-1 < X < 11)$ tendremos:

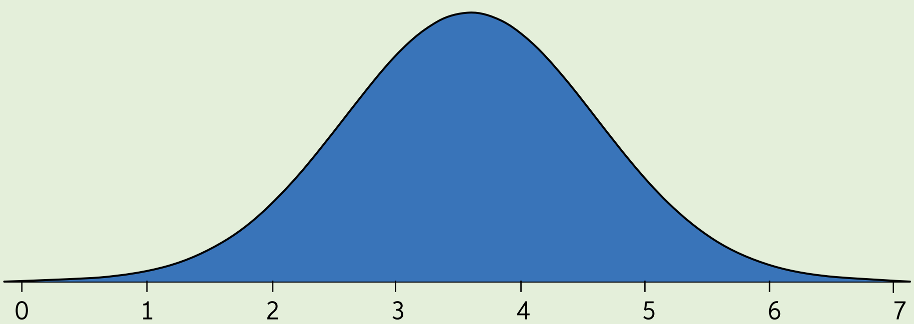


Remplazando:
$\mu - 2\sigma = 5 - 2 \cdot 3 = -1$
$\mu + 2\sigma = 5 + 2 \cdot 3 = 11$
Tendremos que $P(-1 < X < 11) = P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}954$

a. Si $X \sim N(14, 3)$, calcula $P(11 < X < 17)$.
b. Si $Y \sim N(45, 7)$, calcula $P(Y < 31)$.
c. Si $Z \sim N(126, 8)$, calcula $P(Z > 150)$.

3. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

La media de la masa en kilogramos de una población de gatos es 3,6 kg y su desviación estándar es 1 kg. La distribución asociada a dicha población $N(3{,}6; 1)$ es:



a. Se quiere determinar la probabilidad de que, al seleccionar un gato, este se encuentre con sobrepeso, es decir, tenga una masa superior a 4,6 kg. ¿Cuál es la probabilidad?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un gato se encuentre bajo peso, es decir, tenga una masa inferior a 2,6 kg?
c. Si la población de gatos estudiada corresponde a 200 individuos, ¿cuántos gatos en total se encuentran con sobrepeso o bajo peso?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar un gato, la masa de este sea exactamente igual a 3,6 kg? Justifica tu respuesta.

4. En cierto proceso industrial, el comprador establece en sus especificaciones que el diámetro del repuesto que adquirirá debe ser mayor que 4,94 mm y menor que 5,06 mm: si no cumple con esta condición, no llevará el repuesto. Si se sabe que el diámetro de los repuestos se distribuye $N(5{,}0; 0{,}02)$, ¿qué porcentaje de los repuestos será rechazado?

5. Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP176A**. Modifica los parámetros de μ y σ.
   a. Fija la media en 3 y aumenta de 2 en 2 la desviación. ¿Cómo se modifican los valores de la distribución?
   b. Utilizando el recurso seleccionen un valor cualquiera a. ¿Qué relación tienen los valores de $P(x < a)$ y $P(x > a)$?

Actividad de aplicación Analizando el rendimiento

¿Qué haremos? Analizar las tendencias de una asignatura.

Recuerda resguardar el anonimato de tus compañeros encuestados.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 integrantes. Definan qué asignatura y nivel quieren investigar.

Investiguemos

Paso 2: Encuesten a los estudiantes que componen esa población acerca de su promedio general del año pasado.

Paso 3: Registren los datos de sus encuestas en una hoja de cálculo. Determinen el valor de la media y de la desviación estándar de la población utilizando las funciones de la hoja de cálculo.

Paso 4: Analicen la información a través de probabilidades asociadas a la distribución normal respecto de la desviación estándar. Determinen el intervalo centrado en la media en que se encuentran:
- El 68,3 % de los estudiantes.
- El 95,4 % de los estudiantes.
- El 99,7 % de los estudiantes.

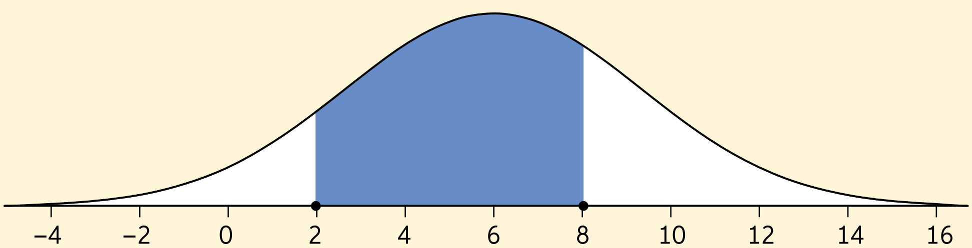
Presentemos

Paso 5: Elaboren el gráfico asociado a la distribución de las calificaciones de sus encuestados e inclúyanlo en una presentación que contenga los datos más relevantes de su investigación. Presenten los resultados a su curso.

37 y 38

Para concluir

a. De la función de densidad de la figura, se sabe que $P(x < 8) = 0,7475$ y que $P(x < 2) = 0,0912$. ¿Cómo se puede determinar $P(2 < x < 8)$?



b. ¿Es posible representar probabilidades en términos de menor o menor o igual?

Distribución normal estándar

Objetivo: Fudamentar decisiones a partir de porcentajes en modelos de distribución normal.

¿Qué propiedades de la variable aleatoria continua crees que son importantes para el cálculo de probabilidades de la distribución normal?

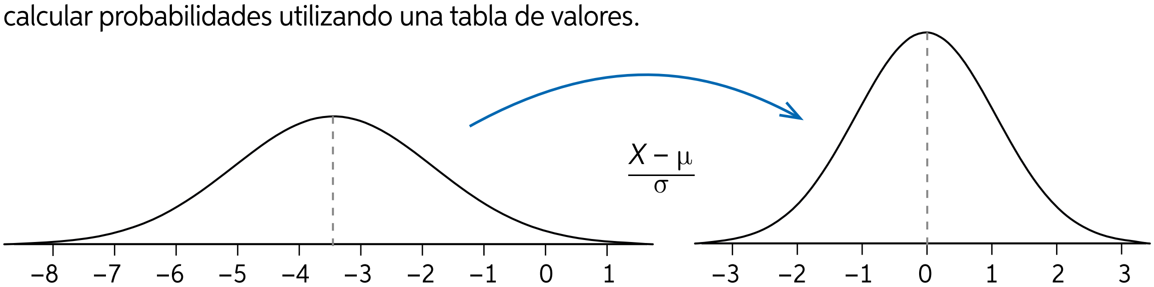
¿Cómo utilizaste las propiedades simétricas de la distribución normal en el tema anterior para el cálculo de probabilidades?

1. En parejas, ingresen a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP177A**. Luego, modifiquen los parámetros de la distribución $N(\mu, \sigma)$ y respondan:
   - a. ¿Cómo se modifica la distribución cuando mueves el deslizador μ?
   - b. Con respecto a la distribución $N(0, 1)$, ¿cómo caracterizarías las distribuciones con $\sigma > 1$?, ¿y las distribuciones con $0 < \sigma < 1$?
   - c. ¿Qué relación hay entre $P(X < \mu + \frac{\sigma}{2})$ para distintas distribuciones normales?

Cualquier variable aleatoria continua X que se distribuya $N(\mu, \sigma)$ es posible transformarla a una variable Z de distribución $N(0, 1)$ mediante la siguiente relación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

A esta distribución N(0, 1) se la denomina **distribución normal estándar** o tipificada y al cambio de variable se lo conoce como estandarización o tipificación y permite calcular probabilidades utilizando una tabla de valores.



2. Observa la tabla para $P(Z \leq z)$ de la página 39 del Cuaderno de actividades. Luego, realiza las actividades para los valores positivos de z. Guíate por el ejemplo de lectura de la tabla.

39

Para leer en la tabla el valor de $P(Z \leq 0{,}25)$, realizaremos el siguiente proceso:
Identificamos la décima de z, para este caso 0,2. Identificamos la centésima de z, para este caso 0,05.
Luego, para armar el número 0,2 + 0,05, realizamos el siguiente proceso:

Centésimas.

Décimas.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064

   - a. ¿Por qué crees que solo se utiliza una tabla para $P(Z \leq z)$ para z positivos?
   - b. ¿Cómo explicarías que $P(Z \leq 0{,}00) = 0{,}5$?
   - c. ¿Cómo explicarías que, a medida que el valor de z aumenta, el valor de P se acerca a 1?

3. Analiza la siguiente información. Luego, responde las preguntas. Guíate por el ejemplo.

Durante el transporte de arroz, la absorción de humedad produce un aumento en la masa de este, lo que provoca la ruptura del saco. Para evitarlo, una empresa realiza un estudio y determina que el saco actualmente utilizado solo resiste una masa máxima de 25,375 kg antes de romperse.

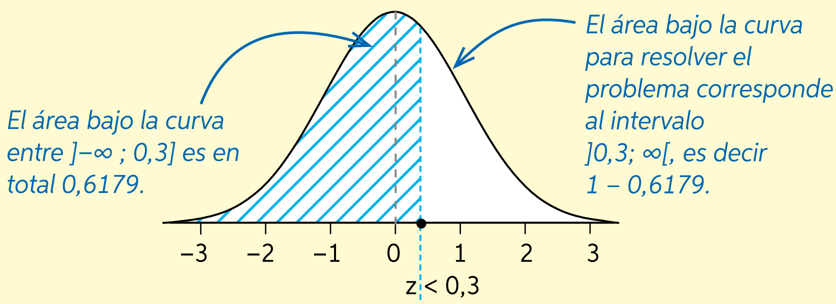
Para determinar la probabilidad de que un saco de arroz se rompa, es decir $P(X > 25{,}375)$, normalizamos la variable utilizando $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$:

$$P\left(Z > \frac{25{,}375 - 25}{1{,}25}\right) = P(Z > 0{,}3)$$

Para leer en la tabla el valor de $P(Z > 0{,}3)$, realizaremos el siguiente proceso:

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406

Sin embargo, la probabilidad dada por la tabla es $P(Z \leq 0{,}3)$. Gráficamente:



Para calcular $P(Z > 0{,}3)$, debemos hacer el cambio $1 - P(Z \leq 0{,}3)$ y obtendremos en total $1 - 0{,}6179 = 0{,}3821$.

a. Según el cálculo anterior, ¿cuál es la probabilidad de que un saco se rompa?

b. Si se utilizan sacos de mejor calidad que soportan hasta 27 kg, ¿cuál es la probabilidad de que uno de ellos se rompa?

c. Se decide cambiar la forma de transporte del arroz utilizando tambores cilíndricos de tal forma que la variable Y: "Masa de arroz dentro de un tambor cilindro" sigue la distribución $Y \sim N(45, 4)$. ¿Cuál es la probabilidad de que se rompa un cilindro si la masa máxima que soporta es 50 kg?

d. ¿Qué opción de transporte se debería utilizar? Justifica tu respuesta.

Si se quisiera calcular el valor de $P(0{,}5 < Z < 1)$, ¿qué propiedades de las vistas anteriormente se utilizarían?

4. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Dentro de un parque de atracciones se planea una ruta para la visita de un jardín con niños de 4 años. Algunos juegos, como este carrusel, tienen restricciones de altura, como se muestra en la imagen.

La altura de los niños de dicha edad se distribuye normal con media 1 m y desviación 0,15 m.

a. Analiza el ejemplo y responde.

Para determinar la probabilidad de que un niño de 4 años pueda subir al carrusel con la compañía de un adulto, tendremos que determinar $P(1 < X < 1{,}13)$.

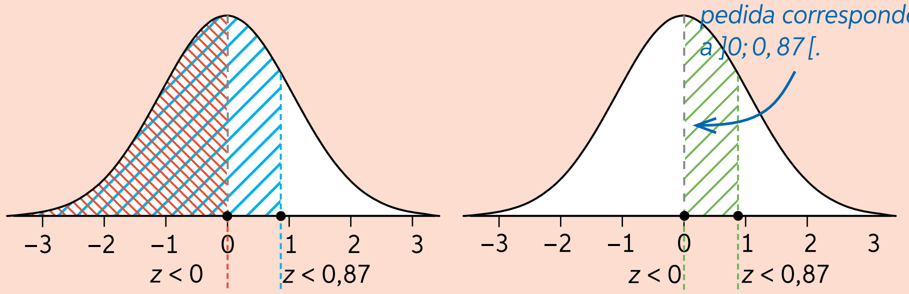
Estandarizamos:

Aproximamos z a la centésima.

$$P\left(\frac{1-1}{0{,}15} < Z < \frac{1{,}13-1}{0{,}15}\right) = P\left(0 < Z < 0{,}8\overline{6}\right) \approx P(0 < Z < 0{,}87)$$

Gráficamente tendremos que:

El área bajo la curva pedida corresponde a $]0; 0,87[$.



Luego, expresamos la probabilidad $P(a < Z < b)$ en términos de $P(Z < b) - P(Z < a)$:

$$P(0 < Z < 0{,}87) = P(Z < 0{,}87) - P(Z < 0)$$

z	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,7	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340

Obtenemos que 0,8078 − 0,5 = 0,3078

¿Considerarías este juego adecuado para los niños de 4 años?

b. En el barco pirata, la barra de restricción pide que los niños suban acompañados si miden entre 1,2 m y 1,35 m. ¿Lo consideras adecuado para el recorrido de los niños de 4 años? Compara tu respuesta con tu curso.

c. El siguiente paseo es de niños de 7 años con altura distribuida de la forma $Y \sim N(1{,}18;\ 0{,}12)$. ¿Qué porcentaje subirá al barco solo o con un adulto?

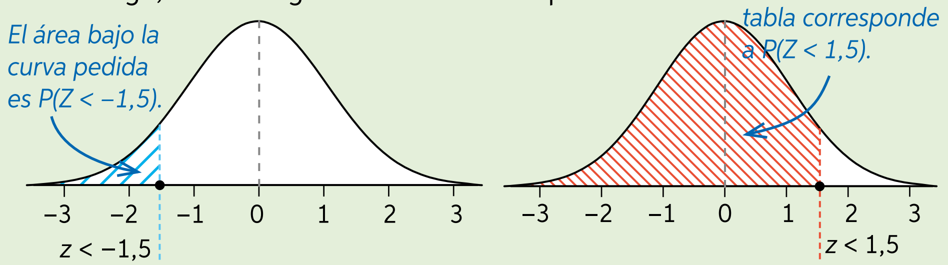
d. ¿Cómo determinarías la probabilidad de que un niño de 7 años no pueda subir al carrusel? ¿Qué dificultades tienes para calcularlo?

e. Observa el siguiente ejemplo y responde.

Para determinar la probabilidad de que un niño de 7 años no pueda subir al carrusel, tendremos que determinar $P(Y < 1)$. Estandarizamos:

$$P\left(Z < \frac{1 - 1,18}{0,12}\right) = P(Z < -1,5)$$

Sin embargo, la tabla registra solo los valores para $z > 0$.



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515

Como la curva es simétrica, para calcular $P(Z < -1,5)$, podemos hacer el cambio $1 - P(Z \leq 1,5)$ y obtendremos: $1 - 0,9332 = 0,0668$.

¿Considerarías adecuado el juego para el recorrido de los niños de 7 años?

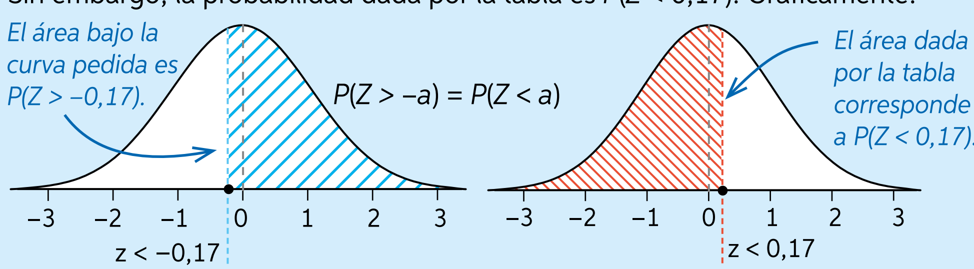
f. Se desea analizar si incluir el barco pirata en el recorrido de niños de 8 años, cuya altura se distribuye de la forma $W \sim N(1,22; 0,12)$. Observa el ejemplo y responde.

Para este caso, tendremos que determinar $P(W > 1,2)$. Estandarizamos:

$$P\left(Z > \frac{1,2 - 1,22}{0,12}\right) = P\left(Z > -0,1\overline{6}\right) \approx P(Z > -0,17)$$

Aproximamos z a la centésima.

Sin embargo, la probabilidad dada por la tabla es $P(Z < 0,17)$. Gráficamente:



z	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064

Obtenemos que $P(Z > -0,17) = 0,5675$.

¿Considerarías adecuado el juego para el recorrido de los niños de 8 años?

5. Calcula las siguientes probabilidades utilizando la tabla de distribución normal de la página 39 del Cuaderno de actividades:

a. $X \sim N(1, 2)$, calcula $P(X < 2)$
b. $X \sim N(4, 1)$, calcula $P(X > 6)$
c. $X \sim N(-3, 2)$, calcula $P(X < -0{,}7)$
d. $X \sim N(4, 3)$, calcula $P(X < -1)$
e. $X \sim N(2, 1)$, calcula $P(X > -3)$
f. $X \sim N(3; 0{,}5)$, calcula $P(-2 < X < -1)$
g. $X \sim N(17; 0{,}5)$, calcula $P(14 < X < 18)$

6. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

El tiempo de duración en días de los síntomas del resfrío común siguen una distribución normal $N(5, 3)$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de duración de los síntomas esté entre 6 y 7 días?
b. ¿Considerarías adecuado extender una licencia médica para este resfrío de más de 7 días o menos de 3? Justifica utilizando la distribución normal.
c. Analiza el siguiente ejemplo. Luego, responde.

Para determinar entre qué valores se extiende el 99,99 % de los resfriados, buscaremos en la tabla el menor valor de z que contenga el número buscado. En caso de no encontrarlo, se utiliza el más cercano.

Para este caso el 99,99 %:

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Para este caso, corresponde a 3,6 + 0,02, teniendo que $Z_{0,99} = 3{,}62$.

Aplicamos el proceso inverso de la normalización, es decir, utilizamos:

$$x = \sigma \cdot z_{0,99} + \mu$$

Usaremos $Z_{0,99}$ para abreviar $P(Z \leq 0{,}99)$.

Teniendo que $x = 3 \cdot 3{,}62 + 5$, la duración del 99 % de los resfriados estará entre 0 y 15,86 días.

¿Entre que duración se encuentra el 90 % de los resfriados? Utiliza este valor para discutir cuánto debiese ser la licencia promedio por un resfriado común.

¿Cómo explicas que los valores entre el 99 % y el 90 % sean tan lejanos?

7. Una empresa decide premiar a una de sus tiendas según el nivel de satisfacción de sus clientes. Para ello, en cada tienda se realiza una encuesta a los clientes y se tienen las distribuciones de los datos.

Tienda A	Tienda B	Tienda C
$X_1 \sim N(4, 2)$	$X_2 \sim N(5, 3)$	$X_3 \sim N(4{,}5; 1)$

Si la tienda considera la probabilidad de que, al seleccionar un cliente de cada una de ellas, su nivel de satisfacción sea superior a 4,2, ¿cuál de las tres tiendas sería premiada?

Actividad de aplicación Duración de la batería

¿Qué haremos? Modelar la duración de la batería.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 integrantes. Determinen qué aparato electrónico con batería interna o externa de uso común investigarán.

Investiguemos

Paso 2: Investiguen la veracidad de algunos mitos con respecto a las baterías y los materiales utilizados para la fabricación de las baterías investigadas.

Paso 3: Determinen la forma de obtención de los datos, por ejemplo investigación mediante las páginas de distintos productos o marcas, o bien encuestas a sus compañeros.

Paso 4: Clasifiquen los datos obtenidos. Consideren una muestra con un tamaño mínimo de tamaño 30. Utilicen una planilla de cálculo para determinar su media y varianza.

Paso 5: Suponiendo que su población se modela normal mediante la media y varianza calculada, determinen al menos 5 intervalos como:

- El intervalo de duración para el 90 % superior de los datos.
- El intervalo de duración entre el 75 % al 90 % superior de los datos.

Presentemos

Paso 6: Realicen el grafico de la distribución normal asociada a la duración de la batería. Denoten los valores de μ y *s*.

Actualmente las baterías a base de litio también son utilizadas para impulsar automóviles y buses, con lo cual disminuye la dependencia de combustibles fósiles.

La utilización de baterías recargables permitió la disminución de los desechos generados por las pilas alcalinas.

Paso 7: Concluyan: ¿cuál es el producto con mayor duración de batería?, ¿a qué percentil corresponde?

Paso 8: Presenten la información en una infografía de forma creativa. Incluyan lo investigado en el paso 2 y algunos estadísticos descriptivos de la información recopilada.

40 y 41

Para concluir

a. Si $X \sim N(18,4)$, calcula:

- $P(X > 23)$
- $P(9 < X < 17)$

b. Los puntajes de un ensayo rendido se distribuyen de manera normal con media 513 y desviación estándar 62. ¿Cuál es la probabilidad de que los estudiantes que rindieron dicho ensayo hayan obtenido más de 725 puntos?

Estimación de la media de una población

Objetivo: Estimar la media poblacional a partir de una muestra representativa.

¿Qué procedimiento se utilizaba para estandarizar?

¿Qué diferencia hay entre la media poblacional y la media de una muestra?

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades propuestas.

El dueño de una farmacia se encuentra interesado en saber si el refrigerador en que se conservan las vacunas ha mantenido la temperatura media de 5,5 °C durante los meses recientes. De no ser así, deberá comprar otro para no afectar la durabilidad y efectividad de las vacunas.

a. ¿Cuál es la variable involucrada en la situación descrita?, ¿a qué tipo de variable corresponde?
b. ¿Cómo piensas que se puede estimar la temperatura media del refrigerador que conserva las vacunas durante los últimos meses? Discute con tus compañeros.
c. ¿Cuál crees que es el tamaño mínimo de una muestra para que sea considerada representativa?

Un **intervalo de confianza** es un rango de valores que se usa para estimar el valor real de un parámetro de la población a partir de una muestra.

El **nivel de confianza** $(1 - \alpha) \cdot 100\,\%$ es la proporción de veces que el intervalo obtenido realmente contiene el parámetro. Así, un intervalo de confianza de $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ para la media poblacional μ, con σ conocida, de una muestra de tamaño n y media $\overline{x}$ es:

$$\left(\overline{x} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 95 % significa que, si el proceso se realiza muchas veces con distintas muestras, en el 95 % de los casos el intervalo obtenido realmente contiene la media poblacional.

d. Analiza el siguiente ejemplo. Luego, determina los intervalos del 95 % de confianza para las otras muestras.

Se han extraído cinco muestras aleatorias de distintos tamaños. Se sabe, además, que la desviación estándar de la temperatura del refrigerador es de 1,2 °C:

	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Muestra 4	Muestra 5
Media de la Muestra (°C)	6	5,8	4,5	5,4	6,5
Tamaño de la muestra (días)	30	45	50	55	60

Para la primera muestra los datos son:

- $1 - \alpha = 0{,}95$
  $\alpha = 0{,}05$
  $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$
- $Z_{0{,}975} = 1{,}96$
- $\overline{x} = 6$ °C
- $\sigma = 1{,}2$ °C
- $n = 30$

Reemplazando tenemos que:

$$\left(6 - 1{,}96 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{30}}; 6 + 1{,}96 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{30}}\right)$$
$$(6 - 0{,}43; 6 + 0{,}43)$$

Con un nivel de confianza del 95 %, es posible afirmar que μ se encuentra en (5,57; 6,43).

- ¿Qué ocurre con los límites del intervalo a medida que el tamaño de la muestra aumenta?

e. En grupos, comparen cada intervalo obtenido con la temperatura media que el gerente de la farmacia espera que tenga el refrigerador. Analicen y discutan en cada caso: ¿recomendarían cambiar el refrigerador?

f. ¿En qué casos se tiene más incerteza en tomar la decisión correcta o se cambia el aparato?, ¿cuáles son los factores que inciden en la decisión?

- ¿Existirá siempre certeza de haber tomado una decisión correcta utilizando un intervalo de confianza?, ¿por qué?

2. Construye un intervalo de confianza del 97 % para la media poblacional, cuya desviación estándar es 3,7. Considera una muestra de 100 datos, con un promedio de 15,7. Con un 97 % de confianza, ¿entre qué intervalo se encuentra la media poblacional?

42

Para concluir

a. ¿Cómo explicarías la frase “A mayor confianza, menor precisión”? Da un ejemplo, construyendo un intervalo de confianza para $\alpha = 0{,}05$; $\alpha = 0{,}03$ y $\alpha = 0{,}01$ con los siguientes datos:

- $\overline{x} = 0$ °C
- $\sigma = 10$ °C
- $n = 100$

Utiliza: $Z_{0{,}975}=1{,}96$; $Z_{0{,}985}=2{,}17$; $Z_{0{,}995}=2{,}58$.

Aproximación normal a la binomial

Objetivo: Modelar la distribución binomial mediante la normal para fundamentar decisiones.

¿Por qué crees que se asemejan los gráficos de la distribución binomial de grandes números y el gráfico de la distribución normal?

1. Lee la siguiente información. Luego, realiza las actividades en pareja.

a. Todos los años, la PSU distribuye de forma normal con $\mu = 500$ y $\sigma = 110$. ¿Cuántos de estos titulares podrías explicar basándote en esta información?
b. ¿Cuál es la cantidad de respuestas correctas esperadas por prueba según los titulares? ¿Cuál es el puntaje promedio?
c. ¿Qué relación crees que hay entre ambas variables?
d. Según la noticia, ¿cuál es la función binomial asociada al experimento de Bernoulli "Responder correctamente una pregunta de la PSU"? ¿Cuáles son su esperanza y su desviación estandar?
e. Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP185A**. Ajusten los parámetros para encontrar la mejor distribución normal en la binomial.

Sea Y una variable aleatoria discreta que se distribuye de forma binomial $B(n, p)$ de parámetros n, p y cumple las siguientes condiciones:

$$n \cdot p \geq 5 \qquad \text{y} \qquad n \cdot q \geq 5$$

Entonces la variable aleatoria Y se puede aproximar a una distribución normal de media np y desviación típica $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$, es decir:

$$\mathrm{B}(n, p) \rightarrow \mathrm{N}(np, \sqrt{n \cdot p \cdot q})$$

Para calcular la probabilidad de la variable discreta Y mediante el ajuste normal, es necesario aplicar el siguiente ajuste para llevarlo a la variable continua X:

- $P(Y = a) = P(a - 0{,}5 < X < a + 0{,}5)$
- $P(Y \leq a) = P(X < a + 0{,}5)$
- $P(Y < a) = P(X < a - 0{,}5)$
- $P(Y \geq a) = P(X > a - 0{,}5)$
- $P(Y > a) = P(X > a + 0{,}5)$

Variable Y discreta.

Variable X continua.

Para calcular la probabilidad de que una persona obtenga menos de 50 preguntas buenas, tendremos que la distribución $B(80; 0{,}5)$ modela el caso anterior con media $\mu = 80 \cdot 0,5 = 40$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0,5 \cdot 0,5} \approx 4,47$.

Comprobamos que $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5$, por lo que podemos ajustarla a $N(40; 4{,}47)$.

Tendremos que realizar el ajuste:

$P(Y < 50) = P(x < 50 - 0,5)$

Para obtener el porcentaje pedido, realizaremos:

Puntaje tipificado.

$$P(x < 49,5) \xrightarrow{\textit{Tipificando}} P\left(z < \frac{49{,}5 - 40}{4{,}47}\right) = P(z < 2,13) = 0,9838$$

El 98,38 % de los estudiantes respondieron correctamente menos de 50 preguntas.

Luego, para obtener el "puntaje PSU" realizaremos el cambio $110 \cdot z + 550$.

- ¿Por qué crees que los puntajes PSU no se entregan estandarizados con media 0 y desviación típica 1?

2. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Un basquetbolista encesta por partido aproximadamente el 75 % de sus lanzamientos de 3 puntos. En un partido realiza 30 lanzamientos de 3 puntos.

a. Determina el ajuste normal a la binomial.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste más de 20 lanzamientos de 3 puntos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste más de 8 y menos de 25 lanzamientos de 3 puntos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste exactamente 12 lanzamientos de 3 puntos?

3. Un examen de 64 preguntas se ajustó a la distribución $N(32, 4)$. Determina:

a. ¿Cuál es la distribución binomial que se ajustó?

b. Si se requieren al menos 25 preguntas correctas para aprobar, ¿cuál será el porcentaje de reprobación?, ¿corresponde a un examen difícil? Justifica.

c. Si la coordinación espera que con el examen apruebe el 68,44 % de los estudiantes, ¿cuál es la cantidad mínima de respuestas correctas que debiese exigirse? Discútanlo en parejas.

43

Para concluir

Analiza la siguiente información. Luego, responde las preguntas.

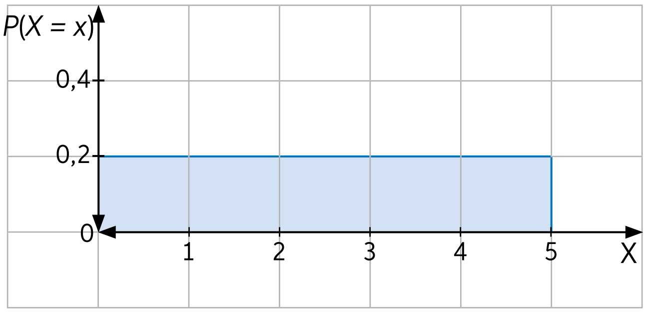
En la PSU, luego de tipificados los resultados, se transforman a la normal de media 550 y desviación 110 mediante el cambio $110 \cdot z + 550$.

Por ejemplo, un estudiante que obtuvo el puntaje tipificado de 2,13 obtendrá un total de $110 \cdot 2,13 + 550 = 784,3$ puntos.

- Realiza un esquema que ilustre los ajustes realizados para calcular el puntaje de PSU.
- ¿Cómo explicarías los titulares de la actividad inicial como “el 50 % de los estudiantes obtienen 500 puntos o menos”?
- En dos años consecutivos una persona respondió exactamente 50 preguntas correctas, pero obtuvo puntajes distintos. ¿Cómo explicarías esto?

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. La distribución de errores medidas en mm de una pieza de relojería es constante y tiene la siguiente distribución:



   a. Si el error tolerable para utilizar esa pieza es de máximo 2 mm, ¿qué porcentaje de las piezas no sirve?

   b. ¿Qué probabilidad hay de que una pieza tenga un error de tamaño tolerable?

2. En una distribución $N(0,1)$, calcula:

   a. $P(Z > 0{,}6)$

   b. $P(Z < -0{,}6)$

   c. $P(0{,}7 < Z < 1{,}5)$

   d. $P(-0{,}7 < Z < -0{,}5)$

3. En un maratón, los tiempos en terminar la competencia (en minutos) siguen una distribución $N(120, 20)$. Si participan 300 deportistas, ¿cuántos tardaran 90 o más minutos en terminar la competencia?

4. Lee la información. Luego, realiza la actividad.

Los datos obtenidos del tiempo de vida de ciertas bacterias fueron los siguientes:

n	50
$\bar{x}$	30 h

Si en la población ese tiempo se distribuye $N(\mu,5)$, determina un intervalo de confianza al 99 % para el tiempo promedio de vida de las baterías.

Reflexiono

44

- De acuerdo con tu desempeño en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Crea un plan con acciones que permitan superar dichas dificultades.
- ¿Por qué crees que la distribución normal es tan utilizada en la investigación científica?

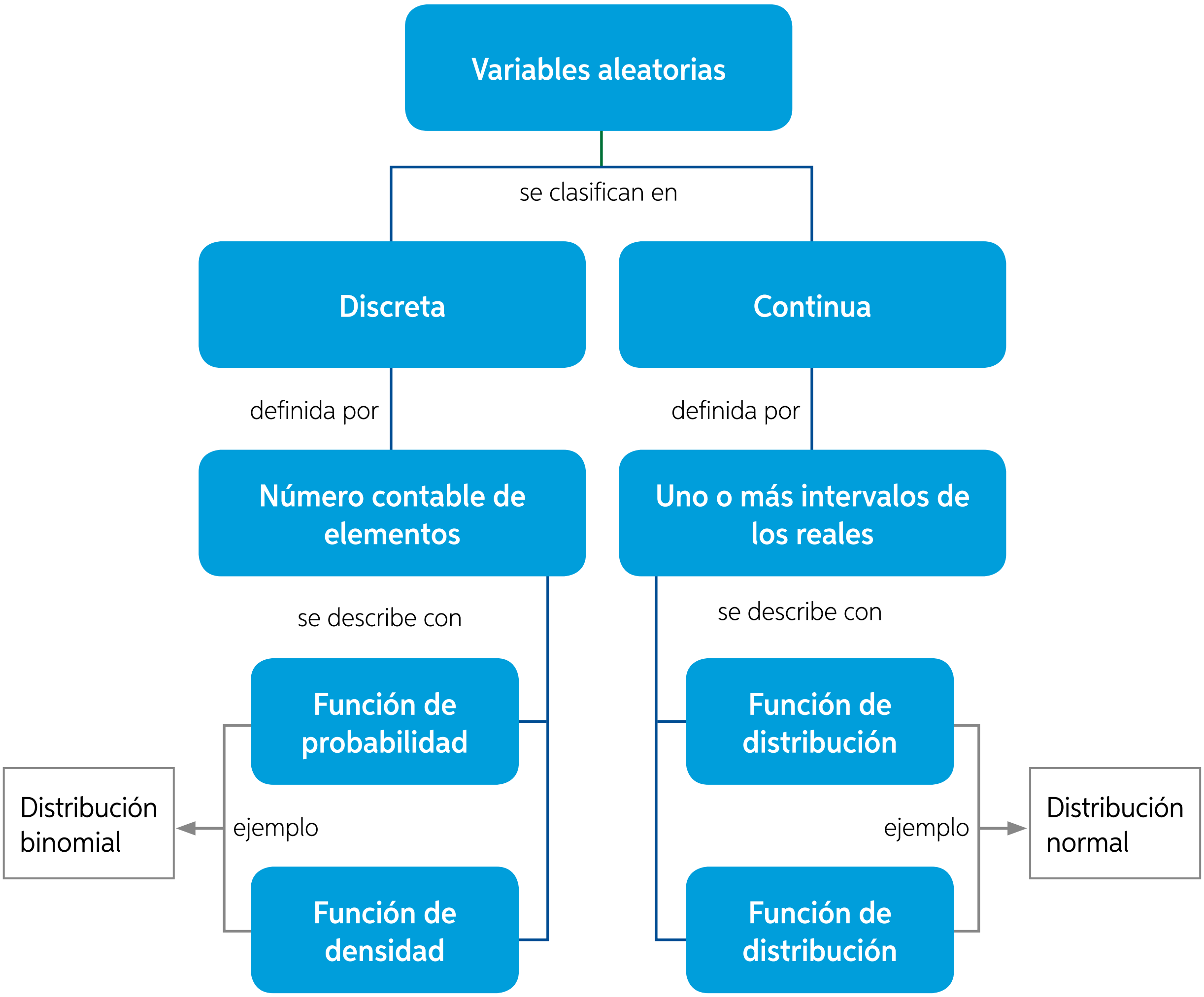
Síntesis

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es un mapa conceptual?

Un mapa conceptual es un organizador visual cuya función básica es la clasificación jerárquica de determinada información. Parte del dato más general, desciende de forma progresiva en niveles con contenido más específico y con un mismo valor jerárquico, y finaliza con un ejemplo para cada criterio.

A continuación, se presenta un mapa conceptual con algunos de los conceptos estudiados a lo largo de la Unidad.



Ahora, hazlo tú

1. Escoge una Lección de la Unidad y sintetiza lo estudiado mediante un mapa conceptual.
2. Comparte con tu curso el mapa conceptual que elaboraste y responde:
   - ¿Qué aspecto consideró cada uno para su creación?
   - ¿Qué diferencias y semejanzas observas en los diferentes mapas conceptuales?

Repaso

Realiza las siguientes actividades.

Lección 5: Toma de decisiones analizando la distribución binomial

1. Lee la siguiente información y responde:

   Se aplica un examen de Matemática a tercero medio, el cual contempla 22 preguntas, todas independientes entre sí, de 5 alternativas, de las cuales solo una es correcta. Gonzalo comenta que no estudió y que elegirá sus respuestas al azar. A partir de la información, responde lo siguiente:

   a. ¿Cuál es la variable de Bernoulli asociada?, ¿cuáles son sus parámetros?
   b. Determina la función binomial asociada.
   c. ¿Crees que Gonzalo contestará correctamente al menos 5 preguntas?
   d. ¿Cuántas preguntas esperarías que contestara correctamente?

Lección 6: Toma de decisiones analizando la distribución normal

2. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.

   Sabiendo que la vida útil de este aparato tecnológico está bajo una distribución normal, ¿cuál será la probabilidad de que un computador recién comprado dure más 4 años?

3. Desde un centro de nutrición se tomó una muestra aleatoria de 90 personas que arrojó los siguientes datos:

   $\sigma^2 = 9$ kg $\qquad \bar{x} = 90$ kg

   a. Construye un intervalo de confianza del 99 % de para la media poblacional.
   b. Construye un intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional.
   c. ¿Entre qué valores dirías que se encuentra la media?

¿Qué aprendí?

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

1. Se realiza un estudio para conocer la eficiencia de cierto medicamento para perros, y se determinó que este presenta una probabilidad de reacción negativa de 0,15. Si consideráramos una muestra de 30 perros, determina:
   a. Probabilidad de las siguientes situaciones:
      - Ningún perro tenga reacción negativa.
      - Un perro tenga reacción negativa.
      - Más de 2 perros tengan reacciones negativas.

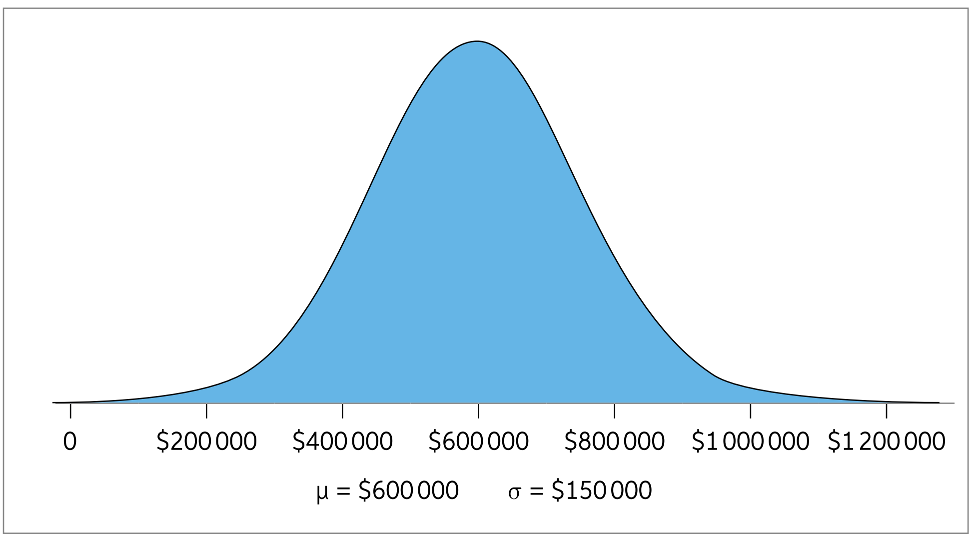
   b. ¿Considerarías que el medicamento es seguro? Argumenta tu respuesta

2. En un examen se deben superar 4 pruebas independientes entre sí con la misma probabilidad de fallar. El número de fallos obtenidos por 100 personas se resume en la siguiente tabla:

N° pruebas fallidas	0	1	2	3	4
N° de personas	24	40	26	8	2

   a. ¿Cuál es la media aritmética de la muestra?
   b. Ajusta la distribución anterior a un experimento binomial. Determina el parámetro *p* despejándolo de $\overline{x} = n \cdot p$.
   c. Compara los valores de la tabla con los obtenidos de la distribución binomial. ¿Corresponde a un buen ajuste?

3. En un banco los montos de dinero de las solicitudes de crédito tienen la siguiente distribución normal:



   Si se recibe una solicitud de préstamo, calcula la probabilidad de que el monto:
   a. Sea al menos $800 000.
   b. Sea al menos $800 000 y a lo más $1 200 000.
   c. Sea superior a $200 000.

4. Se hace un experimento exponiendo a un antibiótico una muestra aleatoria de 50 bacterias, las que demoran un tiempo promedio de 30 horas en morir. Si en la población ese tiempo se distribuye $N(\mu, 5)$:
   a. Determina un intervalo de confianza al 99 % para el tiempo promedio de muerte de las bacterias expuestas a dicho antibiótico.
   b. Si las bacterias no son completamente eliminadas durante el tratamiento, las sobrevivientes mutarán para generar resistencia al antibiótico. ¿Cuánto tiempo recomendarías tratar con antibióticos a un paciente?

5. Un basquetbolista encesta por partido aproximadamente el 75 % de sus lanzamientos de 3 puntos. Si en un partido realiza 30 lanzamientos de 3 puntos, responde:
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste más de 20 lanzamientos de 3 puntos?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste más de 8 y menos de 25 lanzamientos de 3 puntos?
   c. Si el rendimiento se mantiene, ¿cuántos puntos aproximadamente anotará el jugador por partido?

6. Los tiempos de espera (en minutos) en un paradero de dos empresas de buses interurbanos son modelados con las siguientes distribuciones normales:

Distribución $N(12, 3)$

Distribución $N(8, 2)$

   Según esa información, ¿en cuál existe mayor probabilidad de superar los 5 minutos de espera? Argumenta.

7. Una artesano toma X horas en crear un determinado producto. Si X sigue una distribución $N(10,2)$, determina la probabilidad de que se tarde:
   a. Entre 8 y 13 horas.
   b. Menos de 7 horas.
   c. Más de 11 horas.
   d. Entre 12 y 16 horas.
   e. Entre 5,5 y 13,9 horas.

Reflexiono

- ¿Qué conceptos de la lección entendiste bien? ¿Cómo lo podrías evidenciar?
- ¿Qué importancia tienen los modelos estadísticos para tomar decisiones en situaciones de incerteza? Explica con tus palabras.

P ¿Qué decisiones en situaciones de incerteza tomaste en la realización del proyecto de Unidad?, ¿cómo las justificaste? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

Unidad 4

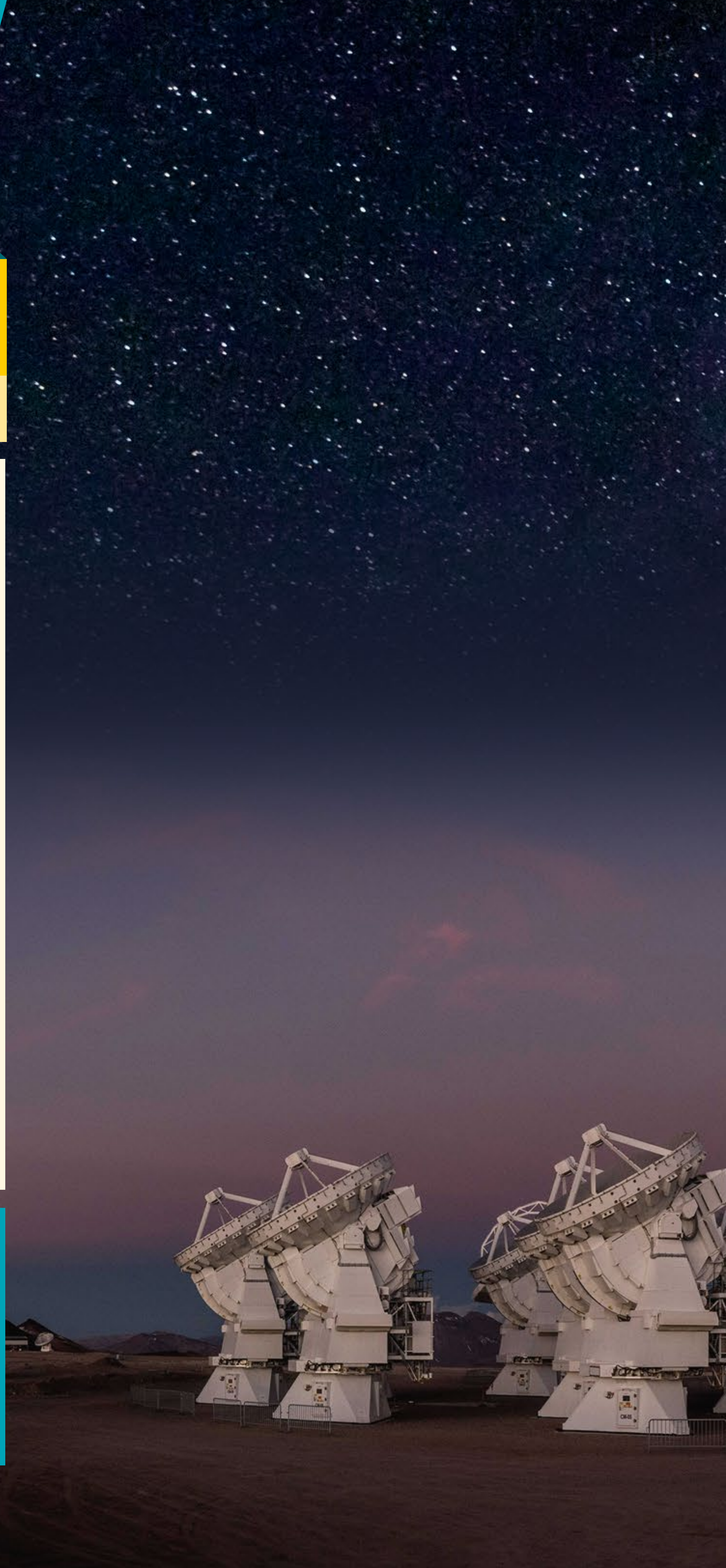
GEOMETRÍA CON COORDENADAS

Geometría

Observa la imagen. Luego, comenta tu respuesta con tu curso.

ALMA es el observatorio con el radiotelescopio más grande del mundo, conformado por 66 antenas, que se ubican en el norte de Chile, en la localidad de Chajnantor, San Pedro de Atacama, a 5000 m sobre el nivel del mar.

1. ALMA busca observar la mayor área posible de cielo. ¿Por qué crees que estas antenas están a la mayor distancia entre ellas?
2. ¿Cómo crees que se puede ubicar las estrellas en el cielo?, ¿cuál considerarías tú como el punto (0, 0) en el cielo nocturno?
3. Supongamos que estamos sobre un plano cartesiano y que cada antena representa un punto de él. ¿Dónde te situarías para determinar la distancia que existe entre una de ellas y tú? ¿Qué información sería de utilidad para determinarla?



En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

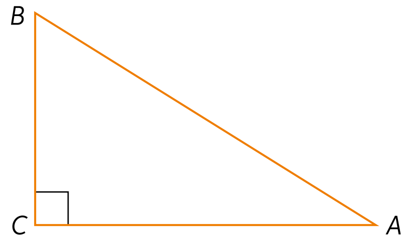
- Resolución de problemas con rectas en el plano cartesiano.
- Resolución de problemas con circunferencia en el plano cartesiano.


PM
03
PM-03

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Sea el triángulo *ABC* rectángulo en *C*, calcula la medida de las siguientes longitudes:



   a. Si $BC = 3$ cm y $AC = 4$ cm, ¿cuánto mide el segmento *AB*?
   b. Si $AB = 10$ cm y $BC = 6$ cm, ¿cuánto mide el segmento *AC*?
   c. Si $AC = 5$ cm y $BC = 3$ cm, ¿cuánto mide el segmento *AB*?
   d. Si $AC = 6$ cm y $AB = 12$ cm, ¿cuánto mide el segmento *BC*?

2. Ubica los siguientes puntos en un plano cartesiano.
   a. $N(3, 2)$
   b. $R(-2, 2)$
   c. $A(-5, -1)$
   d. $L(2, -3)$
   e. $M\left(0, \frac{1}{4}\right)$

3. Grafica las siguientes rectas en un plano cartesiano utilizando dos puntos de ella.
   a. $y = x + 2$
   b. $y = 4x$
   c. $x + y = 1$
   d. $2x - y + 4 = 0$
   e. $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 2$
   f. $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = \frac{3}{4}$

4. Factoriza las expresiones algebraicas.
   a. $3x - 6y$
   b. $4xy - 10x + 1$
   c. $x^2 + 6xy + 9$
   d. $4x^2 - 20xy + 25y^2$
   e. $x^2 + 7x + 10$
   f. $9x^2 - 27y^2$

5. Factoriza las siguientes expresiones como cuadrados de binomio mediante completación de cuadrados.
   a. $x^2 + 6x$
   b. $x^2 - 18x$
   c. $25x^2 + 10x$
   d. $4x^2 - 8x$

Reflexiono

- ¿Cómo te autoevaluarías en el uso de expresiones algebraicas y del plano cartesiano? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué dificultades tuviste durante la evaluación?, ¿cómo podrías reforzar aquellos contenidos que te resultaron mas difíciles de trabajar?, ¿a qué crees que se debieron las dificultades?

Lección 7

Resolución de problemas con rectas en el plano

Distancia entre puntos en el plano cartesiano

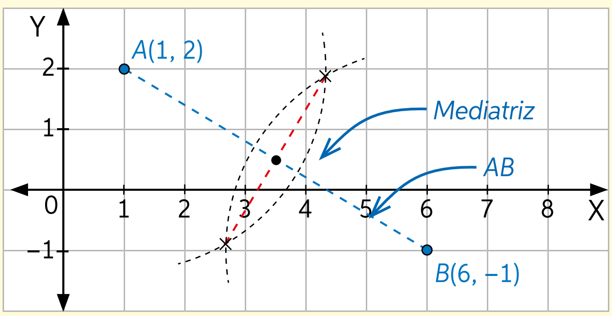
Objetivo: Resolver problemas en el plano cartesiano que involucren puntos.

¿Cómo calculas el módulo de un vector o un complejo?

¿Qué pasos seguirías para determinar el número intermedio de 2 y 11?

1. Analiza la situación y responde:

Si el problema que queremos resolver es encontrar el punto medio entre otros dos puntos del plano, por ejemplo, $A(1, 2)$ y $B(6, -1)$, podemos utilizar un compás para trazar una mediatriz. Luego, trazamos el segmento entre A y B para obtener el punto medio en la intersección del segmento y la mediatriz:



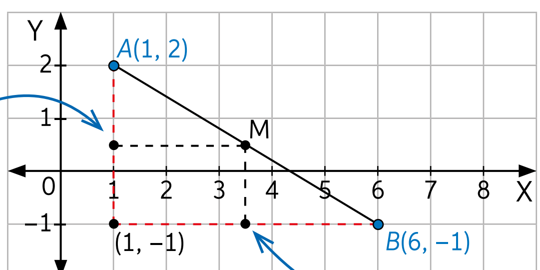
a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio en este caso?, ¿es claro su valor en el gráfico?

b. Discutan en parejas: ¿en qué casos aplicarían la resolución mediante construcciones geométricas y en cuáles no?

c. Distingue los elementos geométricos utilizados en el procedimiento anterior. ¿Seguirías la misma ruta resolviendo de forma algebraica?

Para conocer el punto medio de forma algebraica, determinaremos las coordenadas medias en X e Y. El punto medio de $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ será entonces:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2}$$



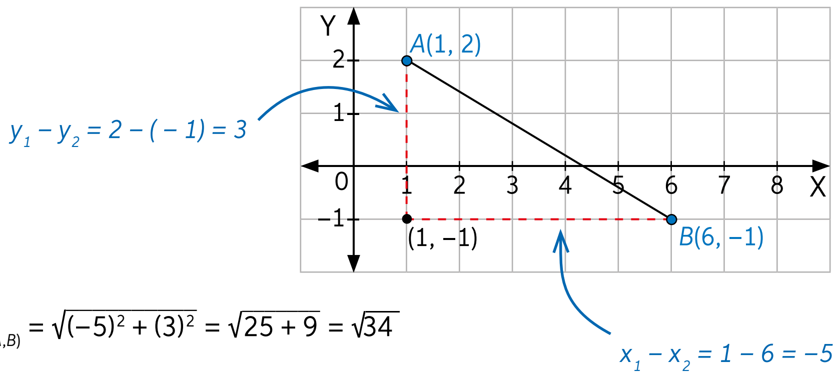
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \qquad \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

¿Se utilizaron los mismos elementos geométricos en esta estrategia de resolución que en la anterior? Explica.

Dados los puntos en el plano cartesiano $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la distancia entre ellos, $d_{(A,B)}$ se calculará como:

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Para el caso anterior, tendremos que:

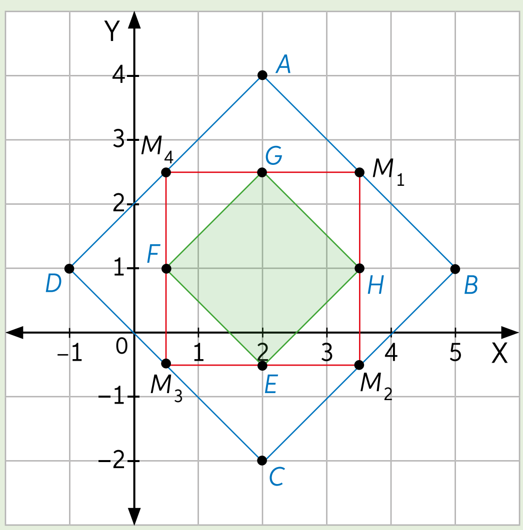


$$d_{(A,B)} = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

¿Cómo explicarías el procedimiento anterior con tus palabras?

2. Lee la información. Luego, realiza las siguientes actividades.

En la siguiente figura, M_1, M_2, M_3 y M_4 son los puntos medios del cuadrilátero *ABCD* y *E*, *F*, *G* y *H* son los puntos medios del cuadrilátero $M_1M_2M_3M_4$.



a. Determina el perímetro de *ABCD*, $M_1M_2M_3M_4$ y *EFGH*

b. ¿Cuántas veces el perímetro de *ABCD* es el perímetro de *EFGH*?, ¿a qué se debe esto?

c. Comprueba que la distancia entre *A* y M_1 es la misma que entre M_1 y *B*.

45

Para concluir

a. ¿Cómo vincularías la distancia entre puntos con el teorema de Pitágoras?

b. Un cuadrado se diferencia de un rombo por la perpendicularidad entre sus lados. ¿Cómo comprobarías algebraicamente si las figuras de la actividad 3 corresponden a cuadrados?

Rectas en el plano

Objetivo: Resolver problemas en el plano cartesiano que involucren puntos y rectas.

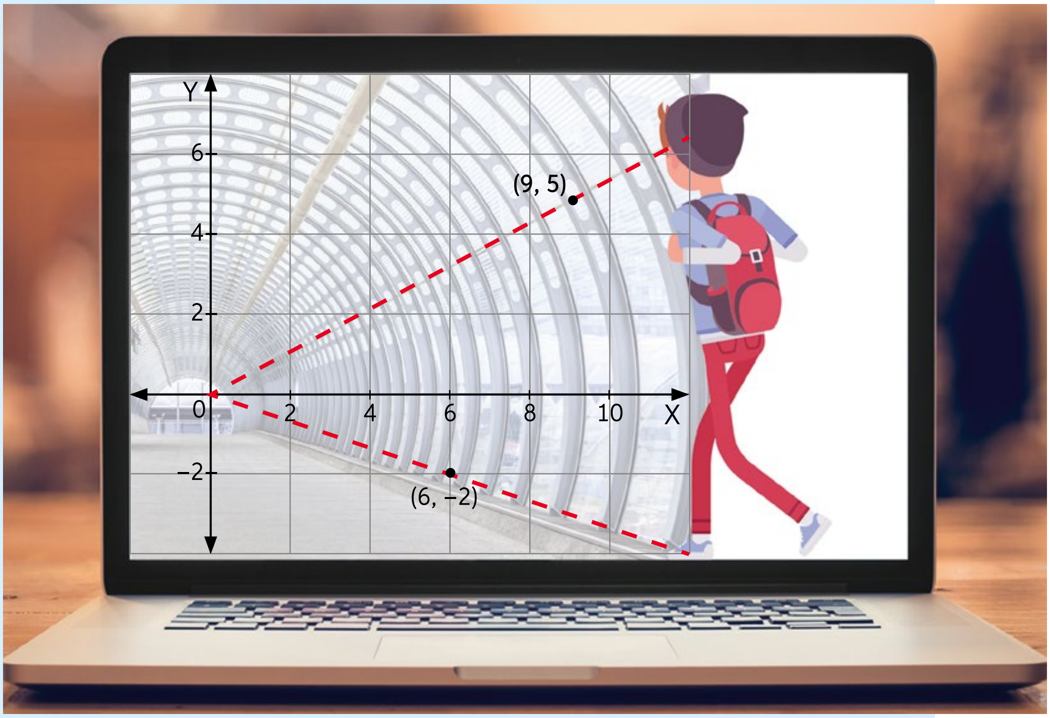
¿Cuántos puntos conforman una línea recta?, ¿cuántos puntos se necesitan para determinarla?

¿Qué entiendes por inclinación?

1. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

El "punto de fuga" es punto situado "en el infinito" en el cual las proyecciones de las rectas paralelas en el espacio convergen para dar la sensación de "profundidad" al dibujo.

Para conservar el tamaño de la ilustración, un artista sitúa el punto de fuga en el origen y traza rectas para ayudarse en la proporción de su ilustración, como muestra en el siguiente esquema:

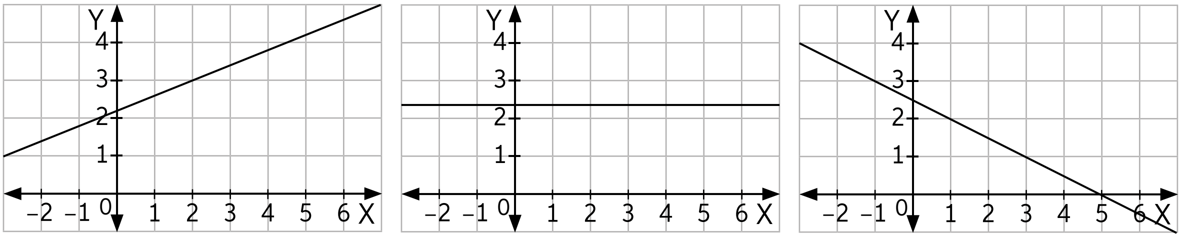


a. ¿Cómo explicas que las "rectas paralelas" convergen al mismo punto?, ¿cómo relacionarías esto con el concepto de "proyección"?
b. ¿Cómo crees que el artista utilizó las líneas y el punto de fuga para ayudarse en su ilustración?
c. ¿Ambas rectas tiene la misma inclinación con respecto al eje *X*?
d. Determina las ecuaciones de cada una de las rectas.
e. ¿Cómo determinas algebraicamente el punto en que se intersecan? En parejas, discutan sus estrategias y compruébenlas utilizando las ecuaciones de las rectas que plantearon anteriormente.

¿Cómo relacionarías la imagen anterior con la homotecia de una figura plana?

La inclinación con respecto al eje X o pendiente (m) de un trazo determinado por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se define mediante:

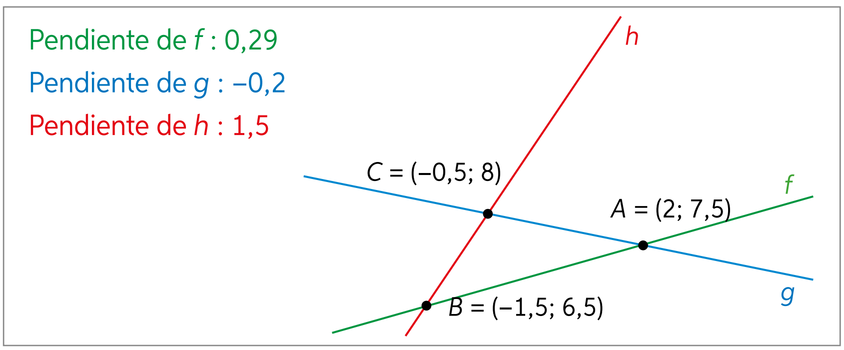
$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



$m > 0$ $m = 0$ $m < 0$

Discutan en parejas, ¿cómo será el gráfico de un trazo con pendiente indefinida?

2. Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP198A** y realiza las siguientes actividades:



a. En parejas, muevan los puntos y respondan: ¿qué condición algebraica deben cumplir las pendientes de las rectas para que los tres puntos se encuentren en la misma recta?
b. Utilizando el recurso, determina el valor de k para que los puntos $A(3, k)$, $B(5, 6)$ y $C(9, 12)$ se encuentren en la misma recta.
c. Expliquen cómo obtener algebraicamente el valor de k.
d. Anota en tu cuaderno 3 tríos de puntos distintos para comprobar algebraicamente la siguiente afirmación: "Dados los puntos A, B y su punto medio M, se tiene que siempre se encuentran en la misma recta". Utiliza el recurso como ayuda.

¿Cómo demostrarías formalmente la afirmación anterior?

Tres puntos, A, B y C, pertenecen a la misma recta, es decir, son **colineales** si se cumple que las pendientes de todos los pares de puntos son equivalentes:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

Llamaremo a la expresión $y = mx + n$ **ecuación principal** de la recta, donde m corresponde a la pendiente y n al coeficiente de posición, y llamaremos **ecuación general** de la recta a la expresión $Ax + By + C = 0$.

¿Qué ventajas tiene una expresión por sobre la otra?

3. Resuelve los siguientes problemas:

a. Sobre una recta se tienen los puntos $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(a, 2a)$. Si B es el punto medio de A y C, ¿cuál es el valor de a?

b. El punto E se encuentra en la recta que contiene $D(2, 0)$ y $F(8, 8)$. Si E divide el segmento DF de tal forma que $d_{(D,E)} = 3 \cdot d_{(E,F)}$:

I. Determina la ecuación de la recta que pasa por D y F.

II. Determina la distancia entre D y F.

III. ¿Cuáles son las coordenadas del punto E?

Compara la estrategia utilizada en los problemas anteriores con la de tus compañeros. ¿Cuál resulta más fácil de aplicar?

Al comparar la posición relativa de la recta L_1: $m_1 \cdot x + n_1 = y$ con la recta L_2: $m_2 \cdot x + n_2 = y$, tendremos que:

- Si $m_1 = m_2$, diremos que ambas rectas son paralelas, además:
  - Si $n_1 = n_2$, las llamaremos paralelas coincidentes.
  - Si $n_1 \neq n_2$, las llamaremos paralelas no coincidentes.
- Si $m_1 \cdot m_2 = -1$, diremos que ambas rectas son perpendiculares.

Utilizaremos $L_1 // L_2$ para denotar paralelas.

Utilizaremos $L_1 \perp L_2$ para denotar perpendiculares.

¿Cómo se relacionarían las condiciones de perpendicularidad entre las rectas de pendiente 0 y pendiente indefinida? Coméntalo con tu profesor.

4. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Para encontrar la ecuación de la simetral entre dos puntos, tenemos que la ecuación que pasa por $A(2, 2)$ y $B(4, 5)$ es L_1: $1{,}5x - 1 = y$.

Determinamos el punto medio C:

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = \left(3, \frac{7}{2}\right)$$

Calculamos la pendiente de la mediatriz:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \frac{3}{2} \cdot m_2 = -1 \rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$$

Remplazamos el punto y la pendiente en la ecuación de L_2: $m_2 x + n_2 = y$:

$-\frac{2}{3} \cdot 3 + n_2 = \frac{7}{2} \rightarrow n_2 = \frac{11}{2}$.

Luego, la mediatriz tiene ecuación L_2: $-\frac{2}{3}x + \frac{11}{2} = y$.

a. Encuentra la ecuación de la simetral de los puntos $C(2, 5)$ y $D(4,8)$.

b. Si la simetral de $E(3, 5)$ y F es L_1: $y = 3x + 2$. Responde:

I. ¿Cuál es la ecuación de la recta L_2 que pasa por E y F?

II. ¿Cuáles son las coordenadas de la intersección de L_1 y L_2?

Actividad de aplicación Diagramas de Voronói en tu comuna

¿Qué haremos? Trazar diagramas de Voronói sobre planos de tu comuna a partir de puntos de referencia.

Planifiquemos

Paso 1: En grupos de 3 o 4 integrantes, elijan algún servicio de su comuna o barrio: comisarias, farmacias, colegios, supermercados, bancos, etc. Utilicen buscadores en línea para encontrar todas las sucursales alrededor de su punto de interés.

Paso 2: Investiguen qué son, para qué se usan y cómo se trazan diagramas de Voronói para un conjunto de puntos.

Ejecutemos

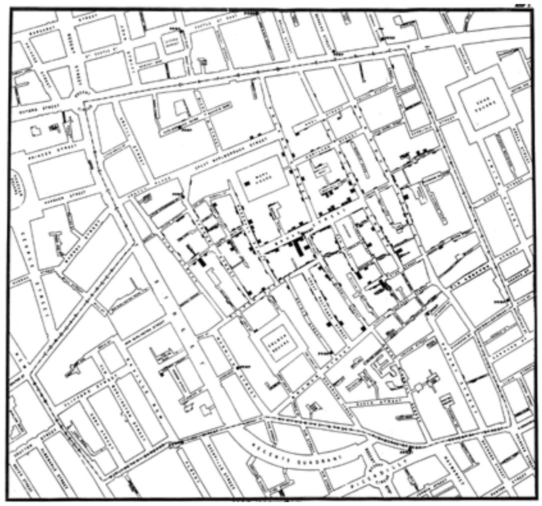
Paso 3: Sobre un mapa de su comuna o barrio (digital o físico) marquen con puntos las direcciones de los servicios hallados en el paso anterior y realicen el diagrama trazando las simetrales.

Paso 4: Estimen la superficie y la cantidad de habitantes por cada región que se forma en el diagrama. Utilicen herramientas digitales para ayudarse.

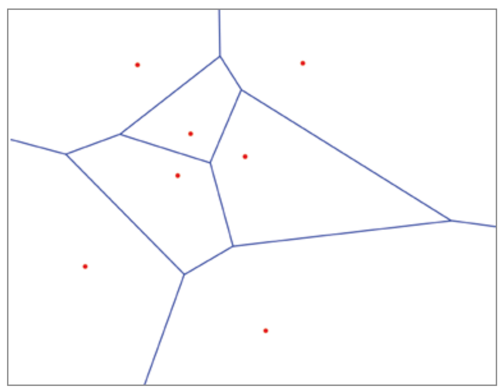
Presentación

Paso 5: Proyecten o muestren un mapa con el diagrama trazado, indicando claramente las sucursales del servicio escogido. En la presentación deben responder las siguientes preguntas:

- ¿Por qué eligieron dicho servicio?
- ¿Qué elementos utilizaron para trazar el diagrama?
- ¿Cuál sucursal atiende a más personas?
- ¿Cuál atiende a menos personas?
- Elaboren recomendaciones con respecto a la ubicación de futuras sucursales.



Una de las primeras aplicaciones del diagrama de Voronói fue este diagrama de Inglaterra. Fue realizado por John Snow en 1854 para encontrar la fuente de los casos de cólera (marcados como manchas negras).



Pueden utilizar buscadores como Google Maps para encontrar las ubicaciones de interés y modelarla matemáticamente insertando la imagen en Geogebra.

46 y 47

Para concluir

a. ¿Cuál es la pendiente y el coeficiente de posición de la recta $Ax + By + C = 0$?

b. ¿Qué ventajas y desventajas tienen el cálculo algebraico y el razonamiento geométrico de los problemas desarrollados a lo largo del tema?

c. ¿Por qué consideras tú que es importante acompañar el desarrollo de los problemas con un esquema o bosquejo de la situación?

Distancia de un punto a una recta

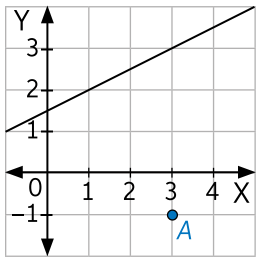
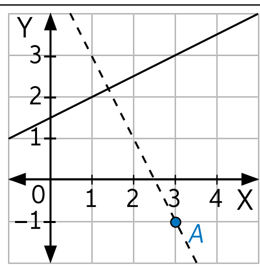
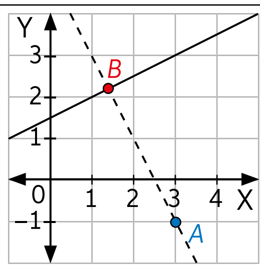
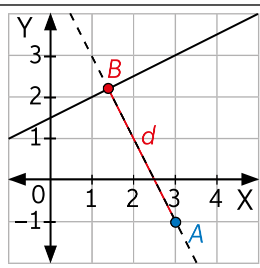
Objetivo: Resolver problemas que involucren distancias entre puntos y rectas.

Marca dos puntos en tu cuaderno. Si quieres llegar de un punto al otro, ¿cómo debe ser el camino para que la distancia recorrida sea la mínima?

Traza una recta y un punto fuera de ella. ¿Cuál crees que es el camino más corto para llegar del punto a la recta?

1. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

Al revisar un libro de geometría analítica, Ana y Rubén encontraron el procedimiento necesario para determinar la distancia de un punto a una recta:

	Paso geométrico	Gráfico	Paso algebraico
I	Indica la recta L_1 y el punto A.		Identifica la ecuación general de la recta: L: $Ax + By + C = 0$ y las coordenadas del punto: $A(p, q)$.
II	Traza una recta L_2 perpendicular a L_1 que pase por A.		Calcula la ecuación de la recta L_2 que pasa por P y es perpendicular a L_1.
III	Marca el punto de intersección entre L_1 y L_2.		Calcula el punto B de intersección entre L_1 y L_2.
IV	Mide con una regla la distancia entre ambos puntos.		Calcula la distancia entre A y B.

Utiliza los pasos anteriores para determinar la distancia entre:

a. L_1: $x + y - 4 = 0$; $P(5, 3)$

b. L_2: $x + y - 4 = 0$; $Q(0, 2)$

c. L_3: $x - 2y + 6 = 0$; $R(-3, 4)$

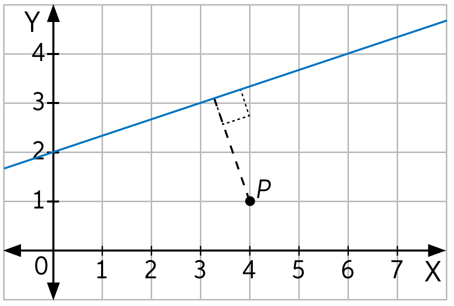
d. L_4: $3x + y - 6 = 0$; $S(4, 4)$

¿Cuál es la pendiente de la recta perpendicular a L: $Ax + By + C = 0$?

La distancia mínima entre un punto P y una recta L corresponde al largo del segmento perpendicular a L que pase por P.

Si la recta L tiene por ecuación general $Ax + By + C = 0$ y el punto exterior a la recta P tiene coordenadas (p, q), la distancia se calcula como:

$$d_{(P,L)} = \frac{|Ap + Bq + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Remplaza un punto perteneciente a la recta en la ecuación anterior. ¿Cómo explicas este resultado?

2. Analiza la siguiente situación. Luego, respondan las preguntas en parejas.

En la página siguiente del libro, Ana y Rubén encuentran el siguiente párrafo:

> Para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, L_1 y L_2, basta seleccionar un punto P de cualquiera de ellas y calcular la distancia entre el punto y la recta a la que no pertenece.

Para comprobar si es verdad, seleccionaron las rectas L_1: $3x + y - 6 = 0$ y L_2: $-6x + 3y = 0$. Cada uno tomó un punto distinto de L_2: Ana tomó $P(2, 4)$ y Rubén $Q(8, 16)$. Remplazando en la fórmula, obtuvieron:

$$d_{(P,L_1)} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 - 6|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|4|}{\sqrt{10}} \approx 1,26$$

$$d_{(Q,L_1)} = \frac{|3 \cdot 8 + 16 - 6|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{34}{\sqrt{10}} \approx 10,75$$

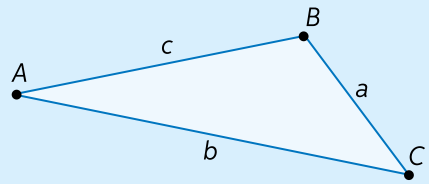
a. ¿Cómo explicarías que la distancia no fue constante?
b. Grafica ambas rectas en el plano cartesiano. ¿Qué observas?
c. ¿Cómo evitarías caer en el mismo error que Ana y Rubén?

3. Realiza un bosquejo. Luego, calcula las siguientes distancias:
a. L_1: $3x + 4y - 12 = 0$ al origen.
b. L_2: $5x + 5y - 10 = 0$ y $A(2, 1)$.
c. L_3: $x + y - 1 = 0$ y L_4: $x + y - 10 = 0$
d. La distancia de un punto $P(p, q)$ con respecto a:
   I. El eje X.
   II. El eje Y.
   III. La recta $y = x$.

¿Qué regularidad observaste en el ejercicio anterior?, ¿cómo la justificarías gráficamente?

4. Analiza la siguiente situación. Luego, resuelve los problemas.

La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo del cual se conoce la medida de todos sus lados.



El área se calcula mediante el semiperímetro $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, teniendo que:

$$Área_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Se quiere determinar el área del triángulo definido por los vértices $A(2, 5)$, $B(-8, -2)$ y $C(4, -2)$.

a. ¿Qué cálculos será necesario realizar para resolver el problema mediante la fórmula de Herón? Realiza un bosquejo de la situación.
b. Determina la medida de los lados y el semiperímetro del triángulo.
c. Calcula el área del triángulo utilizando la fórmula de Herón.
d. ¿Cómo calcularías el área del triángulo sin la fórmula de Herón?, ¿qué distancias y ecuaciones son necesarias para este procedimiento? Discútanlo en grupos y apóyense con un esquema.
e. Determina mediante el procedimiento que describieron anteriormente el área del triángulo.
f. Discutan en parejas: ¿cuál de los procedimientos anteriores utilizarías para calcular el área de un cuadrilátero?, ¿y de un pentágono?, ¿qué estrategia de resolución involucra menos cálculos para cada uno?
g. Determina el área del cuadrilátero $ABCD$ definido por los vértices: $A(7, 4)$, $B(8, -1)$, $C(2, -2)$ y $D(-4, 1)$.

¿En qué casos utilizarías cada procedimiento?, ¿cuál involucra menos cálculos para cada caso?

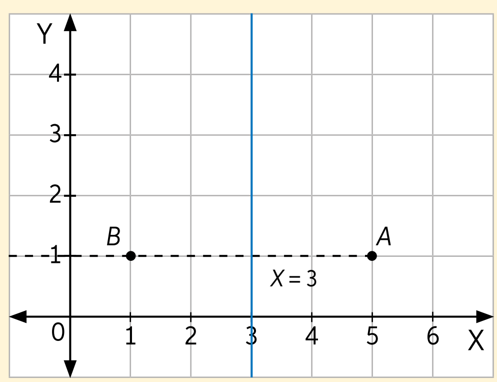
48 y 49

Para concluir

a. Calcula la distancia entre el punto $P(p, q)$ y la recta L: $y = mx + n$.
b. Al intentar encontrar un punto a 2 unidades de distancia con respecto a la recta $x = 3$ que pasa por la recta $y = 1$, se utilizó la siguiente ecuación:

$$2 = \frac{|x-3|}{\sqrt{1}} \rightarrow 2 = |x-3| \rightarrow 2 = x - 3 \rightarrow x = 5$$

Se obtiene el punto $Q(5, 1)$. Sin embargo, al desarrollar gráficamente, se observan dos puntos distintos que cumplen dicha condición. ¿Por qué ocurre esto? ¿Cómo lo explicarías?



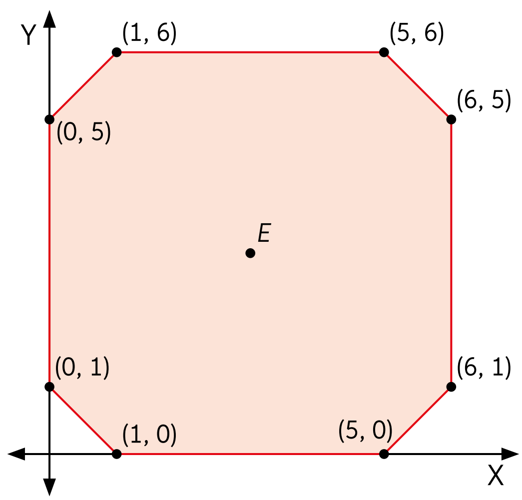
Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Analiza la siguiente situación y responde
   Se digitaliza el siguiente plano mediante un software:

   a. ¿Corresponde a un rectángulo? Compruébalo mediante las ecuaciones de las rectas y distancias.
   b. ¿Cuántos metros cuadrados construidos tendrá?
   c. Si se quiere construir en el punto medio de la figura, ¿cuáles son las coordenadas?

2. Las rectas L_1: $3x + 3y - 4 = 0$ y L_2: $x + y - 6 = 0$ son las ecuaciones de los segmentos opuestos de un cuadrado. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?

3. En la siguiente figura el punto E equidista de todos los lados del polígono. Determina sus coordenadas.



Reflexiono

50

- Haz una lista de los contenidos y habilidades matemáticas que crees que se deben dominar para determinar la distancia entre una recta y un punto. ¿Con qué contenidos te sientes más seguro?
- ¿Qué semejanzas tienen la Geometría plana y la trabajada en la Unidad? Explica.

Lección 8

Resolución de problemas con circunferencias en el plano cartesiano

Ecuación de la circunferencia

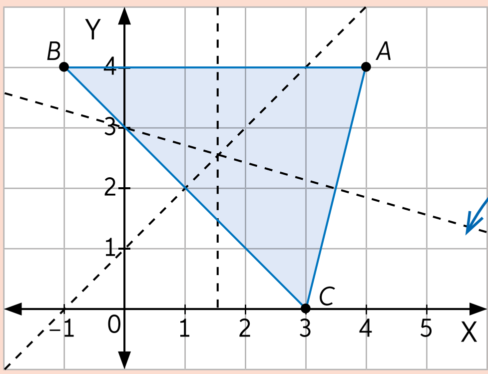
Objetivo: Resolver problemas en el plano cartesiano que involucren circunferencias.

Al determinar un punto que se encuentre a 5 unidades de distancia del origen, se obtiene (3, 4). ¿Es el único punto que cumple esta condición?

¿Cuál es la diferencia entre el círculo y la circunferencia?

1. Analiza la situación. Luego, responde las preguntas para resolver el problema.

Se quiere comprobar algebraicamente que la intersección de las simetrales es equidistante de los tres vértices de un triángulo, es decir, se encuentra a la misma distancia de ellos. Considera los siguientes puntos:



Recuerda que las simetrales de un triángulo son perpendiculares al lado y pasan por el punto medio del segmento.

Se intersecan en un solo punto llamado circuncentro.

a. Calcula los puntos medios de los segmentos *a*, *b* y *c*.
b. Determina las ecuaciones de las simetrales.
c. ¿En qué punto se intersecan las tres simetrales?
d. ¿Cuál es la distancia de cada uno de los vértices al circuncentro?
e. Ingresa a www.enlacesmineduc.cl con el código **T20M4MP205A**. Luego, realiza las siguientes actividades:
   I. Utilizando el recurso, comprueba que el circuncentro se encuentra a la misma distancia de los tres puntos. Puedes ayudarte con la herramienta de distancia entre dos puntos.
   II. Con la herramienta de circunferencia, crea una con centro en *O*. ¿A qué elemento de la circunferencia corresponden los segmentos *AO*, *BO* y *CO*?
   III. Analiza la siguiente información. Luego, responde junto con tu curso.

“El circuncentro corresponde al centro de la circunferencia circunscrita del triángulo, es decir, es el punto que equidista de los tres vértices”.

¿Cómo podrías relacionar la fórmula de distancia en el plano con la información anterior? Identifica qué datos son variables y cuáles constantes en el caso del triángulo *ABC*.

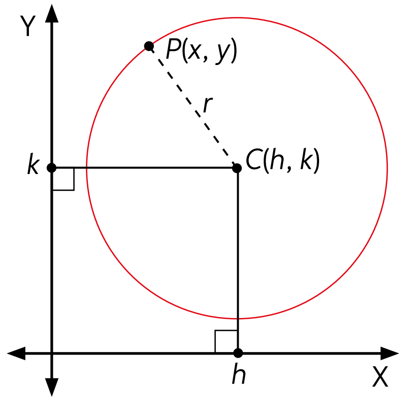
¿Cómo relacionarías la circunferencia con la fórmula de distancia en el plano?

Definiremos la circunferencia en el plano cartesiano como el conjunto de puntos $P(x, y)$ que cumple la condición de encontrarse a una distancia r mayor que 0, llamada radio, de un punto $C(h, k)$, llamado centro. La definición anterior nos dice que todos los puntos que pertenezcan a la circunferencia cumplirán la condición de:

$$d_{(P,C)} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Por lo tanto, la **ecuación principal** de la circunferencia con centro en $C(h, k)$ y radio r es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



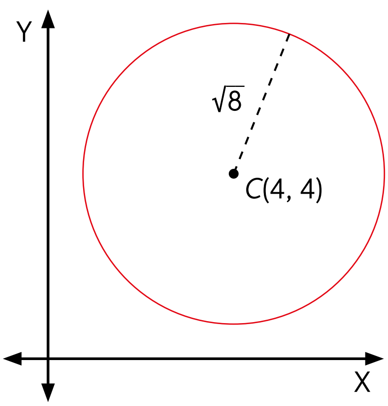
2. Determina la ecuación de las siguientes circunferencias. Guíate por el ejemplo.

Para determinar el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a 8 unidades de distancia del centro $C(-2, 0)$, reemplazamos los datos $r = 8$ y $C(-2, 0)$ y obtenemos la ecuación:

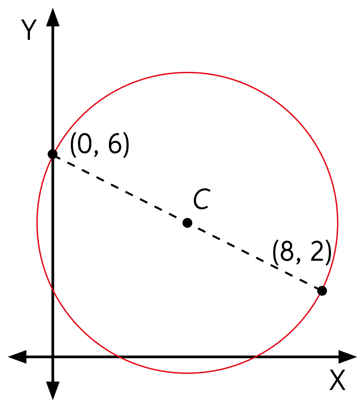
$$(x-(-2))^2 + (y-0)^2 = 8^2$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 64$$

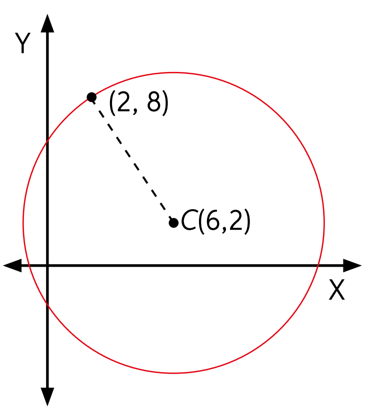
a.



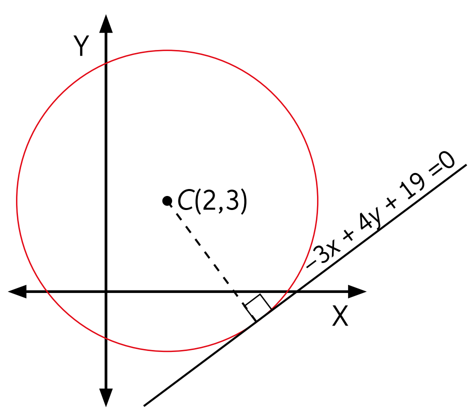
c.



b.



d.



¿Qué conocimientos de la Lección anterior debiste utilizar?

3. Al desarrollar la ecuación principal de la circunferencia, se obtuvo:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 19 = 0$$

a. Si se sabe que el centro es (3, 4), ¿cuál es el valor del radio de la ecuación de la circunferencia anterior?

b. ¿Qué relación tienen los coeficientes de x e y con las coordenadas del centro?

c. ¿Cómo relacionarías la fórmula principal de una circunferencia, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, con la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$?

Al desarrollar los cuadrados de binomios de la ecuación principal e igualarla a 0, se obtiene la **ecuación general** de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si se quiere determinar si un punto pertenece a la circunferencia, ¿cuál ecuación utilizarías?

4. Transforma de forma general a forma principal. Guíate por el ejemplo:

Determinar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y - 9 = 0$

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y - 9 = 0 / \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

Luego, al asociar sus términos, queda:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 3$$

Sumar $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ Sumar $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Recuerda que en el desarrollo de $(a + b)^2$ obtenemos $a^2 + 2ab + b^2$.

Es decir, es una circunferencia de centro $C(2, -3)$ y radio $r = 4$.

a. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 36 = 0$

c. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$

5. Analiza el siguiente procedimiento. Luego, responde las preguntas.

Para determinar la ecuación que pasa por (10, –1); (2, –1); (10, 7):

Paso 1: Remplazamos cada punto (x, y) en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 10^2 + (-1)^2 + D \cdot 10 + E \cdot (-1) + F = 0 \\ 2^2 + (-1)^2 + D \cdot 2 + E \cdot (-1) + F = 0 \\ 10^2 + 7^2 + D \cdot 10 + E \cdot 7 + F = 0 \end{cases}$$

Paso 2: Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos: $D = -12$, $E = -6$ y $F = 13$.

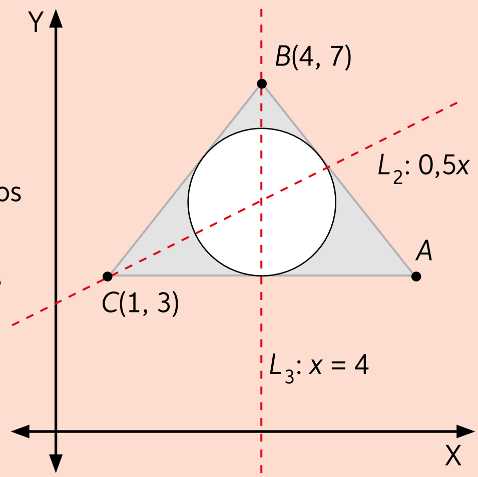
a. ¿Cuál es la ecuación final obtenida?

b. ¿Cuáles son los valores del radio y el centro?

6. Analiza la siguiente información. Luego, resuelve el problema.

El incentro corresponde a la intersección de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo. Su intersección forma la circunferencia inscrita tangente a cada uno de los lados del triángulo.

En la figura, el triángulo *ABC* es isósceles de base *AC*, y L_2 y L_3 son bisectrices de los ángulos *ACB* y *CBA* respectivamente.



Determina:

a. Las coordenadas de *A*.

b. La ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo.

c. La ecuación de la recta L_1, bisectriz del ángulo *BAC*.

d. El área de la circunferencia inscrita.

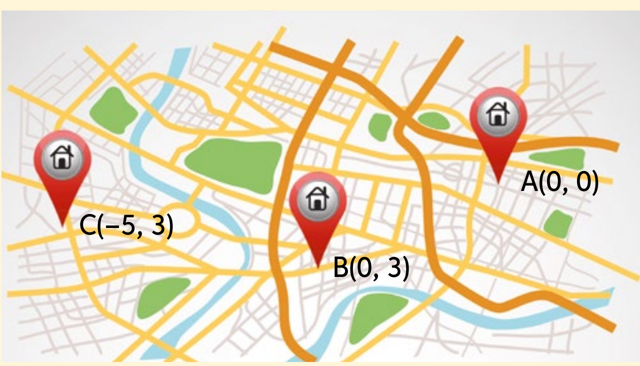
e. El área pintada.

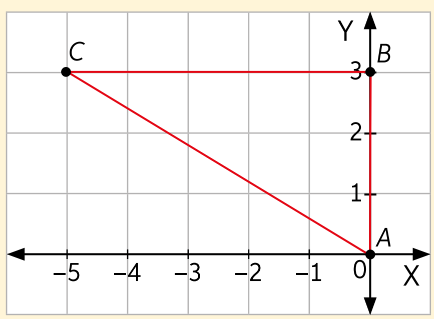
f. Determina la ecuación de la circunferencia circunscrita. ¿Cuál es la diferencia entre los radios de la circunferencia inscrita y la circunscrita?

51 y 52

Para concluir

a. Se quiere arrendar un local para una tienda de videojuegos en un punto que se encuentre a la misma distancia de los 3 colegios.





Determina la ecuación de la circunferencia circunscrita a los tres puntos mediante:

- Las simetrales del triángulo *ABC* y su intersección.
- El reemplazo de los puntos en la ecuación general de la circunferencia.

b. ¿Cuál método es más eficiente para solucionar el problema anterior? Justifica tu respuesta.

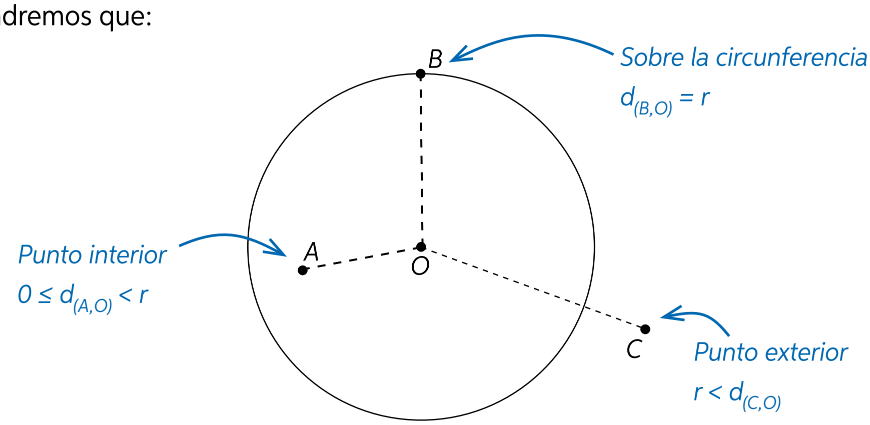
Posición relativa a las circunferencias

Objetivo: Resolver problemas que involucren posición relativa a circunferencias.

¿Cómo se relaciona la distancia entre recta y punto con la distancia entre puntos?

¿Qué diferencia tienen las ecuaciones general y principal de la circunferencia?

Al calcular la distancia del punto $P(x, y)$ al centro de la circunferencia $O(h, k)$, tendremos que:



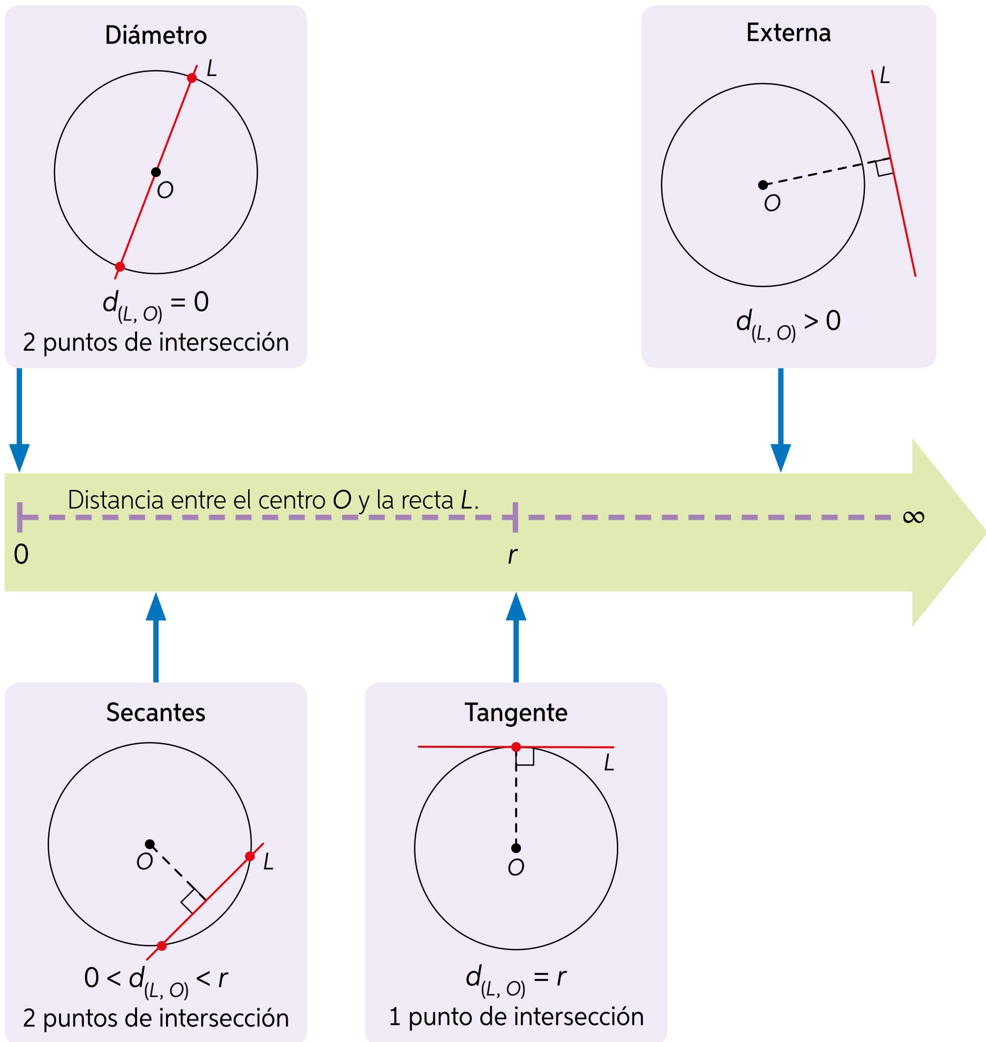
¿De qué otra forma puedes comprobar si un punto se encuentra en la circunferencia?

1. Ingresa con el código **T20M4MP209A** a www.enlacesmineduc.cl. Luego, realiza las actividades:
   a. ¿Qué ocurre cuando la distancia entre el punto P y el centro es 0?
   b. Determina el radio y centro de C: $x^2 + y^2 - 24x - 4y + 144 = 0$. Modifica los parámetros del recurso para encontrar al menos 3 puntos internos, 3 puntos externos y 3 puntos sobre la circunferencia.
   c. ¿Con cuál relación algebraica describirías los puntos que se encuentran dentro de C?, ¿y con cuál describirías los puntos fuera de C?

2. Se definen los límites de una zona por C: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 31 = 0$.
   a. Determina el radio y el centro de la circunferencia anterior.
   b. Utiliza la ecuación principal de la circunferencia para plantear la inecuación de todos los puntos que se encuentran al interior de C.
   c. Utiliza la ecuación general de la circunferencia para plantear la inecuación de todos los puntos que se encuentran fuera de C.
   d. ¿Entre qué valores se debe encontrar a para que el punto $P_1(a, 0)$ sea un punto interior?
   e. ¿Entre qué valores se debe encontrar b para que el punto $P_2(1, b)$ sea un punto exterior?
   f. ¿Qué valores puede tomar c para que el punto $P_3(c, 2c)$ pertenezca a C?

¿Cómo interpretarías geométricamente todos los puntos $(c, 2c)$ con cualquier valor real de c?, ¿qué figura forman?, ¿qué tipo de ejercicio estamos resolviendo geométricamente al encontrar los puntos de $(c, 2c)$ que pertenezcan a C?

Al calcular la distancia de una recta L: $Ax + By + C = 0$ al centro de la circunferencia $O(h, k)$ de radio r, tendremos que su posición relativa será:



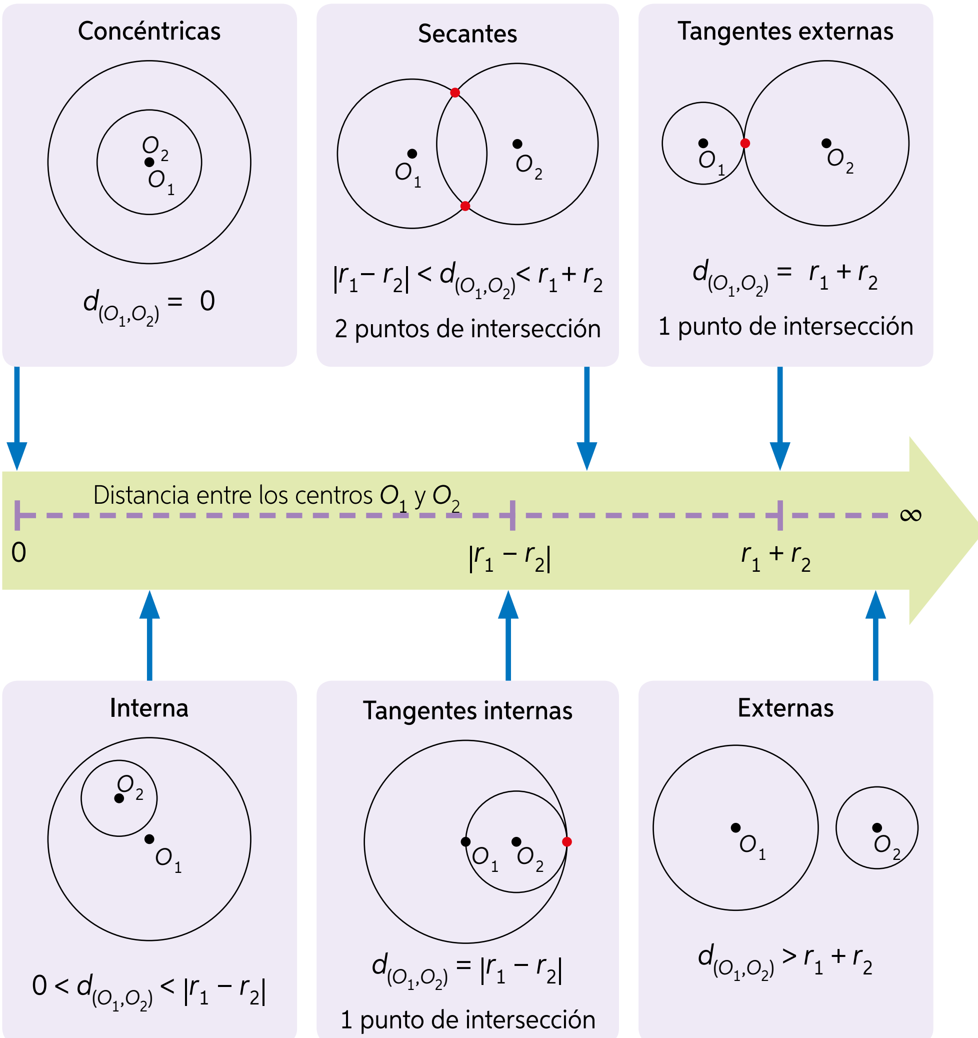
3. Ingresa con el código **T20M4MP210A** a www.enlacesmineduc.cl y comprueba las condiciones anteriores para la circunferencia y las rectas.

   a. Para cada uno de los 4 casos descritos anteriormente, encuentra un par de rectas que cumplan las condiciones de distancia para una misma circunferencia. Escríbelas en tu cuaderno junto a un bosquejo de la gráfica.

   b. ¿Para qué casos se comprueban las siguientes afirmaciones? Discute tus conclusiones en grupos de 2 a 4 personas.

   - La recta que contiene el segmento que va desde el centro al punto medio de las intersecciones corresponde a la simetral de los puntos de intersección.
   - La simetral de los puntos de intersección está dada por la recta que pasa por el punto medio de ellos y el centro.

Para determinar la posición relativa de las circunferencias $C_1: (x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = r_1^{\,2}$ y $C_2: (x - h_2)^2 + (y - k_2)^2 = r_2^{\,2}$, calcularemos la distancia entre sus centros, $O_1(h_1, k_1)$ y $O_2(h_2, k_2)$, y la compararemos con la suma y la diferencia absoluta de sus radios:



4. Ingresa el código **T20M4MP211A** en www.enlacesmineduc.cl. Luego, en parejas, comprueben las condiciones anteriores de las circunferencias.

   a. Presionen "Zonas" y observen: ¿qué representan las circunferencias en rojo?, ¿cómo la pueden utilizar para encontrar dónde posicionar las circunferencias con ninguna, una o dos intersecciones?

   b. Para el caso de la distancia entre los centros igual a 0: ¿qué ocurre cuando los radios son iguales?, ¿cuántas intersecciones tienen las circunferencias en ese caso?

   c. Para cada uno de los 6 casos descritos anteriormente, encuentren un par de ecuaciones de las circunferencias que cumplan las condiciones. Escríbanlas en su cuaderno junto a un bosquejo de la gráfica.

5. Clasifica los siguientes pares de circunferencia en internas, secantes o externas. Luego, determina sus intersecciones cuando corresponda. Guíate por el ejemplo.

$$\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 = 25 \\ C_2: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

Tenemos que $O_1 = (0, 0)$, $r_1 = 5$, $O_2 = (6, 2)$ y $r_2 = \sqrt{5}$.

Paso 1: Calculamos la distancia entre los centros:

$$d_{(O_1,O_2)} = \sqrt{(0-6)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}32$$

Paso 2: Determinamos los valores de $|r_1 - r_2|$ y $r_1 + r_2$:

$$r_1 + r_2 = 5 + \sqrt{5} \approx 7{,}24$$
$$|r_1 - r_2| = |5 - \sqrt{5}| \approx 2{,}76$$

Paso 3: Concluimos:

Como $|r_1 - r_2| < 6{,}32 < r_1 + r_2$, las circunferencias son secantes.

Paso 4: Despejamos y de C_1:

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$

Paso 5: Remplazamos el valor anterior en C_2:

$$(x-6)^2 + (\sqrt{25-x^2} - 2)^2 = 5, \text{ desarrollando los cuadrados:}$$
$$x^2 - 12x + 36 + \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 + 4\sqrt{25-x^2} + 4 = 5, \text{ simplificando y agrupando:}$$
$$\sqrt{25-x^2} = 3x - 15, \text{ elevando al cuadrado:}$$
$$25 - x^2 = 9x^2 - 90x + 225, \text{ simplificando:}$$
$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Paso 6: Obtenemos el valor de x:

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$
$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 4$$

Paso 7: Obtenemos los valores de y remplazando en una de las circunferencias:

Para $x_1 = 5$:

$C_1: 5^2 + y^2 = 25 \quad y_1 = 0$ obtenemos el punto (5, 0)

Para $x_2 = 4$

$C_1: 4^2 + y^2 = 25 \quad {y_2}^2 = 9$

$y_{2a} = 3 \quad y_{2b}: -3$ obtenemos los puntos (4, 3) y (4, –3)

Paso 8: Verificamos que los puntos (5, 0), (4, 3) pertenecen a C_2, no así (4, –3).

a. $\begin{cases} C_1: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ C_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \\ C_2: (x-9)^2 + (y-1)^2 = 16 \end{cases}$

c. $\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ C_2: x^2 + y^2 - 6y = 16 \end{cases}$

d. $\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 = 9 \\ C_2: (x-2)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} C_1: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ C_2: (x-9)^2 + (y-9)^2 = 25 \end{cases}$

f. $\begin{cases} C_1: (x-3)^2 + y^2 = 16 \\ C_2: x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$

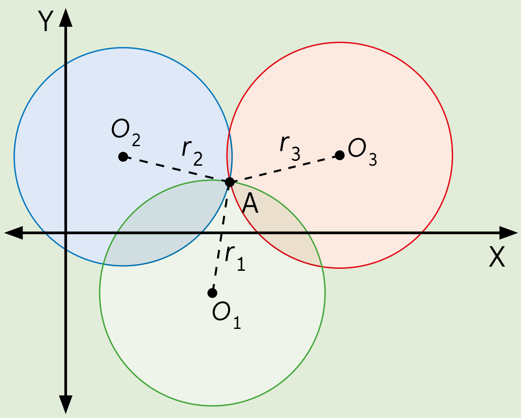
6. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

El hábitat de una especie de aves está limitada por la ecuación $x^2 + y^2 = 16$, mientras que el de su depredador natural está limitado por la ecuación $(x - 4)^2 + y^2 = 36$. Actualmente se está evaluando cuántas estaciones de monitoreo son necesarias para investigar el comportamiento de ambas especies sin intervenir su hábitat.

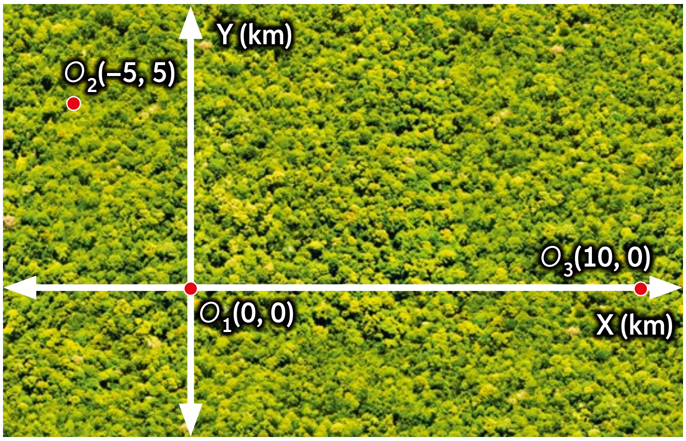
a. Realiza un bosquejo de la situación.
b. ¿Cuál hábitat tiene mayor área?
c. ¿Cuántos puestos de vigilancia crees que se deberían colocar?
d. ¿En qué coordenadas la(s) ubicarías?

7. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

La **trilateración** es un proceso matemático que se utiliza en instrumentos de localización, como el GPS. Para realizarla, se requiere medir las distancias de un punto de interés (A) a otros tres puntos distintos. De esta forma se determinan los puntos de intersección entre los sectores circulares en los que se puede encontrar el punto A.

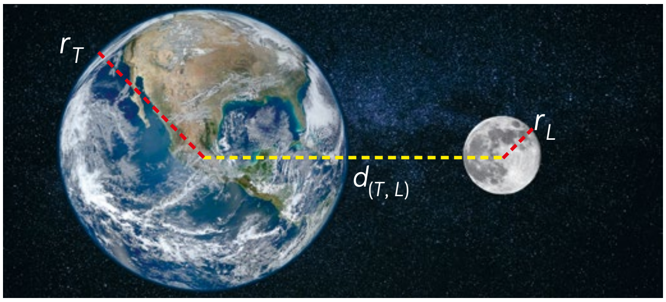


a. ¿Por qué es imposible determinar la posición exacta de A con solo dos o una de las circunferencias?
b. ¿Qué condiciones deben tener los radios y las distancias de las circunferencias para que su posición relativa sea secante?
c. ¿Qué posición relativa tiene el punto con respecto a las 3 circunferencias?
d. A modo de prevención de incendios, este método se utiliza para ubicar el lugar de caída de un rayo en un bosque. Se tienen las siguientes estaciones de monitoreo ubicadas en un plano.



La primera estación O_1 detecta un rayo a 5 km; la segunda, ubicada en O_2, detecta la caída del mismo rayo a 3 km; y la tercera, ubicada en el punto O_3 no lo detecta, ¿Dónde pudo haber caído el rayo?

8. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.



a. ¿Qué ocurriría si se cumple que $r_T + r_L = d_{(T, L))}$?

b. ¿Cuál es la posición relativa de la Luna respecto de la Tierra? ¿Qué relación matemática existe entre sus radios y su distancia?

Actividad de aplicación Antenas

Objetivo: Estudiar y estimar la cobertura de las antenas.

¿Qué haremos? Determinar la posición y cobertura de las antenas.

Planifiquemos

Paso 1: Organícense en grupos de 3 o 4 personas y seleccionen una ubicación o sector de interés para analizar las antenas de telefonía u otros servicios cercanas.

Paso 2: Investiguen el radio de cobertura y la capacidad máxima de usuarios que pueden manejar la antenas. En caso de no contar con el dato, estímenlo aproximadamente.

Analicemos

Paso 3: Modelen la posición de las antenas para ilustrar aproximadamente la cobertura de cada una de ellas. Pueden apoyarse de un mapa digital como Google Maps.

Paso 4: Identifiquen si existe o creen que existirán problemas por la cantidad máxima de usuarios, cobertura u otro tipo.

Presentemos

Paso 5: Realicen una presentación a modo de resumen de su investigación que contenga:
- La ubicación seleccionada.
- La cantidad de antenas seleccionadas.
- Sus conclusiones, estimaciones y predicciones.

Todas las antenas telefónicas se encuentran registradas en el portal de la Subsecretaría de Telecomunicaciones (Subtel) y las puedes revisar en su portal en línea.

53 y 54

Para concluir

a. ¿Por qué todas las comparaciones de posiciones relativas se realizan a partir del centro y el radio de la circunferencia?, ¿cómo relacionas lo anterior con el hecho de que la fórmula de la circunferencia se escriba a partir del centro y el radio?

b. ¿Por qué crees que es importante contrastar los resultados obtenidos algebraicamente con los obtenidos de forma geométrica?

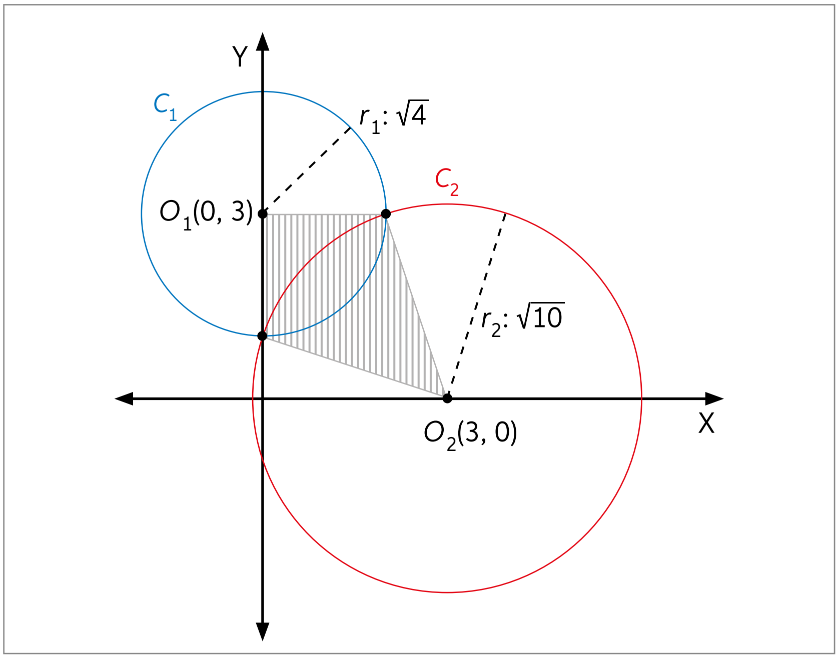
Antes de continuar

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (0, −2); (2, −2); (5, 0).
2. Determina el valor de *a* para que las circunferencias sean tangentes externas:

$$\begin{cases} C_1: x^2 + (y-1)^2 = a \\ C_2: (x-1)^2 + y^2 = a \end{cases}$$

3. Determina la posición relativa de la recta $L: x + y = 0$ a la circunferencia de centro $O(-2, -2)$ y radio 4. Si se intersecan, determina los puntos de corte.
4. Se tiene $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$.
   a. Determina la ecuación de la circunferencia C_2 concéntrica cuyo radio mide la mitad del radio de C_1.
   b. Determina el área comprendida entre C_1 y C_2.
5. Determina el área achurada en la figura.



6. ¿Cuál es la posición relativa del punto medio de los centros de $C_1: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$ y $C_2: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ con respecto a ambas circunferencias?

55

Reflexiono

- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas?, ¿en qué se asemejan a las utilizadas en la Lección anterior? Comenta junto a tu curso.
- ¿Qué ventajas tiene el desarrollo de los problemas mediante software geométrico?, ¿por qué es importante complementar los resultados algebraicos con los geométricos?

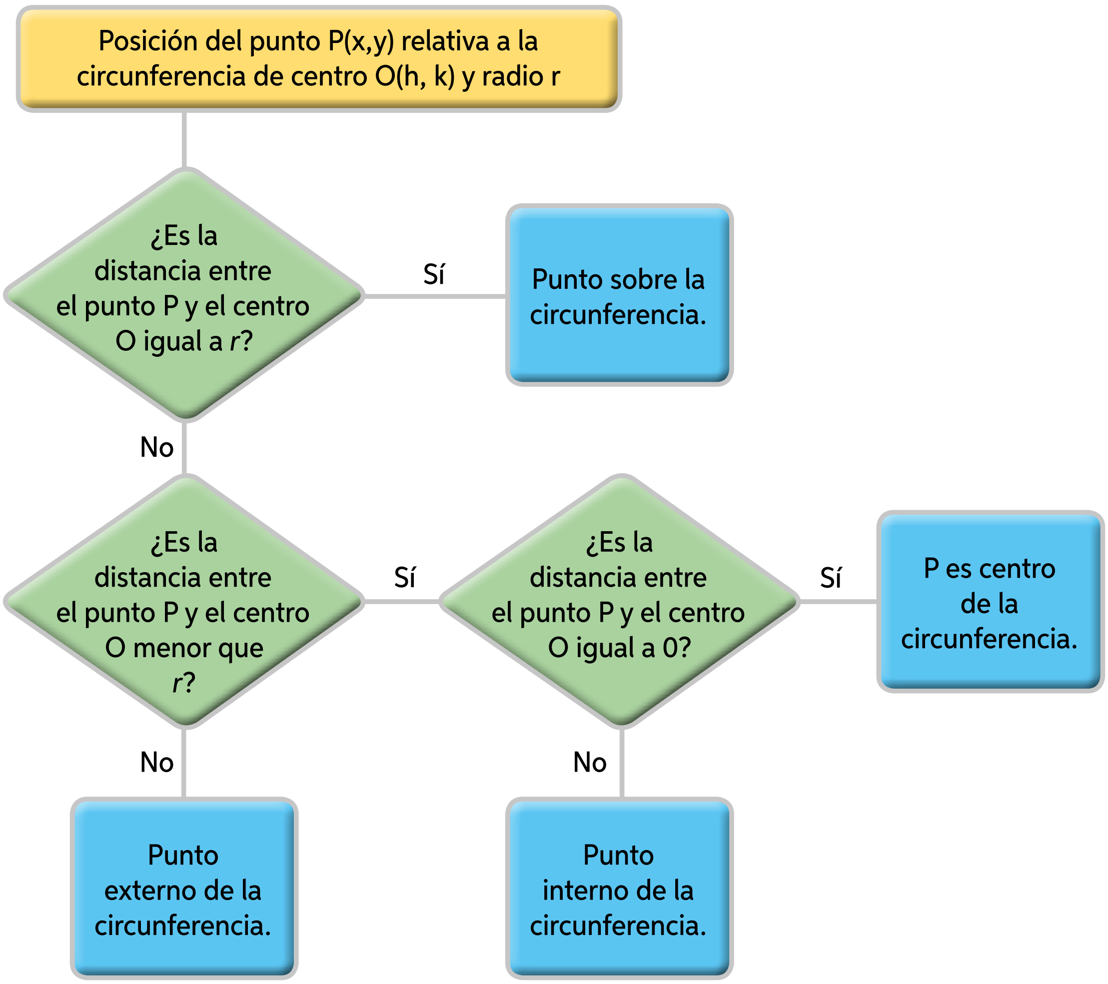
Síntesis

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es un diagrama de flujo?

Es un organizador gráfico que sirve como una guía "paso a paso". En matemática, ayuda a clarificar operaciones que deben realizarse, sistematizando los pasos para la correcta resolución de un problema.

A continuación, se presenta un diagrama de flujo con algunos conceptos estudiados durante la Unidad.



Ahora, hazlo tú

1. Realiza un diagrama de flujo para otro contenido de esta Unidad.
2. Comparte con tu curso el diagrama de flujo que realizaste y responde:
   - ¿Qué diferencias y similitudes hay con los diagramas de flujo de tus compañeros?
   - Si realizas un ejercicio de "rectas en el plano cartesiano", ¿el diagrama de flujo que construiste ayuda a tus compañeros a resolver el problema?

Repaso

Realiza las siguientes actividades.

Lección 7: Resolución de problemas con rectas en el plano cartesiano.

1. Calcula la distancia de los siguientes puntos:

   a. $M(1, 2)$ y $N(4, 8)$
   b. $R(-3, 0)$ y $Q(2, -4)$
   c. $U(-5, -1)$ y $V(7, 2)$
   d. $P(3, 1)$ y $Q(4, 1)$

2. Sea el cuadrilátero con vértices $A(-1, 1)$, $B(3, -1)$, $C(5, 3)$ y $D(1, 5)$, calcula:

   a. La longitud de la diagonal AC.
   b. El perímetro del cuadrilátero.

3. Determina cuál de las siguientes rectas son paralelas entre sí.

   L_1: $y = 3x - 2$
   L_2: $y = \frac{2}{5}x - 1$
   L_3: $-3x + y = -4$
   L_4: $2x - 5y - 1 = 0$
   L_5: $10x - 4y - 8 = 0$
   L_6: $y = \frac{5}{2}x + 6$

4. Calcula la distancia entre los siguientes puntos y rectas.

   a. $M\ (1, 2)$ con $2y + x = 5$
   b. $A\ (5,2)$ con $x = 2$
   c. $N\ (-1,2)$ con $4x + 3y = 0$

Lección 8: Resolución de problemas con circunferencias en el plano cartesiano.

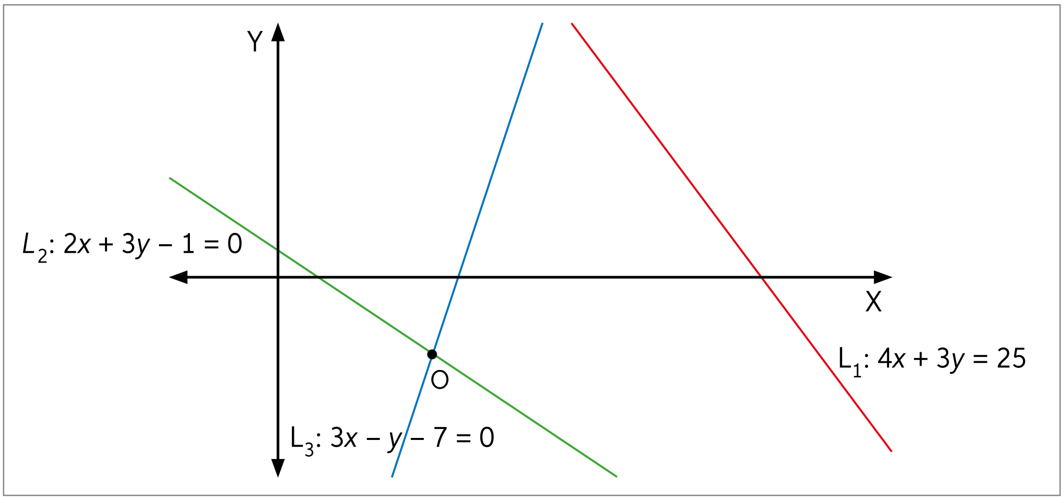
5. Escribe la ecuación principal y general de la circunferencia en cada caso.

   a. Con centro $C(6, -4)$ y radio 3 cm.
   b. Con centro $C(-1, -5)$ y radio $\frac{1}{3}$ cm.

6. Determina el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

   a. $x^2 + y^2 = 1$
   b. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 6$
   c. $x^2 + y^2 - 2x + 16y - 14 = 0$
   d. $2x^2 + 8x + 2y^2 - 6y = 1$

7. Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro O tangente a L_1.



¿Qué aprendí?

Lee atentamente la información y realiza las actividades.

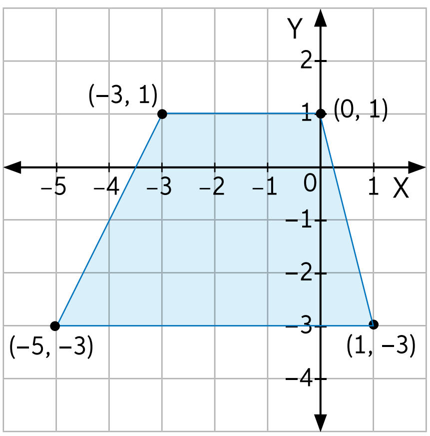
1. Al salir del colegio, Carla y Luis se fueron caminando hasta sus hogares. Para llegar a su casa, Carla caminó 300 m hacia el norte y 150 metros al este; en cambio, Luis se desplazó 350 m hacia el sur y 100 m al oeste. ¿A qué distancia se encuentran sus casas?

2. Escribe la ecuación principal y general de las siguientes rectas:
   a. La recta contiene los puntos (4, −1) y (−3, 6).
   b. La recta contiene el punto (−3, 3) y contiene al punto (−1, 3)
   c. La recta interseca el eje de las ordenadas en el punto (0, 3) y contiene el punto (1 , 2).
   d. La recta interseca el punto de origen y su pendiente es $-\frac{1}{4}$.
   e. La recta contiene el punto (−3, 6) y el punto medio del segmento AB, cuyas coordenadas para sus extremos son $A(-1, 6)$ y $B(1, -3)$.

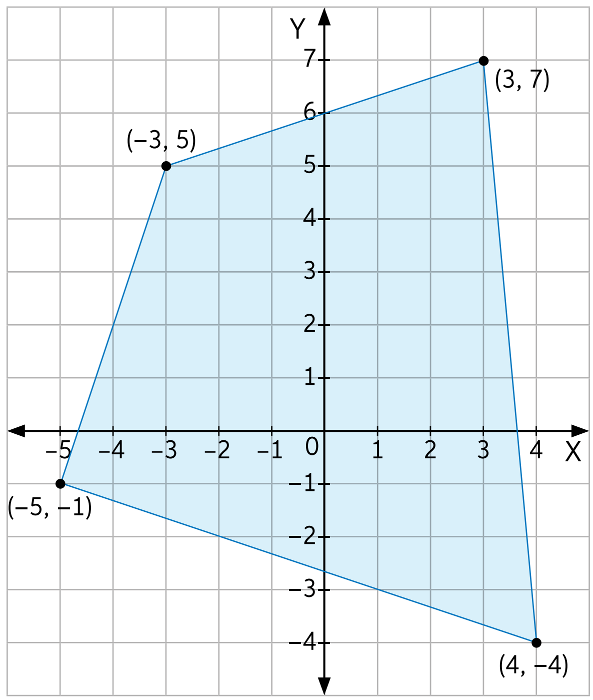
3. ¿Cuál es la ecuación principal de la recta que contiene $P(-1, 2)$ y es paralela a $L: 4x - 2y = -5$?

4. Determina el área y el perímetro de los siguientes polígonos:

   a.



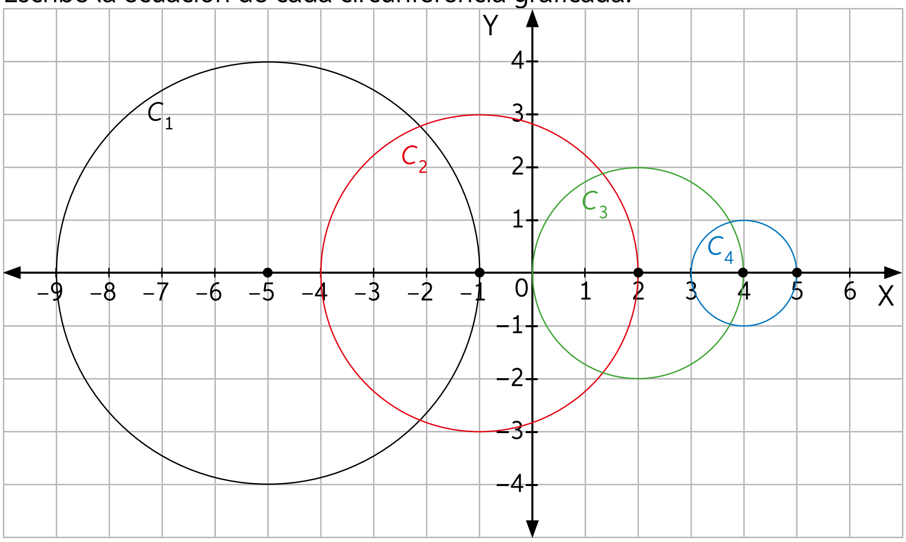
   b.



5. Dadas las rectas $L_1: 2x - 3y + 4 = 0$ y $L_2: 4x - 6y + 1 = 0$, calcula:
   a. Determina la pendiente de ambas rectas. En caso de que son paralelas, determina la distancia entre ellas.
   b. ¿Cuál es el valor de a para que el punto $P(0,5; a)$ se encuentre a la misma distancia de ambas rectas?

6. Escribe la ecuación principal y general de la circunferencia en cada caso.
   a. Con centro (0, 0) y radio 2 unidades.
   b. Con centro (1, −2) y radio 5 unidades.
   c. Con centro (−1, −8) y radio $\frac{6}{5}$ unidades.
   d. Con centro (0, 3) y radio 10 unidades.

7. Escribe la ecuación de cada circunferencia graficada.



8. Escribe las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los siguientes puntos:
   a. (1, −4), (3, −2) y (4, 5)
   b. (−2, −4), (3, 0) y (−1, 6)

9. Dadas las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 = 25$ y C_2: $x^2 + y^2 + x + y - 20 = 0$.
   a. Determina la posición de C_1 relativa a C_2.
   b. Grafica las circunferencias en el plano cartesiano.
   c. Determina, si existen, los puntos de intersección.

10. Dada la circunferencia C: $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$ y la recta L: $y = x + 3$.
   a. Determina la posición de la recta relativa a la circunferencia.
   b. Grafica la circunferencia en el plano cartesiano.
   c. Determina, si existen, los puntos de intersección.

11. Determina la ecuación de la circunferencia concéntrica a $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ de radio 5 unidades.

Reflexiono

- De las actividades realizadas en la evaluación anterior, ¿en cuál(es) de ellas presentaste mayor dificultad?, ¿qué estrategia(s) utilizaste? Explica.
- ¿Cuándo fue necesario recurrir al razonamiento geométrico para comprobar tus respuestas?, ¿qué tan útil te resultó?

P ¿Cómo te ayudó la resolución de problemas en la realización del proyecto? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

A

Ángulo del centro: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

Ángulo exterior: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice se encuentra en el exterior de la circunferencia y cuyos lados son rectas secantes o tangentes.

Ángulo inscrito: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas.

Ángulo interior: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice se encuentra al interior de la circunferencia.

Ángulo semiinscrito: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus lados es tangente en dicho punto y el otro lado es una cuerda.

Arco: parte de una circunferencia. Se nombra por sus puntos extremos en sentido antihorario.

Asíntota: recta a la que se aproxima indefinidamente la gráfica de una función sin intersecarse nunca con ella.

C

Coeficiente de variación: cociente entre la desviación estándar de un conjunto de datos y su media aritmética. Permite realizar comparaciones entre distribuciones distintas respecto de la dispersión de sus datos e incluso entre variables que se miden con diferentes unidades de medida.

Cuartil: valores que dividen las mediciones realizadas en cuatro partes con aproximadamente igual cantidad de datos.

Cuerda: segmento cuyos extremos pertenecen a una circunferencia.

D

Demostración: secuencia lógica basada en definiciones, postulados o axiomas y teoremas que permite determinar nuevos resultados matemáticos.

Diagrama de árbol: representación gráfica que muestra todas las posibles combinaciones o resultados de un experimento (espacio muestral).

Diagrama de Venn: diagrama que representa conjuntos y las relaciones entre ellos.

Dominio: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente de una función.

E

***e* o número de Euler:** número irracional cuyo valor es $e = 2{,}7182818\ldots$

Ecuación logarítmica: ecuación cuya incógnita se encuentra en el argumento de un logaritmo.

Equiprobables: experimento en que los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa con el símbolo Ω.

Evento o suceso: conjunto de algunos resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, en el experimento “lanzar una moneda y que al caer, salga cara”, el evento es “que salga cara”.

Eventos dependientes: eventos tales que la ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Eventos independientes: eventos tales que la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad del otro.

Experimento aleatorio: experimento que depende del azar, es decir, no se puede asegurar cierto resultado aunque se repita bajo las mismas condiciones.

F

Función: relación entre elementos de dos conjuntos A y B, tal que a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento de B.

Función creciente: función cuyos valores aumentan a medida que los valores de su dominio crecen.

Función decreciente: función cuyos valores disminuyen a medida que los de su dominio crecen.

Función exponencial: función cuya variable independiente se encuentra en el exponente de una potencia de la forma $f(x) = ab^x + c$.

Función logarítmica: función cuya variable independiente se encuentra en el argumento de un logaritmo, de la forma $f(x) = a\log_b(x) + c$.

H

Heterogéneo: en un conjunto de datos, se refiere a que ellos son muy distintos entre sí.

Histograma: representación gráfica de una variable continua o discreta que está agrupada en intervalos.

Homogéneo: en un conjunto de datos, se refiere a que ellos son similares entre sí.

L

Lados correspondientes: lados que se ubican en la misma posición relativa a dos o más polígonos.

Lados homólogos: par de lados de dos polígonos semejantes, cuya razón es igual a la razón de semejanza.

Logaritmo: exponente al que se debe elevar una base para obtener un número dado, llamado argumento.

Logaritmo natural: logaritmo cuya base corresponde al número e.

M

Marca de clase: corresponde al promedio entre el límite inferior y el superior de un intervalo. Por ejemplo, la marca de clase del intervalo [3, 6] es 4,5.

Media aritmética: medida de tendencia central que corresponde al promedio de un conjunto de datos.

Mediana: medida de tendencia central que corresponde al dato que ocupa el lugar central de una muestra de datos ordenados. Si la cantidad de datos es par, se considera el promedio de los dos valores centrales.

Medida angular de un arco: medida del ángulo del centro que subtiende un arco dado.

Medidas de dispersión: valores que indican la proximidad entre sí o respecto del promedio de los datos de un conjunto.

Medidas de tendencia central: valores en torno a los cuales suelen agruparse los datos de un conjunto. Corresponden a la media, la mediana y la moda.

N

Número complejo: toda expresión que se pueda escribir de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.

Números reales: conjunto que tiene todos los números racionales e irracionales. Se simboliza por medio de la letra $\mathbb{R}$.

P

Parámetros: valores que definen una expresión determinada. En el caso de las funciones, corresponden a sus coeficientes y términos.

Plano de Argand: es un plano similar al cartesiano. El eje horizontal representa las partes reales de un número complejo y el eje vertical, las partes imaginarias.

Probabilidad condicional *P(B/A)*: probabilidad de que ocurra un suceso B, dado que ocurrió otro A.

R

Rango: medida de dispersión que corresponde a la diferencia entre los valores máximo y mínimo de un conjunto de datos.

Regla de Laplace: forma de calcular la probabilidad de un evento con un espacio muestral finito (asumiendo que los resultados posibles o eventos simples son equiprobables), obteniendo el cociente entre los casos favorables y los casos totales del experimento aleatorio.

S

Secante a una circunferencia: recta que se interseca con una circunferencia en dos puntos.

T

Tangente a una circunferencia: recta que se interseca con una circunferencia en un solo punto de ella. Además, es perpendicular en dicho punto al radio de ella.

Teorema: proposición demostrada que afirma el cumplimiento de una tesis a partir de las condiciones dadas en una hipótesis.

V

Variable dependiente: variable cuyo valor depende del valor de otra u otras variables. Por ejemplo, el monto a pagar (variable dependiente) en una cuenta de luz depende de los kilowatts que se consuman.

Variable independiente: variable cuyo valor no depende del valor de otra u otras variables. Por ejemplo, el monto a pagar en una cuenta de luz depende de los kilowatts que se consuman (variable independiente).

Varianza: medida de dispersión que corresponde al promedio entre los cuadrados de las diferencias de cada dato con el promedio de ellos.

UNIDAD 1: La toma de decisiones en situaciones de incerteza

Página 8

1. Respuesta variable. Por ejemplo, son diferentes.
2. Respuesta variable. Por ejemplo, el promedio.
3. Vidal está más cerca y Díaz está más lejos.
4. Probablemente a Alexis Sánchez por ser delantero.

Página 10 Activo lo que sé

1. $\bar{x} \approx 28$ años, $M_e = 24$ años y $M_o = 44$ años.
2. $\bar{x} = 61{,}375$ kg, $M_e = 60{,}\overline{5}$ kg y $M_o = 58{,}\overline{18}$ kg.
3. 1,64 m.
4. $Q_1 = 4{,}25$, $Q_2 = 7$ y $Q_3 = 11$. El 25 % de los datos se encuentra por debajo de 4,25. El 50 % de los datos se encuentra por debajo de 7 y el 75 % de los datos se encuentra por debajo de 11.
5. De 12 formas distintas.
6.
   - **a.** $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{1}{5}$ **c.** $\frac{2}{15}$

Lección 1: Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión

Página 11 Medidas de dispersión

1.
   - **a.** Daniela: 63,4 s. Bárbara: 63,4 s.
   - **b.** Son iguales.
   - **c.** Respuesta variable. Por ejemplo, debería elegir a Daniela ya que sus tiempos son menos dispersos.

Página 12

2.
   - **a.** 5,6; 1,6; 6,6; −0,4; −13,4
   - **b.** Se obtiene cero. Sí. La suma de las desviaciones respecto a la media es siempre cero.
3. Desviación media: 5,52 s.
4. Los datos de Bárbara son más dispersos, porque su desviación media es mayor.

➤ No, es una propiedad solo de la media aritmética.

Página 13

5.

➤ No, ya que es la suma de números positivos.

   - **a.** 51,44 s^2 **b.** 7,17 s
   - **c.** En los tiempos de Bárbara es mayor.
   - **d.** Daniela debería participar.

Página 14

6.
   - **a.** $R = 11$ °C. $D_{\bar{x}} = 3{,}33$ °C. $\sigma^2 = 14{,}74$ (°C)^2. $\sigma = 3{,}84$ °C. Se podría concluir que los datos pertenecen a una misma estación del año.
   - **b.** La dispersión aumentaría, ya que en distintas estaciones del año se tienen temperaturas más alejadas entre sí.
7. $\sigma \approx 247$ cheques. Habrá problemas con la cantidad de empleados.
8. $\bar{x} = 210{,}73$ g y $\sigma = 13{,}66$ g. La chef no aceptará las barras porque la media no es 212,62 g.

Para concluir

   - **a.** Significa que las notas están muy alejadas del promedio, es decir, hay un rendimiento irregular con notas muy altas y otras muy bajas.
   - **b.** Nos entrega mayor información sobre cómo se comportan los datos.
   - **c.** Respuesta personal del estudiante.

Página 15 Comparación de conjuntos de datos

1.
   - **b.** Respuesta variable. Por ejemplo, si la DT desea un rendimiento regular de la jugadora, debe elegir a Flores.
   - **c.** Debería elegir a Navas.

Página 16

➤ Respuesta variable. Por ejemplo, escogería a Flores, porque se puede estar más seguro sobre su rendimiento, ya que su media de goles por partido es más representativo.

Página 17

2.
   - **a.** Respuesta variable. **b.** Respuesta variable. **c.** Respuesta variable.
3.
   - **a.** $R_A = 6$ y $R_B = 5{,}1$.
   - **b.** Para el curso A: $\bar{x} = 4{,}67$ y $D_{\bar{x}} = 1{,}21$. Para el curso B: $\bar{x} = 4{,}95$ y $D_{\bar{x}} = 1{,}12$.
   - **c.** Para el curso A: $\sigma^2 = 2{,}21$ y $\sigma = 1{,}49$. Para el curso B: $\sigma^2 = 1{,}89$ y $\sigma = 1{,}38$.
   - **d.** Para el curso A: CV = 31,9 %. Para el curso B: CV = 27,88 %. En EXCEL, se puede crear la función =100*stdev()/average().
   - **e.** El curso B tiene calificaciones más homogéneas que el curso A, ya que su CV es menor.
   - **f.** Debería elegir al curso B ya que la media es más representativa al tener calificaciones más homogéneas.

Página 18

4.
   - **a.** Sin fertilizante: $\bar{x} = 12{,}35$ cm. Con fertilizante: $\bar{x} = 13{,}3$ cm. Por lo tanto, el fertilizante hace crecer más.
   - **b.** Al disminuir la dispersión, pero manteniendo la media, significa que las plantas más chicas crecerán mejor, pero las mayores plantas crecerán menos. Si se desea que ninguna planta sea muy pequeña, entonces el fertilizante es efectivo. Si se desea tener unas pocas plantas lo mayor posible, no es efectivo.
   - **c.** Sin fertilizante: CV = 12,39 %. Con fertilizante: CV = 10,9 %. Como el CV con fertilizante es menor, se debe agregar fertilizante a las plantas para que sean más homogéneas.

Para concluir

a. Cuando solo se usa el promedio, perdemos información sobre los datos y no sabremos si el promedio es representativo ni qué ocurre a medida que nos alejamos de la media. Es por esto que debemos basarnos en las medidas de dispersión.

b. No, se puede utilizar el rango, la varianza o la desviación estándar.

Página 19 Antes de continuar

1.

a. Auto A: $R = 5$ s y $D_{\overline{X}} = 1{,}22$ s. Auto B: $R = 4$ s y $D_{\overline{X}} = 1{,}19$ s.

b. Auto A: $\sigma^2 = 2{,}23$ s^2 y $\sigma = 1{,}5$ s. Auto B: $\sigma^2 = 1{,}69$ s^2 y $\sigma = 1{,}3$ s.

c. En el auto B, ya que su desviación estándar es menor.

d. Debería comprar el auto B. Como tiene datos más homogéneos, es menos probable encontrar un auto con mucho tiempo de frenado.

2.

a. Conjunto Y. **b.** Conjunto Y.

3.

a. No, ya que están en una escala diferente.

b. El coeficiente de variación, ya que permite comparar la variación en porcentaje.

c. El CV de Jorge es 13,15% y el de Matías es 31,07%. Por lo tanto, Jorge tiene un rendimiento más regular.

Lección 2: Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales

Página 20 Probabilidad condicionada

1.

b. $\frac{4}{7}$

Página 21

2.

b. Lo condiciona en la extracción sin reposición. No lo condiciona en la extracción con reposición.

c. Sin reposición: $\frac{1}{130}$. Con reposición: $\frac{1}{100}$

➤ Sin reposición son siempre dependientes. Con reposición son siempre independientes.

3.

a. $\frac{6}{11}$ **b.** $\frac{5}{9}$

c. Hombre adulto.

4.

a. $\frac{17}{50}$ **b.** $\frac{23}{50}$ **c.** $\frac{1}{5}$ **d.** $\frac{2}{5}$

➤ A los pacientes con diabetes.

Página 22

5.

a. Respuesta personal del estudiante.

b. $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

d. Conviene más cambiarse de puerta.

e. Al abrir la puerta 2 no se inicia nuevamente el experimento, la probabilidad de que esté en la puerta 1 se mantiene en $\frac{1}{3}$, por lo tanto, la probabilidad de su complemento se mantiene en $\frac{2}{3}$, pero ahora, el complemento es solo la puerta 3.

Página 23

Para concluir

a. Respuesta variable. Por ejemplo, es la probabilidad de un suceso sabiendo que otro ocurrió.

b. Respuesta variable. Por ejemplo, la probabilidad de que hoy llueve sabiendo que ayer llovió es más alta que si ayer no llovió.

Página 24 Probabilidad total

1.

a. Han llovido 14 días y 6 días han sido secos.

➤ La probabilidad de que llueva es $\frac{14}{20} = 0{,}7$ y la probabilidad de que el día sea seco es $\frac{6}{20} = 0{,}3$.

Página 25

c. 0,9498

d. Respuesta personal del estudiante.

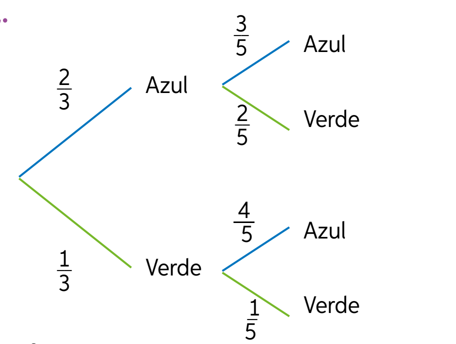
2. Sí, es correcta la afirmación de Fabián.

➤ Se condiciona por los sucesos lluvia y no lluvia. Notemos que en un día puede llover o no llover, no hay otra posibilidad.

Página 26

3.

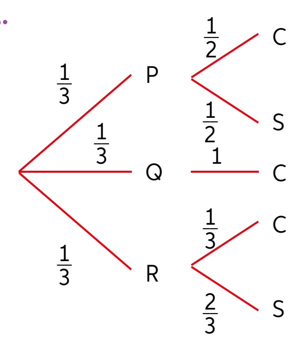
a.



b. $\frac{8}{15}$

4.

a.



b. La probabilidad de cara es $\frac{11}{18}$ y la probabilidad de sello es $\frac{7}{18}$. Conviene apostar cara.

5. Respuesta personal del estudiante.

Para concluir

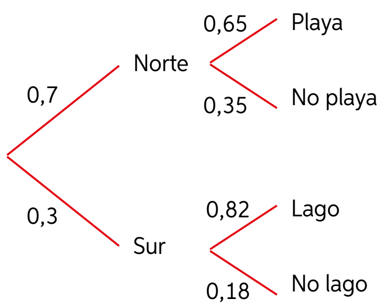
a. Respuesta variable. Por ejemplo: la probabilidad de llegar atrasado dado que sonó o no sonó el despertador.

b. Es una forma visual para ordenar el procedimiento de cálculo de probabilidades.

Página 27 Antes de continuar

1.

a.



b. 0,35

2.

a. $\frac{103}{160}$ **c.** $\frac{20}{27}$ **e.** $\frac{43}{79}$

b. $\frac{57}{160}$ **d.** $\frac{7}{27}$ **f.** $\frac{36}{79}$

g. Deberían decidir seguir con el tratamiento nuevo. La probabilidad de curarse es mayor.

3. Respuesta personal del estudiante.

Página 28 Síntesis

1. Respuesta variable. Por ejemplo, se pueden considerar los conceptos: probabilidad condicionada, suceso, probabilidad total, suceso independiente, suceso dependiente, Monty Hall, entre otros.

2. Respuesta personal del estudiante.

Página 29 Repaso

1.

a. Es cuán alejado están los datos entre ellos.

b. Es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de un conjunto de datos.

c. Medida de dispersión que estudia la variabilidad de los datos respecto a su media.

d. Indica cuánto varían en promedio los datos de un conjunto con respecto a la media.

e. Conjunto de datos poco dispersos.

f. Conjunto de datos muy dispersos.

2.

a. $R_A = 4$ y $R_B = 5$. El rango en el colegio B es mayor.

b. Colegio A: $\sigma^2 = 1{,}33$ y $\sigma = 1{,}15$. Colegio B: $\sigma^2 = 1{,}36$ y $\sigma = 1{,}17$

c. En el Colegio B.

d. El coeficiente de variación.

e. Colegio A: CV = 65,9 % y colegio B: CV = 62,6 %. El programa se debería aplicar en el colegio A.

3. $\frac{1}{45}$

4.

a.

	Hombre	Mujer	Total
Ingeniería	4	6	10
Técnico	3	0	3
Pedagogía	8	10	18
Bachillerato	15	9	24
Total	30	25	55

b. $\frac{3}{5}$ **c.** $\frac{1}{2}$

5. Se puede calcular la probabilidad de un suceso sumando todas las probabilidades del suceso condicionado por un grupo de eventos excluyentes entre sí y que sumen 1.

Página 30 ¿Qué aprendí?

1.

a. Bencinera 1: $R = \$15{,}2$, $\bar{x} = \$657{,}33$, $\sigma = \$6{,}16$.
Bencinera 2: $R = \$52{,}7$, $\bar{x} = \$662{,}83$, $\sigma = \$16{,}16$

b. Debe comprar en la bencinera 1, ya que presenta menor desviación estándar y menor coeficiente de variación (0,93 % versus 2,44 %).

c. La desviación estándar y el coeficiente de variación.

2.

a. Gladys: $\bar{x} = 6{,}5$ y Manuel: $\bar{x} = 6{,}5$.

b. Gladys: $R = 0{,}5$, $\sigma^2 = 0{,}035$ y $\sigma = 0{,}19$. Manuel: $R = 0{,}8$, $\sigma^2 = 0{,}125$ y $\sigma = 0{,}35$.

c. Las de Manuel.

d. A Gladys, porque sus notas son más homogéneas.

Página 31

3.

a. $\bar{x} = 256{,}09$ miles de pesos y CV = 21,04 %.

b. La empresa similar tiene un CV = 58,93 %. Los sueldos de la primera empresa son más homogéneos.

4.

a. $\frac{24}{91}$ **b.** $\frac{9}{49}$ **c.** $\frac{4}{13}$

5. $\frac{22}{51}$

UNIDAD 2: Modelamiento matemático para describir y predecir

Página 33

1. Respuesta personal del estudiante.

2. Respuesta variable. Por ejemplo, la energía liberada o la magnitud de un terremoto se puede calcular con el modelo matemático descrito.

3. Respuesta variable. Por ejemplo, el crecimiento de la población mundial y el pronóstico del dólar en economía.

4. Respuesta personal del estudiante.

Página 34 Activo lo que sé

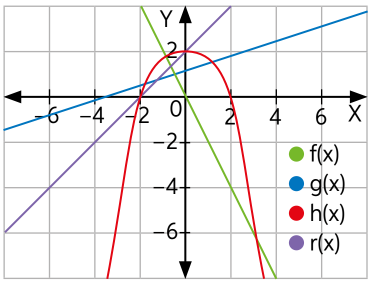
1.

a. Sí **b.** No **c.** Sí

2.

a. $x = 3$
b. $x = -2$
c. $x = \frac{1}{3}$
d. $x = 729$
e. $x = 64$
f. $x = 3$

3.



4. Dom f: $\mathbb{R}$, Rec f: $\mathbb{R}$, Dom g: $\mathbb{R}$, Rec g: $\mathbb{R}$. Dom h: $\mathbb{R}$, Rec h: $y \in \mathbb{R}$: $y \leq 3$. Dom r: $\mathbb{R}$, Rec r: $\mathbb{R}$.

5.

a. La gráfica es una recta con pendiente positiva.
b. La gráfica es una recta con pendiente negativa.

6. $S(x) = 12\,000x + 650\,000$

Lección 3: Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

Página 35 Función exponencial

1.

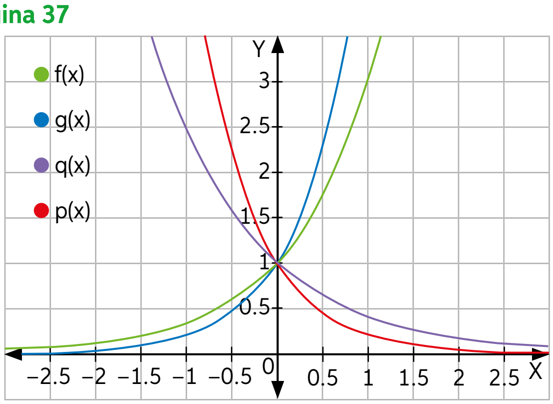
b. Porque es una relación entre dos conjuntos donde cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del otro conjunto.
c. No, ya que no existe una cte. de proporcionalidad.
d. $g(t) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$
e. En el 1, 6 561 000 bacterias y en el 2, 0,1 bacterias.

Página 36

- Para f: dominio: $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, recorrido: $f(t) \geq 1000$. Para g: dominio: $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, recorrido: $0 < f(t) \leq 1000$.

Página 37

3.



a. El dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $\mathbb{R}^+$.
b. El punto en común es (0, 1).
c. No, no intersecan al eje X.
d. Las gráficas no intersecan al eje X, ya que no existe ningún número que elevado a $x \in \mathbb{R}$, resulte cero.
e. El valor de f y g también aumentan, donde g crece más rápido que f. El valor de p y q, disminuye, donde p decrece más rápido que q.

- Porque el tiempo no puede tomar valores negativos.
- Mientras más disminuye el valor de x, la gráfica de la función se acerca cada vez más al eje X, pero no lo interseca.
- Tendría la misma forma que la gráfica de $f(x) = 2^x$ pero desplazada 3 unidades hacia arriba.

Página 38

4.

a. f: curva roja, g: curva amarilla, h: curva azul.
b. f: curva azul, g: curva roja, h: curva amarilla.

5.

a. En el caso 1, traslación horizontal y caso 2 vertical.
b. Respuesta personal del estudiante.
c. En los casos 1 y 2 el dominio de las funciones es $\mathbb{R}$. En el caso 1, el recorrido es $\mathbb{R}^+$ y en el 2; para p es $\mathbb{R}^+$, para q es $y \in \mathbb{R}$: $y > -2$, para r es $y \in \mathbb{R}$: $y > 3$.

- Respuesta variable. Por ejemplo, trasladando la gráfica de $f(x) = 2^x$, 1 unidad hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo.

6.

a. Etapa 0: 3^0, etapa 1: 3^1, etapa 2: 3^2, etapa 3: 3^3, etapa 4: 3^4.
b. $C(n) = 3^n$

Página 39

7.

a. 3, 60 y 7112 contagiados.
b. La función se mantiene cercana a un valor fijo y casi paralela al eje Y.
c. Esta función es creciente.

Para concluir

a. Se define como funcional exponencial a la función de la forma $f(x) = ab^x$, donde a, $b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$. Por ejemplo, $f(x) = 6^x$.
b. Respuesta variable. Por ejemplo: la gráfica es una curva creciente si $b > 1$ y es decreciente si $0 < b < 1$.
c. Respuesta personal del estudiante.

Página 40 Crecimiento y decrecimiento exponencial

1.

b. Se puede decir que a pesar de que hay diferencias en la cantidad de habitantes es una buena estimación.
c. Sí se acerca a lo esperado.

- Respuesta variable. Se relaciona porque los modelos matemáticos de funciones exponenciales pueden describir y predecir el crecimiento de la población.

Página 41

2.

b. $C_t = C \cdot (1 + i)^t$
c. A los 5 años tendrá \$1 264 173 y cuando su hijo tenga 18 años, tendrá \$2 325 429.

- Crecimiento, porque aumenta exponencialmente.

Página 42

3.

a.
- $P(t) = 1\,490\,000 \cdot (1 - 0{,}2)^t$
- Decrecimiento exponencial.
- Tendrá un valor de $488 243.
- Deben transcurrir 8 años.

b. 25 % y 6,25 % de efectividad.

c.
- $v(t) = 4\,(1 - 0{,}1)^t$
- 1,13 cm^3 de hielo.

Para concluir

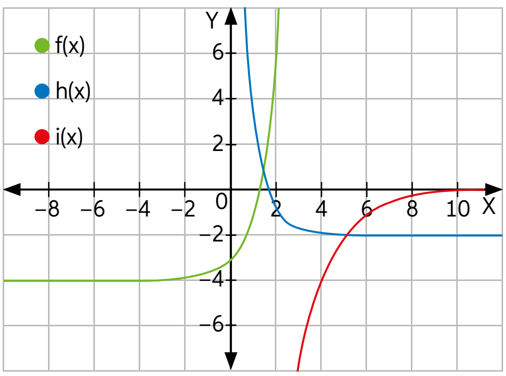
a. En 15 años el capital se duplicará.

b. Cuando la base es mayor que 1 o cuando la base es menor que 1 y mayor que 0.

c. Respuesta personal del estudiante.

Página 43 Antes de continuar

1.



2. El dominio de *f*, *h* e *i* es $\mathbb{R}$. Rec *f*: $y \in \mathbb{R}$: $y > -4$. Rec *h*: $y \in \mathbb{R}$: $y > -2$, Rec *i*: $y \in \mathbb{R}$: $y < 0$.

3.

a. $f(x) = 2^x + 3$ b. $g(x) = 2^{-x} + 2$ c. $h(x) = 2^{-x} - 1$

4.

a. El capital final será $1 573 721.

b. 16 años.

5.

a. El primer cultivo.

b. Habrá 12 millones y 5,43 millones de bacterias.

Lección 4: Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

Página 44 Función logarítmica

1.

a. $\beta_{(\text{umbral del dolor})} = 120$ dB.

b. Respuesta variable. Por ejemplo, conversación: 10^{-6} W/m^2, camión: 10^{-4} W/m^2 y trombón: 10^{-1} W/m^2.

c.
- 10^{-4} W/m^2 y 10^{-2} W/m^2.
- La intensidad es 100 veces mayor.

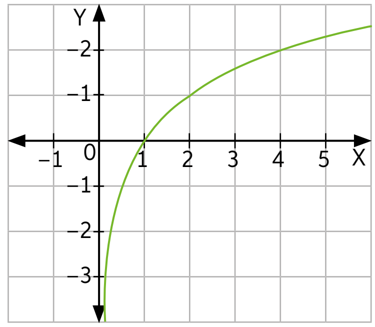
Página 45

2. Discoteca: 110 dB, Tren: 90 dB, Bomba: 200 dB, Tráfico: 80 dB, Biblioteca: 20 dB, Aspiradora: 70 dB.

- 10log2 dB
- Respuesta personal del estudiante.

3.

a.



b.
- El dominio es $\mathbb{R}^+$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.
- En el (1, 0).
- No interseca al eje Y.
- Los valores de *f* también aumentan. Es creciente.

Página 46

4.

Paso 2

a. No cambian.

b. Sigue intersecando en (1, 0).

c. La gráfica de *g* se acerca y asemeja a la de *f*.

d. La función *g* es decreciente. Porque la base es un número decimal.

e. No.

Paso 3

a. No cambian. Al agregar *b* a la función, esta se traslada y con ello cambia la intersección con el eje X.

b. La gráfica se traslada *b* unidades hacia arriba.

c. Sí. La gráfica se traslada *b* unidades hacia abajo.

Paso 4

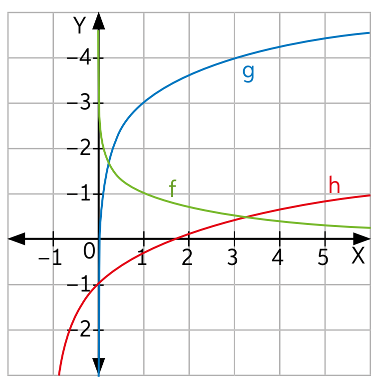
a. Sí cambian. Los puntos de intersección con los ejes también cambian.

b. La gráfica se traslada hacia la izquierda o se traslada hacia la derecha.

Página 47

- Sería simétrica a $f(x) = \log x$ respecto del eje X.

5.



6. Dom *f*: $\mathbb{R}^+$, Rec *f*: $\mathbb{R}$, Dom *g*: $\mathbb{R}^+$, Rec *g*: $\mathbb{R}$. Dom *h*: $x \in \mathbb{R}$: $x > -1$, Rec *h*: $\mathbb{R}$.

7.

a. (−9, 0) y (0, 1). b. (4, 0) y (0; 0,7) c. $\left(\frac{9}{4},0\right)$

Página 48

Para concluir

a. Función de la forma $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. Por ejemplo: $f(x) = \log_3 x$.
b. La gráfica de una función de la forma $f(x) = \log_a x$ depende del valor de a. Es creciente si $a > 0$ y es decreciente si $a < 0$.
c. Respuesta personal del estudiante.
d. Respuesta personal del estudiante.

Página 49 Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

1.

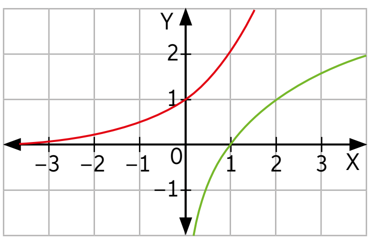
b. La gráfica azul corresponde a *f* y la roja a *g*.
c. Que los valores de la columna izquierda de *f(x)* son iguales a los de la columna derecha de *g(x)*.
d. (0, 1) y (1, 0).
e. El dominio de *f* corresponde al recorrido de *g* y el dominio de *g* corresponde al recorrido de *f*.

Sí. El eje de simetría es la recta $y = x$.

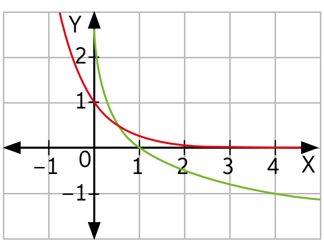
Página 50

2.

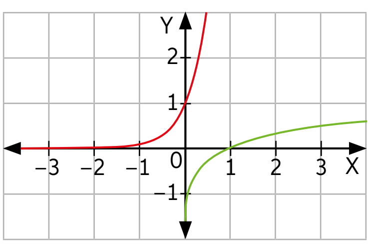
a.



b.



c.



3.

a. $f^{-1}(x) = \log_4(x)$
b. $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$
c. $f^{-1}(x) = \ln(x)$

4.

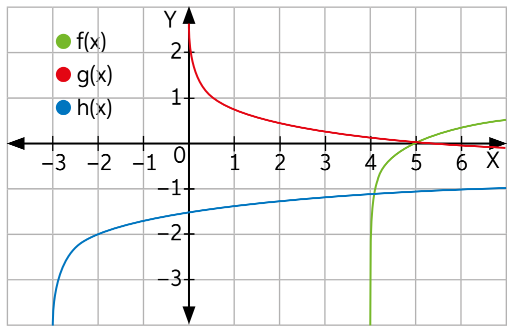
a. Terremoto Valdivia: $E = 1,58 \cdot 10^{26}$ ergios. Terremoto 2010: $E = 1 \cdot 10^{25}$ ergios.
b. Terremoto Algarrobo: M = 7,8 grados Richter. Terremoto Vallenar: M = 6,9 grados Richter.

Para concluir

a. Fue 15,8 veces más intenso.
b. Respuesta variable. Por ejemplo, la función exponencial es la inversa de la otra.
c. Respuesta personal del estudiante.

Página 51 Antes de continuar

1.



2. Dom *f*: $x \in \mathbb{R}: x > 4$, Rec *f*: $\mathbb{R}$. Dom *g*: $\mathbb{R}^+$, Rec *g*: $\mathbb{R}$. Dom *h*: $x \in \mathbb{R}: x > -3$, Rec *h*: $\mathbb{R}$.

3.

a. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}^x$
b. $g^{-1}(x) = \log_6 x$ c. $h^{-1}(x) = \frac{3}{4}^x$

4.

a. El pH es 6,42 y se clasifica como una sustancia ácida.
b. Jugo: 0,0000316 moles/litro. Jabón de manos: $3,16 \cdot 10^{-10}$ moles/litro.
c. 0,00158 moles/litro
d. Al triplicar la concentración de una solución, el pH disminuye y la cantidad no depende de su concentración original.

Página 52 Síntesis

1. Respuesta variable. Por ejemplo: $f(x) = \log_a x$, recorrido: $\mathbb{R}$, dominio: $\mathbb{R}^+$, decibeles, función creciente para $a > 1$, asíntota, función decreciente para $0 < a < 1$, intersección con eje X en (1, 0), cálculo de pH.
2. Respuesta personal del estudiante.

Página 53 Repaso

1.

a. *f*: roja, *g*: azul, *h*: amarilla.
b. f: azul, g: amarilla, *h*: roja.

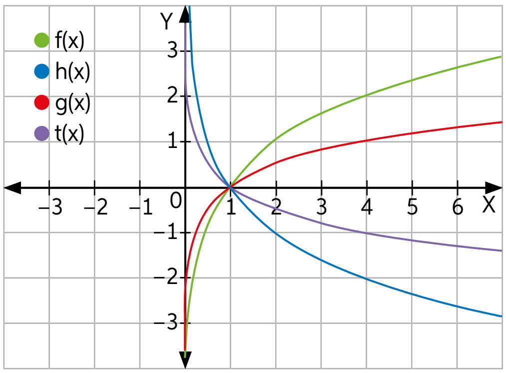
2.

a. Dominio: $\mathbb{R}$, recorrido: $y \in \mathbb{R}: y > -1$
b. (0, 1)
c. Sí, (−1, 0) d. Es creciente.

3.

a. $C(x) = C_i \cdot (0,7)^x$, donde C_i es la concentración inicial de medicamento y x es el tiempo transcurrido en horas.
b. Tardará 2 horas y 45 minutos.

4.



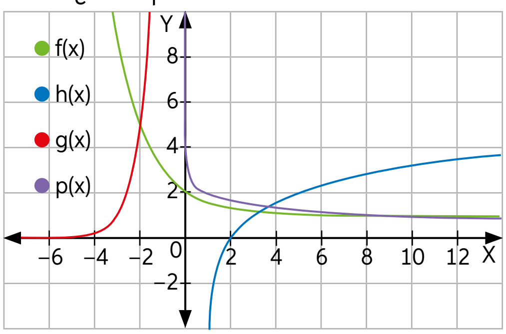
5.

a. Dominio: $x \in \mathbb{R}$: $x > 4$, recorrido: $\mathbb{R}$.
b. Con el eje X es (5, 0) y no hay intersección con el eje Y.
c. La función es creciente.

6. La relación es que una es la función inversa de la otra.

Página 54 ¿Qué aprendí?

1.



2. Dom f: $\mathbb{R}$, Rec f: $y \in \mathbb{R}$: $y > 1$, Dom g: $\mathbb{R}$, Rec g: $\mathbb{R}^+$, Dom h: $x \in \mathbb{R}$: $x > 1$, Rec h: $\mathbb{R}$. Dom p: $\mathbb{R}^+$, Rec p: $\mathbb{R}$.

3.

a. $f(x) = -\log_2(x) + 1$ b. $g(x) = \log_2(x + 1) - 2$

4.

a. Hay 8,18 mg de medicamento luego de una hora.
b. Debe tomarse el medicamento cada 6 horas.
c. Esta fórmula no es la adecuada para calcular cuando hay 0 concentración de medicamento en la sangre, porque no existe ln(0).

5. Vinagre: 0,001259 moles/litro. Jugo gástrico: 0,0316 moles/litro. Orina: 0,000000316 moles/litro.

Página 55

6. En el año 2025 será $365 729.

7.

a. Avión despegando: $I = 10$ W/m^2. Personas gritando: $I = 10^{-3}$W/m^2. Taladro eléctrico: $I = 10^{-2}$W/m^2.
b. Tiene 4,77 (10log3) decibeles más.
c. Aproximadamente 154 dB.

8. Liberó 251 veces menos energía que el terremoto de Chile el 2010.

UNIDAD 3: Relaciones métricas en las circunferencia

Página 56

1. Respuesta variable, por ejemplo, círculos y circunferencias.

2. Respuesta variable, por ejemplo, la relación que existe entre las medidas de las ruedas.

3. Respuesta variable, por ejemplo, en las medidas de las ruedas de los automóviles, en una rueda de la fortuna, en un reloj.

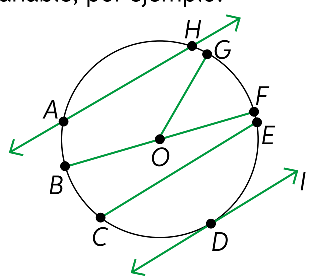
4. Los Juegos Olímpicos es un evento deportivo internacional que cuenta con diferentes disciplinas. Algunas de sus disciplinas en que se pueden apreciar circunferencias y sus elementos, son ciclismo en pista y en ruta, gimnasia rítmica, entre otras.

Página 58 Activo lo que sé

1.

a. Lugar geométrico de todos los puntos equidistantes a otro llamado centro.
b. Figura geométrica delimitada por una circunferencia.
c. Punto central de la circunferencia.
d. Distancia del centro de la circunferencia a un punto cualquiera de esta.
e. Cuerda de mayor longitud, pasa por el centro de la circunferencia.
f. Segmento que interseca en dos puntos a la circunferencia.
g. Recta que une a dos puntos de la circunferencia.
h. Recta que interseca en un solo punto a la circunferencia.
i. Curva continua que une dos puntos de la circunferencia.

2. Respuesta variable, por ejemplo:



Circunferencia de centro O, radio $\overline{OF}$, diámetro $\overline{FB}$, cuerda $\overline{CE}$, secante $\overleftrightarrow{AH}$, tangente $\overleftrightarrow{DI}$.

3. Respuesta variable. Por ejemplo:

a. $\overline{OY}$; $\overline{OS}$; $\overline{OT}$; $\overline{OW}$
b. $\overline{WS}$; $\overline{YT}$
c. $\overset{\frown}{XW}$; $\overset{\frown}{WX}$; $\overset{\frown}{TS}$
d. $\overleftrightarrow{IJ}$; $\overleftrightarrow{MN}$
e. $\overleftrightarrow{KL}$; $\overleftrightarrow{GH}$

4.

a. La circunferencia corresponde al borde y el círculo es el queso junto a todos los ingredientes.
b. Al centro de la circunferencia.
c. $P \approx 113{,}04$ cm; A $\approx 1017{,}36$ cm^2.
d. $r \approx 11{,}97$ cm.

Lección 5 Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia

Página 59 Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia.

1.

a. El ángulo del jugador 2 corresponde a la mitad del ángulo del jugador 1.
b. El ángulo siempre será congruente, ya que el arco que lo comprende siempre es el mismo.

Página 60

2.

a. $\alpha = 60°$ b. $\alpha = 150°$ c. $\alpha = 40°$

Página 61

3.

a. $m(\sphericalangle KOH) = 120°$ c. $m(\sphericalangle CAB) = 15°$
b. $m(\sphericalangle PMO) = 30°$ d. $\alpha = 130°$, $\beta = 90°$

4. Fabián interpretó que $\sphericalangle DOB$ mide lo mismo que $\sphericalangle DAB$, lo que es incorrecto pues en realidad mide el doble de él. Así, la medida de $\sphericalangle DOB$ es $2x$, por lo que el arco $\overset{\frown}{DB}$ mide $2x$ y con ello la medida del arco $\overset{\frown}{BC}$ es x. Por lo tanto, $\alpha = x$.

Respuesta variable, por ejemplo, confundir la medida de los arcos con la de los ángulos inscritos en la circunferencia.

Página 62

Para concluir

a. Respuesta variable, por ejemplo, aplicando los teoremas de los ángulos inscritos y del centro de la circunferencia.
b. Respuesta personal del estudiante.

Página 63 Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia

1.

a. $\alpha = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{DA})}{2}$

Página 64

2.

a. $\beta = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$; $\gamma = \dfrac{m(\overset{\frown}{DA})}{2}$ c. $\alpha = 35°$

b. $\alpha = \dfrac{m(\overset{\frown}{DA}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ d. $m(\overset{\frown}{DA}) = 90°$

Menos de 180°.

3.

a. $x = 60°$ c. $x = 20°$ e. $x = 50°$
b. $x = 60°$ d. $x = 80°$ f. $x = 35°$

Página 65

4.

Milton: Falso, ya que tiene su vértice exterior a la circunferencia.
Bárbara: Verdadero.
Luis: Falso, ya que está formado por la intersección de dos cuerdas.

5.

a. $m(\sphericalangle COA) = 50°$
b. $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle BAO) = 45°$
c. $m(\sphericalangle DEB) = 20°$ e. $m(\sphericalangle CBA) = 45°$
d. $m(\sphericalangle OBS) = 50°$ f. $m(\sphericalangle PSR) = 45°$

Página 66

6.

a. Javiera restó donde debió sumar.
b. $m(\sphericalangle AEC) = 25°$

Respuesta variable, por ejemplo, realizar un resumen de lo que se necesita para resolver el problema, etc.

7.

Problema 1: 40°
Problema 2: 22°

a. Respuesta variable, por ejemplo, aplicar los teoremas vistos en la lección.
b. Respuesta variable, por ejemplo, aplicar medidas de los ángulos.

Para concluir

a. Respuesta personal del estudiante.
b. Respuesta personal del estudiante.
c. Respuesta personal del estudiante.

Página 67 Antes de continuar

1.

a. $\alpha = 90°$ b. 60°

2.

a. F, es 130°. c. V
b. V d. V

3. $m(\sphericalangle DBE) = 45°$

Lección 6: Resolución de problemas con segmentos en la circunferencia

Página 68 Cuerdas en la circunferencia

1.

Paso 1: Los productos corresponden a 52,4176.
Paso 2: Respuesta variable.
Paso 3: Son semejantes ya que el $\sphericalangle CPA$ mide lo mismo que $\sphericalangle DPB$.
Paso 4: $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB}$
Paso 5: $PA \cdot PB = PD \cdot PC$

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas de la circunferencia de centro O, que se intersecan en el punto E, se cumple que: $PA \cdot PB = PD \cdot PC$.

Demostración:

(1) Se une el punto A con el punto C y el punto D con el punto B, formando los triángulos CPA y BPD.
(2) $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle BDP$ por subtender el mismo arco $\overset{\frown}{BC}$, y $\sphericalangle CPA \cong \sphericalangle DPB$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
(3) De (2) se tiene que $\Delta CPA \sim \Delta BPD$ por postulado AA.
(4) De (3) se tiene $\dfrac{CP}{BP} = \dfrac{PA}{PD} = \dfrac{CA}{BD}$
(5) De (4), si se consideran las dos primeras razones, se tiene que $PA \cdot PB = PD \cdot PC$

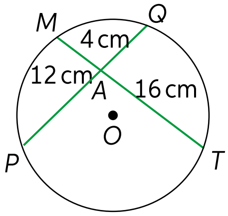
Página 69

2.

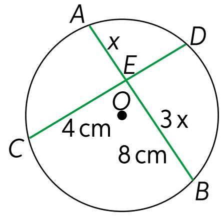
a. 4 cm. b. 10 cm. c. $\dfrac{28}{13}$ cm. d. 12 cm.

3.

a. Karen



Danilo



b. 6 cm. **c.** 1 cm.

Respuesta variable, por ejemplo, sí es posible sin la representación, aunque esta ayuda mucho en la resolución del problema.

Página 70

4.

a. 5 cm. **b.** 24 cm. **c.** 24 cm. **d.** 1 cm.

5.

a. $2x \cdot x = 9 \cdot 2$ **b.** 3 cm.

6.

a. Respuesta variable, por ejemplo: Alrededor de una piscina circular se sientan María (*M*), Pablo (*P*), Ana (*A*) y Blanca (*B*). Carla se encuentra en la piscina. Si se traza una recta entre las posiciones de Ana y Blanca, y entre Pablo y María, se formaría un ángulo recto. ¿A qué distancia se encuentra Carla de María? (Respuesta: 12,5 m).

b. Respuesta variable. En este caso, se aplicó el teorema de las cuerdas.

Página 71 Secantes y tangentes en la circunferencia

1.

Paso 1:

- $PA \cdot PC = 20{,}8236$
- $PB \cdot PD = 119{,}8125$
- $PA \cdot PD = 47{,}286$
- $PC \cdot PB = 52{,}7625$
- $PA \cdot PB = 49{,}95$
- $PC \cdot \mathrm{PD} = 49{,}9485$

Paso 2: Respuesta variable.

Paso 3: los triángulos *PCB* y *PAD* son semejantes.

Paso 4: $\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} = \frac{CB}{DA}$

Paso 5: $PA \cdot PB = PD \cdot PC$

La secante siempre será mayor.

2.

a. $m(\sphericalangle TPR) = m(\sphericalangle RPT)$ y $m(\sphericalangle TRQ) = m(\sphericalangle PTQ)$.

b. $\Delta RPT \sim \Delta TPQ$, por el criterio de semejanza *AA*.

3.

a. 6 cm. **b.** 12 cm.

4.

a. $\frac{63}{2}$ cm. **c.** 8 cm.

b. $\frac{128}{3}$ cm. **d.** 49 cm.

5.

a. Según el dibujo, el teorema debe ser

b. $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. **c.** 13 cm

6.

a. Respuesta depende de cada estudiante. **b.** Respuesta depende de cada estudiante.

Página 74

Para concluir

a. Respuesta personal. **b.** Respuesta personal.

c. Respuesta variable, por ejemplo, la fuerza de roce que actúa en una rueda de un automóvil en movimiento.

Página 75 Antes de continuar

1.

a. Diámetro. **c.** Cuerda. **e.** Tangente.

b. Radio. **d.** Secante.

2.

a. $24{,}5\overline{3}$ cm **c.** 12 cm **e.** 7 cm

b. 2,16 cm **d.** 5 cm

3.

a. 8 cm. **b.** $\frac{3\sqrt{34}+5}{2}$ cm.

Página 76 Síntesis

1. Respuesta variable. Se espera que el estudiante construya una lluvia de ideas con los teoremas de las secantes y de la secante y la tangente.

2. Respuesta personal del estudiante.

3. Respuesta personal del estudiante.

4. Respuesta personal del estudiante.

Página 77 Repaso

1.

a. $\alpha = 51°$ $\beta = 37{,}5°$ **c.** $\alpha = 66{,}5°$ **f.** $\alpha = 51°$

d. $\beta = 40°$

b. $\beta = 26°$ **e.** $\alpha = 23{,}5°$

2.

a. $AC = \frac{74}{7}$ cm. **b.** $QT = 19$ cm. **c.** $PQ = 48$ cm.

Página 78 ¿Qué aprendí?

1.

a. F **b.** V **c.** F **d.** V **e.** F

2.

a. $\alpha = 40°$ **b.** $z = 40$ cm

3.

a. $A = \frac{25}{4}\pi$ cm^2.

b. Respuesta variable, por ejemplo, calcular la cuarta parte del total del área de la superficie del círculo.

Página 79

4.

a. $MP = 3$ cm. $PQ = 3\sqrt{3}$ cm. $QN = 6\sqrt{3}$ cm.

b. Respuesta variable, por ejemplo, aplicar el teorema de Pitágoras.

5.

a. 15,072 cm. **b.** 18,0864 cm^2.

c. 7 cm.

UNIDAD 4: Un último peldaño algebraico: los números complejos

Página 81

1. Aparece error. Significa que la calculadora no puede entregar un resultado correcto de lo solicitado.

2. Respuesta personal del estudiante.
3. Respuesta personal del estudiante.

Página 82 Activo lo que sé

1.

a. $\frac{1}{2}$ c. 1 e. 25

b. $\frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 3^{16}}$ d. 3^7 f. 2^{17}

2.

a. $A = (5, 2)$; $B = (-2, 2)$; $C = (-3, -3)$; $D = (2, -5)$; $E = (4, 5)$; $F = (-3, 5)$; $G = (-5, 1)$; $H = (1, 3)$; $I = (4, -2)$; $J = (-2, -2)$.

b. $\sqrt{10}$.

c. 2° cuadrante: *B, F* y *G*. 3° cuadrante: *C* y *J*.

d. $|FI| = 7\sqrt{2}$. Se puede utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo pedido.

e. Respuesta variable, por ejemplo, se escogen los puntos *HIJ* formando el triángulo, luego se calculan las distancias: $|JI| = 6$; $|HJ| = \sqrt{34}$; $|HI| = \sqrt{34}$; y se calcula su perímetro (*P*) sumando la medida de sus lados, por lo que $P = 6 + 2\sqrt{34}$.

3.

a. $v = 4$ m/s.

b. Corresponde al conjunto de los números naturales.

Lección 7: El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

Página 83 Conjunto de los números complejos

1.

a. La solución de $2x + 3 = 8 \in$ a los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. La solución de $7x + 8 = 4x - 6 \in$ a los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. La solución de $x^2 + 4x - 4 = 0 \in$ a los conjuntos $\mathbb{Q}^c$ y $\mathbb{R}$. La solución de $7x - 4 = 2x + 4 \in$ a los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

b. Las soluciones son $x = -\sqrt{7}$; $x = \sqrt{7}$, ambos números irracionales. Estas no pueden ser escritos como una fracción.

2.

Para $x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$

Para $x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$

Para $2x^2 - 2x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{-1}}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{-1}}{2}$

El número $\sqrt{-1}$ no está definido como un número real, ya que la raíz cuadrada para cantidades subradicales negativas no está definida.

Página. 84

3.

a. Los valores de las potencias se van repitiendo en periodos de 4 a partir de la quinta, lo que genera una regularidad.

b. $i^{16} = 1$ y $i^{25} = i$

4. Respuesta variable, por ejemplo:

Estudiante 1: $z = \frac{1}{2} - 2i$. Estudiante 2: $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Estudiante 3: $z = 2 - 3i$

Página 85

Para concluir

a. Respuesta personal del estudiante.

b. Respuesta variable; por ejemplo en la actividad 4 se puede usar la igualdad de complejos para comprobar cada solución.

c. Respuesta personal del estudiante.

Página 86 Representación de números complejos

1.

a.

$z_1 = 4 + 5i$; $Re(z_1) = 4$; $Im(z_1) = 5$
$z_2 = 6 + 2i$; $Re(z_2) = 6$; $Im(z_2) = 2$
$z_3 = 1 + 7i$; $Re(z_3) = 1$; $Im(z_3) = 7$
$z_4 = 4 - 3i$; $Re(z_4) = 4$; $Im(z_4) = -3$
$z_5 = -3 + 3i$; $Re(z_5) = -3$; $Im(z_5) = 3$
$z_6 = -2 - 7i$; $Re(z_6) = -2$; $Im(z_6) = -7$
$z_7 = -1 - i$; $Re(z_7) = -1$; $Im(z_7) = -1$
$z_8 = 2{,}5 - 4i$; $Re(z_8) = 2{,}5$; $Im(z_8) = -4$
$z_9 = -8 - 4{,}5i$; $Re(z_9) = -8$; $Im(z_9) = -4{,}5$

c. El eje Y se relaciona con la parte imaginaria del número complejo. El eje X se relaciona con la parte real del número complejo.

d. Los vectores se representan de la misma forma que los números complejos en el plano.

El número es $z = i$

Página 87

2.

$z_1 = 5 + 6i = (5, 6)$; $Re(z_1) = 5$; $Im(z_1) = 6$
$z_2 = 4 = (4, 0)$; $Re(z_2) = 4$; $Im(z_2) = 0$
$z_3 = -3 - 5i = (-3, -5)$; $Re(z_3) = -3$; $Im(z_3) = -5$
$z_4 = -5 + 5i = (-5, 5)$; $Re(z_4) = -5$; $Im(z_4) = 5$
$z_5 = -3 = (-3, 0)$; $Re(z_5) = -3$; $Im(z_5) = 0$
$z_6 = -6 - 2i = (-6, -2)$; $Re(z_6) = -6$; $Im(z_6) = -2$
$z_7 = \frac{1}{2} + i = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $Re(z_7) = \frac{1}{2}$; $Im(z_7) = 1$
$z_8 = 3 - 4i = (3, -4)$; $Re(z_8) = 3$; $Im(z_8) = -4$

3.

a. (−5, 3) d. (−5, −5) g. (0, −5)
b. (1, −6) e. (6, 0) h. (−6, −1)
c. (1,5; −3) f. (1, −7) i. (0, −8)

4.

a. F. (2, −3) se encuentra en el cuarto cuadrante.

b. F. si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $ab < 0$.

c. V.

d. F: se ubica en el eje imaginario.

e. F. Es (1, −1).

f. F. Es (4, 2).

g. F. Para que *z* se ubique en el eje imaginario, $Re(z) = 0$.

Para concluir:

a. Respuesta variable. Se espera que el estudiante mencione que un número complejo se puede representar de forma binomial, como par ordenado y en el plano de Argand. Por ejemplo, el número complejo $z = -15 + 10i$ expresado como par ordenado es $z = (15, 10)$.

b. Ambos planos permiten representar números, pero el de Argand contiene un eje para representar la parte imaginaria de cada número.

c. Respuesta variable, por ejemplo, $z = (3, 25)$ y $w = (2, 10)$.

Página 88 Módulo y conjugado de un número complejo

1. Consiste en resolver por medio del teorema de Pitágoras usando como catetos la parte real y la parte imaginaria del número complejo.

➤ Podrían utilizar la distancia entre dos puntos o el teorema de Pitágoras.

Página 89

2.

a. $z_1 = (3, 7)$; $z_2 = (3, -7)$

b. Tienen igual parte real, sin embargo, su parte imaginaria difiere en el signo. Al graficarlas, corresponde a una simetría con respecto al eje real.

➤ No es equivalente, ya que si calculamos el inverso aditivo de un número complejo $z = a + bi$, el resultado es $z = -a - bi$, que es distinto a $\bar{z} = a - bi$.

➤ $z = a + bi = (a, b)$
$\bar{z} = a - bi = (a, -b)$

3.

a. $\sqrt{29}$	d. $\frac{1}{2}\sqrt{145}$	g. 6
b. $7\sqrt{2}$	e. 3	h. $2\sqrt{17}$
c. $\frac{1}{3}\sqrt{37}$	f. $\frac{1}{10}\sqrt{13}$	i. $\sqrt{\frac{13}{15}}$

Página 90

5.

a.
$z_1 = -1 + 3i = (-1, 3)$. $z_2 = -3 + 2i = (-3, 2)$
$z_3 = -2 = (-2, 0)$. $z_4 = -3 - i = (-3, -1)$
$z_5 = -3 - 3i = (-3, -3)$. $z_6 = -4i = (0, -4)$
$z_7 = 1 - 2i = (1, -2)$. $z_8 = 4 - i = (4, -1)$
$z_9 = 4 = (4, 0)$

b.
$|z_1| = \sqrt{10}$; $\bar{z}_1 = -1 - 3i$; $|\bar{z}_1| = \sqrt{10}$
$|z_2| = \sqrt{13}$; $\bar{z}_2 = -3 - 2i$; $|\bar{z}_2| = \sqrt{13}$
$|z_3| = 2$; $\bar{z}_3 = -2$; $|\bar{z}_3| = 2$
$|z_4| = \sqrt{10}$; $\bar{z}_4 = -3 + i$; $|\bar{z}_4| = \sqrt{10}$
$|z_5| = 3\sqrt{2}$; $\bar{z}_5 = -3 + 3i$; $|\bar{z}_5| = 3\sqrt{2}$
$|z_6| = 4$; $\bar{z}_6 = 4i$; $|\bar{z}_6| = 4$
$|z_7| = \sqrt{5}$; $\bar{z}_7 = 1 + 2i$; $|\bar{z}_7| = \sqrt{5}$
$|z_8| = \sqrt{17}$; $\bar{z}_8 = 4 + i$; $|\bar{z}_8| = \sqrt{17}$
$|z_9| = 4$; $\bar{z}_9 = 4$; $|\bar{z}_9| = 4$

6.

a. F. Son iguales.

b. F. Corresponde al valor absoluto de la parte imaginaria.

c. F. Cambia el signo de la parte imaginaria.

d. F. Es igual en magnitud, pero no en signo.

e. V.

f. F. El módulo es $\sqrt{2}$.

7. Camilo, parte real: ±6. Eliana, parte imaginaria: ±8.

➤ Respuesta variable, por ejemplo, utilizar la fórmula del módulo de números complejos y se obtiene la incógnita faltante. Por ejemplo:
$|z| = \sqrt{6^2 + b^2} = 10 \to 100 = 36 + b^2 \to 64 = b^2 \to \pm 8 = b$.

Para concluir

a. Respuesta personal del estudiante.

b. Respuesta personal del estudiante.

Página 91 Antes de continuar

1. Ecuación 1: $x_1 = -1 + 2i$; $x_2 = -1 - 2i$.
$Im(x_1) = 2$; $Im(x_2) = -2$
Ecuación 2: $x_1 = -12i$; $x_2 = 12i$. $Im(x_1) = -12$; $Im(x_2) = 12$
Ecuación 3: $x_1 = \frac{-5}{12} + \frac{\sqrt{2375}}{12}i$; $x_2 = \frac{-5}{12} - \frac{\sqrt{2375}}{12}i$.
$Im(x_1) = \frac{5\sqrt{95}}{12}$, $Im(x_2) = -\frac{5\sqrt{95}}{12}$

2.

a. $i^{96} = i^{4 \cdot 24 + 0} = i^0 = 1$	d. $i^{36} = i^{4 \cdot 6 + 0} = i^0 = 1$
b. $i^{185} = i^{4 \cdot 46 + 1} = i^1 = i$	e. $i^{175} = i^{4 \cdot 43 + 3} = i^3 = -i$
c. $i^{220} = i^{4 \cdot 55 + 0} = i^0 = 1$	f. $i^{240} = i^{4 \cdot 60 + 0} = i^0 = 1$

4.

g. $z_1 = -2 + 4i$; $z_2 = -3 + 2i$; $z_3 = -2 - i$; $z_4 = 2 + 3i$ y $z_5 = 3$.

h. El de mayor parte real es $Re(z_5) = 3$ y el de menor es $Re(z_2) = -3$

i. Los números que tienen el mismo módulo son $z_2 = -3 + 2i$ y $z_4 = 2 + 3i$, ya que el módulo de cada número es $\sqrt{13}$.

5. $n = \frac{68}{3}$

Lección 8: Resolución de problemas usando la operatoria de números complejos

Página 92 Adición y sustracción de números complejos

1.

a. Sumó las partes reales y las partes imaginarias.

b. Aplicó el inverso aditivo y operó como suma de dos números complejos.

c. $z_1 + z_2 = (8, 9)$; $z_3 - z_1 = (1, -3)$

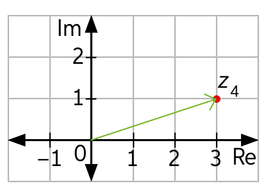
d. Que al sumar o restar dos vectores se realiza componente a componente. Y en la suma y resta de números complejos se realiza lo mismo pero con sus partes reales e imaginarias.

Página 93

➤ $(a - c) + (b - d)i$

2.

a.



b. Cambia de sentido

3.

a. **Paso 1:** Se escribió z y w de forma binomial. **Paso 2:** Se agruparon las partes reales e imaginarias. **Paso 3:** Se aplicó la definición del conjugado de un número complejo. **Paso 4:** Se ordenó la expresión para formar a z y w. **Paso 5:** Se aplicó la definición del conjugado de un número complejo, llegando a la expresión final: $\bar{z} + \bar{w}$. Si $z = 5 + 4i$ y $w = 2 + 6i$, entonces $z + w = 7 + 10i$ y $\overline{z + w} = \overline{7 + 10i} = 7 - 10i$. Por otro lado, $\bar{z} = 5 - 4i$; $\bar{w} = 2 - 6i$, por lo que $\bar{z} + \bar{w} = 5 - 4i + 2 - 6i = 7 - 10i$, con lo que se cumple la propiedad.

b. Dado $z = a + bi$, donde $Re(z) = a$, se tiene: $z + \bar{z} = a + bi + (a - bi) = a + a + bi - bi = 2a$

Página 94

4. Respuestas dependen de los estudiantes.

Para concluir

a. Respuesta personal del estudiante.
b. Respuesta personal del estudiante.
c. Respuesta personal del estudiante.

Página 95 Multiplicación de números complejos

1. Respuesta personal del estudiante.

b. Propiedades de multiplicación de binomios y regla de signos.
c. A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Respuesta personal del estudiante.

Página 96

2.

a. (15, –5) b. (26, –7) c. (–26, 7) d. (–15, 5)

3.

a. $|z_1| = 2\sqrt{2}$; $|z_2| = 4\sqrt{2}$; $|z_3| = \sqrt{2}$

b. El módulo de z_2 es el doble que el módulo de z_1, y el módulo de z_3 es la mitad que el módulo de z_1.

4.

a. $6{,}9 - 12i$ b. $-4{,}6 + 8i$ c. $-\frac{7}{2} - 35i$

Página 97

5.

a.
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

b. $(p, 0) \cdot (q, 0) = (pq - 0, 0 + 0) = (pq, 0) = pq$
Se concluye que la multiplicación en $\mathbb{R}$ es un caso particular de la multiplicación en $\mathbb{C}$.

c. Respuesta personal del estudiante.

6.

a. $z_1 = (-1, 5) = -1 + 5i$; $z_2 = (5, 4) = 5 + 4i$
b. $|z_1| = \sqrt{26}$; $|z_2| = \sqrt{41}$
c. $z_1 \cdot z_2 = -25 + 21i$; $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{1066}$

7.

a. El cuadrado del módulo de un número complejo es igual al producto entre el número complejo y su conjugado.

b. Respuesta variable, por ejemplo:
$z_1 = 5 + 2i$; $z_2 = 8 + i$; $z_3 = 3 - 3i$
Para $z_1 = 5 + 2i$: $|z_1| = 29$ y $\overline{z_1} = 5 - 2i$. Al desarrollar $z_1 \cdot \overline{z_1}$ se obtiene:
$(5 + 2i)(5 - 2i) = 25 - 10i + 10i - 4i^2 = 25 + 4 = 29.$
Para $z_2 = 8 + i$: $|z_2| = 65$ y $\overline{z_2} = 8 - i$. Al desarrollar $z_2 \cdot \overline{z_2}$ se obtiene:
$(8 + i)(8 - i) = 64 - 8i + 8i - i^2 = 64 + 1 = 65.$

8.

a. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

b. Sí, es correcto. Se puede probar con diferentes números complejos.

Para concluir

a. Se puede multiplicar dos números complejos utilizando su forma binomial o como par ordenado.
b. Respuesta personal del estudiante.
c. Respuesta personal del estudiante.

Página 98 División de números complejos

1.

a. El inverso multiplicativo de un número complejo corresponde al cociente entre su conjugado y el cuadrado del módulo del número complejo, es decir: $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

b. Respuesta personal del estudiante.

Respuesta personal del estudiante.

2.

a. $3 + 2i$
b. $\frac{26}{37} + \frac{29}{37}i$
c. $\frac{13}{17} + \frac{1}{17}i$
d. $\frac{5}{2} + 2i$
e. $\frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$
f. $-\frac{21}{10} - \frac{7}{10}i$
g. $-3 - \sqrt{5}i$
h. $5 + 2i$

Respuesta personal del estudiante.

Página 99

3.

a. $\frac{1}{10} + \frac{7}{5}i$ b. $-\frac{1}{2}$

4.

a. Sea $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{1}{c^2 + d^2} \cdot (a - bi)(c + di)$$
$$= \frac{1}{c^2 + d^2} \cdot ((ac + bd) + (ad - bc)\,i)$$
$$= \frac{1}{c^2 + d^2} \cdot ((ac + bd) - (bc - ad)\,i)$$
$$= \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

b. Respuesta depende del estudiante.
c. Respuesta depende del estudiante
d. Porque no se puede dividir por 0 ya que no está definido.

5.

a. Con $v = 0$: $E = mc^2$. Con $v = 200\,000$ km/s:

$E = mc^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Con $v = 1{,}5c$: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1{,}25}\ i}$.

b. Respuesta depende del estudiante.

Página 100

Para concluir

a. Respuesta variable, por ejemplo:

- $\frac{9+2i}{5+4i} = \frac{53}{41} - \frac{26}{41}i$
- $\frac{6+2i}{4-i} = \frac{22}{17} - \frac{8}{13}i$

b. Respuesta personal del estudiante.

c. Respuesta personal del estudiante.

Página 101 Antes de continuar

1.

a. $-2i$

b. $-11 - 7i$

c. $\frac{15}{34} - \frac{9}{34}i$

d. $-27 + 24i$

e. $10 + 62i$

f. $-\frac{91}{30} + \frac{213}{30}i$

g. $-5 + 9i$

2. Respuesta variable.

3. $a = 1{,}7$; $b = 3{,}3$.

Página 102 Síntesis

1. Respuesta variable. Respuesta personal del estudiante.

Página 103 Repaso

1.

a. $x = -16$

b. $x_1 = 11i$; $x_2 = -11i$

c. $x_1 = 9i$; $x_2 = -9i$

2.

a. $Re(z_1) = 5$; $Im(z_1) = -4$

b. $Re(z_2) = -8$; $Im(z_2) = 0{,}4$

c. $Re(z_3) = 0$; $Im(z_3) = -17$

d. $Re(z_4) = -31$; $Im(z_4) = 0$

3.

a. i

b. 1

c. $-i$

d. 1

4.

a. $z_1 = (3, -5)$

b. $z_2 = (-4, 2)$

c. $z_3 = (6, -5)$

d. $z_4 = (-2, -3)$

5.

a. $|z_1| = \sqrt{34}$; $\overline{z_1} = 5 + 3i$

b. $|z_2| = \sqrt{85}$; $\overline{z_2} = -6 - 7i$

c. $|z_3| = \sqrt{20}$; $\overline{z_3} = 2 + 4i$

d. $|z_4| = \sqrt{208}$; $\overline{z_4} = -12 - 8i$

6.

a. $(5, 3)$

b. $-4 + 9i$

c. $11 - 7i$

d. $1 + 14i$

e. $(-38, -16)$

f. $\left(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$

7.

a. $-12i$

b. $-78 + 14i$

c. 306

d. $\frac{727}{170} + \frac{271}{170}i$

e. $\frac{-\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}i$

f. $\frac{34\sqrt{185} - 185}{1258} + \frac{72}{34}i$

8.

a. $-3 - 11i = (-3, -11)$

b. $\sqrt{5}$

c. $\sqrt{41}$

d. Es falso el resultado, ya que:

$= \frac{2+3i}{-3-i} \cdot \frac{-3+i}{-3+i} = \frac{-6+2i-9i-3}{9+1} = \frac{-9}{10} - \frac{7}{10}i$

Página 104 ¿Qué aprendí?

1.

a. $(8, 4)$

b. $2 - 9i$

c. $(0, 6)$

d. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}i$

e. $(-3, -11)$

f. $6 + 5i$

g. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

h. $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

i. $\left(\frac{9}{2}, -7\right)$

j. $-7 - 12i$

k. $(14, 0)$

l. $\frac{1}{9} + 5i$

2.

a. Respuesta variable, por ejemplo, $z = 5 - 2i$.

b. Respuesta variable, por ejemplo, $z = -3i$.

c. Respuesta variable, por ejemplo, $z = 25 + 4i$.

d. Respuesta variable, por ejemplo, $z = 5 + 10i$.

3.

a. $z_1 = -4 + 3i$; $|z_1| = 5$; $\overline{z_1} = -4 - 3i$

b. $z_2 = 2 + 4i$; $|z_2| = \sqrt{20}$; $\overline{z_2} = 2 - 4i$

4.

a. z_1: 4° cuadrante. $|z_1| = \sqrt{2}$

b. z_2: 1° cuadrante. $|z_2| = \sqrt{58}$

c. z_3: 4° cuadrante. $|z_3| = 2\sqrt{17}$

d. z_4: 2° cuadrante. $|z_4| = \sqrt{130}$

e. z_5: 4° cuadrante. $|z_5| = \sqrt{113}$

f. z_6: 1° cuadrante. $|z_6| = \sqrt{29}$

5.

a. $-z_1 = -2 + 3i$

b. $-z_2 = -5 - i$

c. $-z_3 = 4 + 2i$

d. $-z_4 = -6 + 6i$

e. $-z_5 = -9 + 8i$

f. $-z_6 = -5i$

Página 105

6.

a. $z_1 + z_2 = -5 + 7i$; $Re = -5$; $Im = 7$.

b. $z_2 - z_3 = -3 + 3i$; $Re = -3$; $Im = 3$.

c. $z_1 - (z_2 - z_4) - z_3 = 1 - 4i$; $Re = 1$; $Im = -4$.

d. $z_4 + z_3 - z_2 = 6 - 5i$; $Re = 6$; $Im = -5$.

e. $z_1 - z_2 - z_3 - z_4 = -5$; $Re = 5$; $Im = 0$.

f. $z_4 - z_3 + z_2 = i$; $Re = 0$; $Im = 1$.

7.

a. $-\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$

b. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}i$

c. $-\frac{7}{34} + \frac{23}{34}i$

d. $-\frac{6}{17} + \frac{7}{17}i$

e. $-\frac{132}{17} + \frac{186}{17}i$

f. $\frac{212}{17} - \frac{32}{17}i$

8.

a. Interpretó el valor de i como -1, y descompuso a i^2 como $\sqrt{1}$ i.

b. $(4 - 5i) \cdot (7 - 6i) = 28 - 24i - 35i + 30i^2$
$= 28 - 59i + 30 \cdot -1 = 28 - 28 - 59i - 30$
$= -2 - 59i$.

9. Ariel: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Paula: $z = \frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

Página 18 Puntaje PSU y las medidas de dispersión

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Análisis y argumentación	Explican de forma adecuada los conceptos matemáticos relacionados con el puntaje PSU. Concluyen correctamente que los puntajes solo se pueden comparar en un mismo año.	Explican de forma adecuada los conceptos matemáticos relacionados con el puntaje PSU pero no llegan a una conclusión correcta.	La explicación demuestra poco entendimiento de los conceptos matemáticos. Concluyen que a María Paz le fue mejor en la PSU.
Comunicación y valoración de opiniones	Se comunican de forma clara y precisa a sus compañeros y valoran sus opiniones.	Se comunican de forma clara y precisa a sus compañeros, pero no valoran las opiniones de otros.	La comunicación a sus compañeros no es clara y no se valoran las opiniones de otros.

Página 23 El problema de Monty Hall y la toma de decisiones

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Análisis de la información	Analizan la información obtenida de manera rigurosa.	Analizan parte de la información obtenida, de manera adecuada.	Analizan la información obtenida, de manera poco específica.
Resultados y análisis de resultados	Realizan valoraciones y/o emiten juicios sobre los resultados obtenidos con un correcto cálculo.	Realizan valoraciones y/o emiten juicios sobre los resultados obtenidos de manera adecuada.	Realizan valoraciones y/o emiten juicios con errores en los cálculos obtenidos.
Uso plataforma digital	Utilizan plataforma digital para compartir todos sus resultados.	Utilizan plataforma digital para compartir parte de sus resultados.	No utilizan plataforma digital para compartir los resultados obtenidos.

Página 39 Crecimiento en el uso de las redes socialesl

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Tabla y gráfica	Organizan y representan la información en una tabla y gráfico. Estos están construidos y analizados correctamente.	Organizan la información en una tabla Sin embargo, la gráfica no se adecúa a la variable de estudio.	No se organiza la información en una tabla ni se representa en un gráfico.
Explicación de resultados y uso de plataforma digital	La explicación es detallada y clara. Usan plataforma digital con información completa.	La explicación es difícil de entender. Usan plataforma con información incompleta.	La explicación es difícil de entender, tiene componentes ausentes.
Orden y organización tríptico/ folleto informativo	El tríptico es presentado de manera organizada, con información precisa.	El tríptico es presentado de manera organizada, pero falta información.	El tríptico se ve desorganizado, y carece de información.

Página 48 Logaritmos en la astronomía

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Organización de resultados	Concentran todos los datos obtenidos en una tabla de manera ordenada.	Concentran todos los datos obtenidos en una tabla, pero de manera desordenada.	No ordenan los datos obtenidos en una tabla.
Conclusiones	Presentan un completo análisis e interpretación del comportamiento de la función.	Presenta un análisis e interpretación del comportamiento de la función pero de forma muy breve.	Presentan escasamente una interpretación o análisis de comportamiento de la función, con ciertas confusiones.
Plataforma redes sociales	Presentan de forma creativa y completa los resultados obtenidos.	Presentan de forma completa los resultados obtenidos.	No presentan resultados en una plataforma digital.

Página 62 Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia mediante videos

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Conceptos matemáticos	Aplican de manera correcta los teoremas referente a ángulos del centro e inscrito de una circunferencia en situaciones cotidianas.	Aplican los teoremas referente a ángulos del centro e inscrito de una circunferencia en situaciones cotidianas, presentando algunas confusiones.	Aplican incorrectamente los teoremas referente a ángulos del centro e inscrito de una circunferencia en situaciones cotidianas.
***Software* de edición**	La calidad del video es buena, y presenta una excelente edición utilizando diferentes recursos visuales.	La calidad del video es buena pero no existe gran variedad de recursos utilizados en este.	La calidad del video no es la óptima. No se utilizan recursos visuales y tampoco está editado.
Tiempo de exposición	Cumplen con el tiempo establecido por el docente.	Exceden y/o sobrepasan en 5 minutos el tiempo establecido por el docente.	Exceden y/o sobrepasan en 10 minutos el tiempo establecido por el docente.

Página 72 La rueda

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Búsqueda de información y fotografía	Utilizan correctamente los recursos y/o medios para buscar fotografías.	Utilizan recursos y/o medios para buscar parte de la información.	Utilizan pocos recursos y/o medios para buscar la información necesaria.
Problema propuesto	El problema muestra completo entendimiento del concepto matemático estudiado.	El problema muestra poca comprensión del concepto matemático estudiado.	No existe relación entre el problema y el concepto matemático estudiado.
Cálculos y análisis	Se aplicaron todos los teoremas requeridos, con argumentos lógicos y apropiados.	Se aplicaron los teoremas requeridos, con poca argumentación.	No se aplicaron los teoremas correctamente, poca argumentación.

Página 74 Eclipses

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Organización de la información	Información clara, y muy bien organizada.	Información concreta y bien organizada.	No se organiza la información.
Ortografía y redacción del tríptico	El texto está bien redactado y presenta entre 0 y 5 errores ortográficos.	El texto está bien redactado y presenta entre 5 y 10 errores ortográficos.	El texto no está bien redactado o presenta más de 10 errores ortográficos.
Discusión de resultados	Basan sus respuestas en la información requerida, la que es precisa, pertinente y válida.	Basan sus respuestas en la información requerida. Tiene un análisis breve.	Las respuestas no coinciden con los resultados obtenidos.

Página 85 Las aplicaciones de los números complejos

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Análisis de contenido	Se muestra un completo entendimiento del tema.	Se muestra un buen entendimiento del tema.	Se muestra solo en partes, un buen entendimiento.
Plataforma digital/ Exposición	Utilizan redes sociales y exponen su afiche.	Utilizan redes sociales, pero no exponen su afiche.	No utilizan plataformas y/o redes sociales.
Opinión-argumentación	Reflexión crítica sobre la aplicación, e importancia de las matemáticas en fenómenos cotidianos.	Reflexión crítica breve sobre la importancia de las matemáticas en fenómenos cotidianos.	Carece de reflexión sobre aplicación, e importancia de las matemáticas en fenómenos cotidianos.

Página 100 Divisiones con números complejos utilizando cómic

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Organización	El comic está bien organizado. Las viñetas tienen una secuencia lógica, y clara transición.	El comic está organizado las transiciones usadas son entendibles.	El comic no está del todo organizado, y las transiciones no son claras.
Diálogos- guión	Diálogos están acordes al tema propuesto.	Diálogo adecuado al tema propuesto.	Diálogos no van acordes al tema propuesto.
Originalidad de los dibujos	Los dibujos reflejan creatividad y originalidad del estudiante.	Los dibujos reflejan creatividad del estudiante.	Los dibujos están basados en diseños conocidos.

A

Arco: parte de una circunferencia. Se nombra por sus puntos extremos en sentido antihorario.

C

Capitalización: proyección de un monto en el futuro con un interés dado.

Círculo: región o área del plano delimitado por una circunferencia.

Circuncentro: centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo.

Circunferencia: lugar geométrico formado por los puntos que están a igual distancia de un punto común llamado centro.

Circunferencia circunscrita: circunferencia con origen en el circuncentro. Contiene al polígono en su interior y todos sus vértices.

Circunferencia inscrita: circunferencia que se halla al interior de un polígono y es tangente a todos los lados de este.

Coseno de α: en un triángulo rectángulo, es la razón entre el cateto adyacente al ángulo α y la hipotenusa.

D

Demostración: secuencia lógica basada en definiciones, postulados o axiomas y teoremas que permite determinar nuevos resultados matemáticos.

Distribución binomial: distribución de probabilidad discreta que describe el número de éxitos al realizar n experimentos independientes entre sí acerca de una variable aleatoria.

Distribución normal: distribución de probabilidad de variable continua que aparece con mayor frecuencia en estadística y en probabilidades.

Dominio: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente de una función.

E

Evento o suceso: conjunto de algunos resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, en el experimento “lanzar una moneda y que al caer, salga cara”, el evento es “que salga cara”.

Eventos dependientes: eventos tales que la ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Eventos independientes: eventos tales que la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad del otro.

Experimento aleatorio: experimento que depende del azar, es decir, no se puede asegurar cierto resultado aunque se repita bajo las mismas condiciones.

Experimento de Bernoulli: experimento aleatorio que tiene resultados dicotómicos, es decir, solo dos posibilidades de ocurrencia (éxito y fracaso).

F

Función: relación entre elementos de dos conjuntos A y B, tal que a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento de B.

Función creciente: función cuyos valores aumentan a medida que los valores de su dominio crecen.

Función decreciente: función cuyos valores disminuyen a medida que los de su dominio crecen.

Función de densidad: función que asocia los valores de una variable aleatoria continua, agrupados en intervalos de cierta amplitud, con la probabilidad de cada uno de ellos. Permite obtener la probabilidad de que un valor de la variable aleatoria se encuentre entre dos puntos.

Función de probabilidad: función que relaciona cada valor de una variable aleatoria con su probabilidad.

Función potencia: función real de la forma $f(x) = ax^n$, donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

H

Heterogéneo: en un conjunto de datos, se refiere a que ellos son muy distintos entre sí.

Homogéneo: en un conjunto de datos, se refiere a que ellos son similares entre sí.

I

Interés: diferencia entre el capital final y el capital inicial de acuerdo con un cierto crédito.

Intervalo de confianza: rango de valores que se usa para estimar el valor real de un parámetro de la población a partir de la muestra.

IVA: impuesto al valor agregado que se aplica a cada producto que tiene un valor neto (valor sin impuesto). Actualmente este impuesto en Chile corresponde al 19 % del valor neto del producto.

M

Media aritmética: medida de tendencia central que corresponde al promedio de un conjunto de datos.

Media muestral: promedio obtenido a partir de los datos de una muestra.

Media poblacional: promedio de toda la población.

Medidas de dispersión: valores que indican la proximidad entre sí o respecto del promedio de los datos de un conjunto.

Medidas de posición: valores mayores o iguales a los de un porcentaje dado de la población.

Muestra aleatoria: parte de una población escogida al azar.

N

Nivel de confianza: proporción de veces en que el intervalo obtenido realmente contiene el parámetro.

Números reales: conjunto que contiene todos los números racionales e irracionales. Se simboliza por medio de la letra $\mathbb{R}$.

P

Par ordenado: par de valores (x, y) que sirven para ubicar un punto en el plano cartesiano. Por ejemplo, A(5, –8) representa un par ordenado.

Parámetros: valores que definen una expresión determinada. En el caso de las funciones, corresponden a sus coeficientes y términos.

Pendiente de una recta: inclinación de una recta con respecto al eje horizontal (eje X). Cuando la representación algebraica de la recta está en la forma $y = mx + n$, m corresponde a la pendiente.

Plano cartesiano: sistema de coordenadas formado por dos ejes (rectas numéricas) que se intersecan perpendicularmente en un punto llamado origen.

Población: grupo completo de los objetos o individuos en estudio.

Presupuesto: ingresos esperados y los gastos previstos durante un periodo de tiempo.

R

Radio: segmento que une un punto de una circunferencia con su centro.

Rectas coincidentes: rectas que se intersecan en todos sus puntos.

Rectas paralelas: rectas que están en un mismo plano cuya pendiente es la misma.

Rectas perpendiculares: rectas que se intersecan formando ángulos rectos.

Rectas secantes: rectas que se intersecan en un punto.

S

Secante a una circunferencia: recta que se interseca con una circunferencia en dos puntos.

Seno de α: en un triángulo rectángulo, razón entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa.

T

Tangente a una circunferencia: recta que se interseca con una circunferencia en un solo punto de ella. Además, es perpendicular en dicho punto al radio de ella.

Teorema de Pitágoras: teorema que relaciona las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

V

Valor esperado: en una variable aleatoria discreta, corresponde a la suma de los productos entre cada elemento del recorrido de la variable aleatoria X y su probabilidad respectiva.

Variable aleatoria: función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral de un experimento.

Variable aleatoria continua: función cuyo recorrido es un intervalo de números reales. Por ejemplo: la estatura, el tiempo o la temperatura.

Variable aleatoria discreta: función cuyo recorrido es un subconjunto de números enteros. Por ejemplo: la cantidad de hermanos, el número de puntos obtenidos, etc.

Variación porcentual: variación representada por medio de porcentajes.

Varianza: medida de dispersión que corresponde al promedio entre los cuadrados de las diferencias de cada dato con el promedio de ellos.

UNIDAD 1: La toma de decisiones en situaciones financieras y económicas

Página 106

1. Respuesta personal.
2. Respuesta personal.
3. Respuesta personal.
4. Respuesta variable, depende de la reflexión del estudiante.
5. Respuesta personal.
6. Respuesta variable, por ejemplo las tarjetas de débito y crédito.

Página 108 Activo lo que sé

1.

a. 90 días
- 3 meses
- ¼ año
- 1 trimestre

b. 18 meses
- 540 días
- 6 trimestres
- 1,5 años

2.

a. 6
b. 27
c. 108
d. 0,91
e. 0,1387
f. 0,000004

3. 107 minutos

4. \$110 250

5. La Tasa B, ya que tiene menor interés compuesto anual.

6. El compuesto. La comprobación es personal.

Lección 1 Toma de decisiones aplicando porcentajes

Página 109 Porcentajes en el comercio

1.

a. Respuesta personal.

➤ Respuesta variable. Por ejemplo, pueden utilizar regla de 3 o multiplicar \$1350 por 0,1

c. Tenemos:

2da Oferta	Precio	Contenido	$ / gr
Original	\$1350	200 g	\$6,75/gr
Oferta	\$1350	220 g	\$6,136/gr

d. La primera oferta resulta más conveniente.

Página 110

➤ Respuesta personal del estudiante.

➤ Respuesta variable. Por ejemplo, el precio por unidad.

2. Los precios por los 3 yogures son equivalentes, para ambas ofertas el costo es \$840.

3. El precio final es 0,96 veces el precio original.

➤ Para ningún valor de *i*.

Página 111

4.

a. No fue conveniente, perdieron por unidad \$100 797 pesos por guitarra y el aumento de ventas no fue suficiente para mantener la ganancia total respecto a su precio y ventas originales.
b. En un 38,9 %.
c. Mínimo de 5.

5.

a. Los descuentos sucesivos del recuadro amarillo no corresponden al 40 % y el aumento de un 33 % en volumen no es equivalente a una reducción del 33 % en precio.
b. Respuesta personal.

Página 112

6.

a. \$19 440,5 el dólar y \$23 537,6 el euro.
b. Conviene pagar en dolares.
c. Se hubiese ahorrado un 8 % en el caso de los dólares y un 12,5 % en el caso de los euros
d. Si, la opción más conveniente hubiera sido transformar dólares a pesos, pagando 889,65 de comisión y gastando en total \$13 389,65.

Para concluir

a. Respuesta personal.
b. Respuesta personal.
c. Respuesta personal.

Página 113 Presupuesto y planificación

1.

a. \$55 000
b. \$33 500
c. Si, \$21 500 más.

2.

a. Respuesta personal.
b. Respuesta personal.
c. Respuesta variable. Por ejemplo, porque brinda un colchón financiero de emergencia.

Página 114

➤ Respuesta variable. Por ejemplo, eliminar gastos innecesarios.

Página 115

3.

a. Respuesta personal.
b. Respuesta personal.

4.

a. **Gastos:** Servicios básicos, celular, arriendo, almuerzo en el trabajo, comida sábado y domingo, transporte de lunes a viernes, recreación y vestimenta. **Ingresos:** Sueldo líquido.
b. Respuesta personal.
c. No es conveniente adquirir un automóvil. No considera gastos del fin de semana. Además tiene gastos excesivos en vestimenta y recreación.
d. Respuesta personal.
e. Respuesta personal

Página 117

5.

a. **Gastos fijos:** Alojamiento, bienes y servicios diversos. **Gastos variables necesarios:** Alimentos y bebidas no alcohólicas, vestuario, comunicaciones, educación y transporte. **Gastos variables no necesarios:** Bebidas alcohólicas, recreación y cultura, restaurantes y hoteles. **Gastos imprevistos y ocasionales:** Muebles, bienes y servicios diversos, salud.

b. Alimentos y bebidno alcohólicas.
c. Respuesta personal.
d. Respuesta variable. Por ejemplo reparaciones.
e. En otros de la categoría variables no necesarios o gastos variables necesarios.
f. Para un sueldo mínimo de $301 000 tendremos que el gasto corresponde a $45 752 de transporte y $42 742 de alojamiento que no es factible.
g. Son $53 287 mensuales que corresponden a $528,4 diarios. Para tener una buena alimentación es necesario eliminar la mayor cantidad de gastos variables no necesarios.

Página 118

- Respuesta personal.
- El IPC es importante para monitorear la variación de los precios de productos de uso común.

6.
a. Son capaces de ahorrar $933 000 mensuales.
b. Sus gastos serán $791 250 y su capacidad de ahorro se verá reducida en $41 500.
c. Porcentualmente aumentará en un 13,94 % a $1 083 569,4

7. Respuesta personal.

Para Concluir
a. Significa que los precios disminuirán en un 0,8 %. Un kg de pan valdrá menos $843.
b. Respuesta variable. Por ejemplo, no contempla la inflación general.

Página 119 Remuneraciones y descuentos legales

1.
a. Recibirá $1 000 500. b. $1 321 839.

Página 120

- Respuesta variable. Por ejemplo: Agricultores.
- Deben entregar fondos en las AFP para obtener pensión de jubilación.

2.
a. $504 708, variando en un 0,7 %.
b. El seguro de cesantía será de $3834

Página 121

3. Su nuevo sueldo bruto de $764 000, el descuento a mayo del 2019 por impuestos corresponde a 0,04, obteniendo $30 560 que se rebajan $26 241,3. Pagando $4318,7 por impuesto de segunda categoría.

- Respuesta variable. Por ejemplo, las ventajas de un trabajador independiente es el horario propio y las desventajas es el sueldo variable.

4. Respuesta personal. Montos son: Independiente $540 000; Dependiente $538 758.

Para concluir:
a. Respuesta personal. b. Respuesta personal.

Página 122 Antes de continuar

1. La primera oferta $4,6875 precio por gramo.

2.
a. Recibe 90 288 yenes. b. Recibiría 698 euros.
c. La comisión sería en total de 15 euros.

3. Los ingresos debiesen ser $893 490

4.
a. Respuesta personal. b. Respuesta personal.

Lección 2 Toma de decisiones aplicando tasas de interés compuesto

Página 123 Ahorro e inversiones

1.
a. Respuesta personal.
b. FUTURO entrega más. PIRAMIDAL entrega menos.
c. Respuesta personal.

- Inversiones Piramidal S.A. “triplica el dinero”, sin embargo no ofrece garantías.

Página 124

2.
a. 1500 %.
b. El rendimiento fue 2000 %, se ganaron 19 000USD
c. El rendimiento en este periodo fue de –25 %
d. $1,25 \cdot 1,2 \cdot 0,833 \cdot 1,32 \cdot 1,212 \cdot 1,75 \cdot 1,1428 \cdot 1,25 \cdot 0,9 \cdot 1,66 \cdot 2,66 \cdot 0,75 = 15$, equivalente a un 1500 %.

- Respuesta personal.

Página 125

3.
a. Depósitos a plazo (60 días) = 4 y 5 veces; Cuenta de ahorro (1 año) = 1 vez; Depósitos a plazo (30 días) = 19 y 23 veces
b. Es conveniente la opción de 60 días.
c. El depósito a plazo de 60 días tiene un interés anual equivalente de 3,03 %.

- Respuesta variable, por ejemplo, donde el monto aumenté más.

4.
a. Mes 3: 10 000; Mes 2: $10\,000 \cdot 1,04$; Mes 1: $10\,000 \cdot 1.04 \cdot 1,04$.
b. El primer monto se capitalizó 2 veces, el segundo una vez y el tercero ninguna.
c. $31 216, corresponde a $(1 + 1,04 + 1,04 \cdot 1,04)$ veces el monto inicial.

Página 126 Para concluir
d. Respuesta personal.
e. Respuesta personal.

Página 127 Créditos

1.
a. Total a pagar, la CAE y el valor de la cuota mensual.
b. Tarjeta de crédito: $225 000; Crédito personal: $225 000; Avance en efectivo: $206 250
c. La oferta con menor CAE tiene menor costo total.
d. Respuesta personal.

Página 128

2.
a. $144 761,34.

b. Primero: \$4386,71; Segundo: \$8374,62; Tercero: \$12 000; Total: \$24 761,33.
c. Primer periodo fue de: \$43 867,07; en el segundo periodo: \$39 879,16 y el tercer periodo \$36 253,78 suman \$120 000.
d. La suma de las amortizaciones es igual al monto otorgado por el banco, que al sumarle los intereses es equivalente en el costo total del crédito.
e. La primera cuota se debe actualizar una vez; la segunda cuota, dos veces; y la tercera tres veces.

3. Respuesta personal.

Página 129

4.
a. Tarjeta 2 por \$124.
b. Tarjeta 1 por \$192.
c. Para montos iguales o menores a \$315 708 es más conveniente la tarjeta 2, mientras que para montos mayores a \$315 708 es mejor la tarjeta 1.

5.
a. El crédito de la automotora tiene menor valor de cuota, menor costo total y menor monto bruto solicitado. El crédito personal bancario tiene menores intereses totales y menor CAE.
b. La opción del crédito personal, ya que cubre la totalidad del vehículo y solo cuesta \$1000 más mensuales.
c. La CAE indica que oferta es más conveniente.

➜ Si, el plazo también es un criterio para tomar decisiones.

Página 130 Para concluir
a. Respuesta personal.
b. Respuesta personal.
c. Respuesta personal.

Página 131 Antes de continuar

1.
a. Mantención: \$6000 (\$2000 por mes) e intereses \$30 000.
b. En intereses se pagará \$25 960 y \$15 000 en gastos legales
c. El crédito personal genera menos intereses.
d. Por costo total es más conveniente la tarjeta.

2.
a. −11,26 %.
b. \$11 255.

3.
a. Ahorra en un año \$660 000.
b. El monto final es de \$2 121 862.
c. El interés fue de \$141 862.

Página 132 Síntesis

1. Respuesta personal.
2. Respuesta personal.

Página 133 Repaso

1. Compra por internet: \$49 400; Compra presencial: \$50 000. Conviene realizar la compra vía internet.
2.
a. Respuesta personal.
b. Respuesta personal.
3.
a. Al 2018, recibirá \$337 500.
b. Debería cobrar \$82 500 por cada revisión.
4. La opción 2, genera \$371 587 y la opción 1 \$371 315.

Página 134 ¿Qué aprendí?

1.
a. A: 22,14 %; B: 21,31 %; C: 22,82 %. Por lo tanto, la Compañía C ofrece mayor descuento.
b. A: 43,6 \$/minuto; B: 25,1 \$/minuto; C: 71 \$/minuto. La compañía B ofrece mejores precios.
c. La compañía A con 10 % de descuento en el precio, quedaría en \$9810 el valor del plan, y el precio por GB sería \$754. La Compañía B debería disminuir 40 % su precio de oferta y la Compañía C debería aumentar un 6 % su precio de oferta para igualar el valor por GB de la Compañía A.

2.
a. Presencial \$31 770 e internet \$34 807, por lo que le conviene comprar de manera presencial.
b. Pagó \$31 992

Página 135

3.
a. La CAE es un índice para comparar diferentes alternativas de créditos que considera el costo total, gastos legales e intereses generados.
b. En la opción B, ya que su CAE es menor.

4.
a. \$539 720
b. Disminuye en 6,25 % y decide no cambiarse.

5.
a. Banco Seguridad: \$28 098; Confianza: \$8415.
b. El Banco Seguridad obtiene mayores intereses.

UNIDAD 2: Modelamiento matemático para describir y predecir.

Página 136

1. Respuesta personal.
2. Respuesta personal del estudiante.
3. Cada 6 horas.
4. Mayor amplitud de onda, más grande es la ola.
5. Respuesta personal del estudiante.

Página 138

1.
a. Afín.
b. Cuadrática.
c. Constante.
d. Cuadrática.
e. Afín.
f. Lineal.
g. Cuadrática.
h. Afín.

2.
a. 4
b. 11
c. 7
d. −2
e. 19
f. 12

3.
a. $f(x) = 180 - 2x$
b.]0, 90[
c.]0, 180[

4.

a. Ángulo y cateto opuesto.
b. sen(α)
c. La distancia es 3,46 m, la relación es tan(α).
d. 4 m.

Lección 3 Construcción de modelos con la función potencia

Página 139 Crecimiento y decrecimiento potencial

1.

- Serian aproximadamente 158 billones de toneladas.

a. Dom: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; Rec: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; x representa la cantidad de habitantes y $f(x)$ la producción de basura.
b. Aproximadamente 1032 millones de toneladas
c. Dom: $\mathbb{R}^+$; Rec: $\mathbb{R}^+$, x representa los millones de habitantes y $f(x)$ la cantidad de basura reciclada.
d. La función es $f(x) = 18x^{-3}$
e. Deben reciclar aproximadamente 12 millones.

Página 140

- $f(x) = 19{,}2x^{-3}$, es decreciente y $f(x) = 2{,}8x^2$ es creciente.

Página 141

2.

a. La función se acerca a los ejes a medida que el modulo de *n* se aleja de 0.
b. Función constante
c. Exponente par.
d. Exponente impar.

- Los ejes de simetría de las funciones pares es el eje Y, para las impares es el origen.

Para concluir

a. Respuesta personal. b. Respuesta personal.

Página 142 Función potencia de exponente positivo

1.

a. $a = 3$ y $n = 3$, es una función creciente.
b. 648 000 personas
c. Aproximadamente 69,33 minutos.
d. $a = -300$ y $n = 5$, es una función decreciente.
e. Aproximadamente en 8 días.

- Solo considera $\mathbb{R}^+$

Página 143

- Son funciones con exponente positivo impar.

2.

- Verdadero.
- Verdadero.
- Falso.
- Verdadero.
- Verdadero.

- Para *a* positivo la función es creciente para $x > 0$.

Página 144

3.

a. 24 cm^3, 81 cm^3 y 192 cm^3 respectivamente.
b. 56 cm^2, 126 cm^2 y 224 cm^2 respectivamente.
c. Área = $12x^2$; Volumen = $3x^3$
d. $\mathbb{R}^+$
e. La superficie crece más rápido si $x < \frac{14}{3}$.
f. Para 350 cm^2 la arista debe ser menor a 5 y para 370 cm^3 debe ser 18

4.

a. El mejor ajuste es $a = -100$ y $n = 4$.
b. Respuesta personal.
c. El dominio es $\mathbb{R}^+$ y el recorrido $\mathbb{R}^-$.

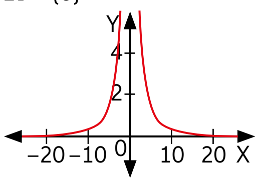
Para Concluir

- Respuesta personal.
- Respuesta personal.

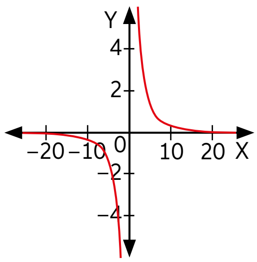
Página 145 Función potencia de exponente negativo

1.

a. $n = -2$ y $a = 30$
b. $\mathbb{R} - \{0\}$
c.



d. Se debe volver a inyectar en 5,477 horas.
e. $n = -3$ y $a = 30$
f. $\mathbb{R} - \{0\}$
g.



h. Se debe volver a inyectar en 3,107 horas.
i. La anestesia $c_1(t)$ tiene mayor duración que $c_2(t)$. Mayor módulo de *n*, más rapido crece o decrece.

Página 146

- El domino se restringe porque si consideramos el cero la función se indefine en ese punto.

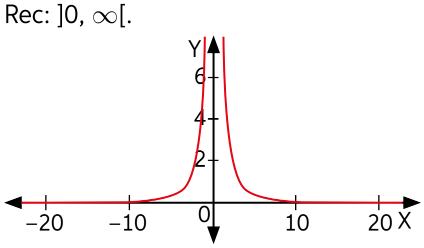
2.

a. Se acerca a los ejes X e Y.
b. Se indetermina, por qué no tiene intersecciones.

Página 147

3.

a. $T(r) = \frac{10}{\pi r^2}$
b. $n = -2$ y $a = \frac{10}{\pi}$
c. Dom:]0, 50] ya que la función depende de *r* y no puede superar el radio máximo.
d. Rec:]0, ∞[.
e.



- Respuesta de reflexión personal

Para concluir

a. Respuesta personal.
b. Respuesta variable. Por ejemplo, las funciones de exponente positivo no se indeterminan en $x = 0$.
c. Respuesta variable. Por ejemplo, se indefine en $x = 0$.

Página 148 Antes de continuar

1.

a. a es negativo y n es negativo.
b. a es positivo y n es positivo e impar.
c. a es positivo y n es positivo y par.

2.

a. El signo de a es positivo y n es positivo.
b. $n = 3$ y $a = 1$.
c. Respuesta personal.

Lección 4: Construcción de modelos con las funciones seno y coseno

Página 149 La circunferencia unitaria

1.

a. Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$ rad.
b. Para 180° es dos veces y para 270° es tres veces. Corresponden a π y $\frac{3\pi}{2}$ respectivamente.
c. Vuelve a la posición inicial, es equivalente a 360°.

Sabemos que un πrad equivale a 180°, entonces $x = \frac{\pi \cdot (\text{grados})}{180}$

Equivale a 6 vueltas.

Página 150

2.

a. $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$
b. $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
c. $\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$
d. $sen(\alpha) = -sen(-\alpha)$

3.

a. 1 y −1.
b. No, se repiten.
c. Cada 2π radianes.

Página 151

4.

a. −660°. Posición final $\frac{-5\pi}{3}$, es posible girarlo en $\frac{\pi}{3}$.
b. Equivale a $\theta = -\frac{\pi}{3}$.
c. Respuesta variable. Por ejemplo, θ puede tomar los valores de $-\frac{\pi}{4}$ o $\frac{7\pi}{4}$.
d. El ángulo puede ser $\frac{7\pi}{4}$ o $\frac{5\pi}{4}$.

Para concluir

a. Al remplazar las equivalencia de las coordenadas x e y se obtiene la ecuación anterior.
b. Sumando o restando 2π para transformarlos.
c. Los radianes a diferencia de los grados sexagesimales toman el valor de los números reales.

Página 152 Funciones seno y coseno

El dominio son número reales.

El periodo es 2π, una vuelta en la circunferencia.

1.

a. t produce movimientos horizontales y c verticales.
b. Eje X.
c. Se repiten los valores anteriores.
d. Eje Y.
e. $\frac{\pi}{2}$.

Página 153

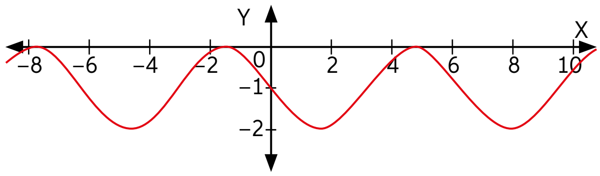
$-\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$

2.

a. Es un buen ajuste, ambas tablas son similares.
b. La posición aumentaría, traslación vertical.
c. La posición disminuye, traslación horizontal.

Para concluir

a. Respuesta personal del estudiante.
b. $f(x) = sen(x + 3\pi) - 1$



Página 154 Amplitud y periodo.

1.

a. A la función seno
b. La altura máxima es 3 y mínima −3.
c. El periodo es 4 segundos.
d. $f(x) = 3sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
e. Si, el modelo de la función anterior se ajusta bien a los datos registrados.

x	f(x)
0	0
0,5	2,1
1	3

Página 155

2.

a. Julio a diciembre.
b. Enero a junio.
c. Mínimo junio y máximo diciembre.
d. El periodo es de 12 meses y la amplitud es de 2,5
e. Respuesta personal.
f. Respuesta personal.
g. Respuesta personal.
h. Respuesta personal.
i. Respuesta personal.

Respuesta variable. Por ejemplo, el modelo contempla el periodo como 365 en vez de 365,25.

Página 156 Para concluir

a. La modificación dentro del argumento modifica el periodo, mientras que el otro la amplitud.
b. Por 0,5.

Página 157 Antes de continuar

1.

a. La amplitud es 2 y el periodo $\frac{\pi}{4}$
b. La amplitud es 6 y el periodo 6π

2.

a. El periodo es 28 y la amplitud es 4
b. No hay traslación.
c. Se traslada verticalmente 5 unidades.
d. $f(x) = 4sen\left(\frac{\pi}{14}x\right) + 5$

e. Respuesta personal del estudiante.
f. Cada 28 días cada uno.
g. Se debe modificar la amplitud, obteniendo
$f(x) = 10{,}16 sen\left(\frac{\pi}{14}x\right) + 5.$

Página 158 Síntesis.
1. Respuesta personal.
2. Respuesta personal.

Página 159 Repaso

1.
a. La función es creciente entre]0,4; 1,5[y]2,6; ∞[.
b. La función es decreciente entre]−∞; 0,4[y]1,5; 2,6[.

2.
a. La función es impar, con *a* negativo y *n* negativo.
b. La función es impar, con *a* positivo y *n* positivo.

3.
a. El periodo es π y la amplitud es 1
b. El periodo es 4π y la amplitud 2.

4. Dependiendo del grado de precisión, constituye un buen o mal modelo.

Página 160 ¿Qué aprendí?

1.
a. $V(r) = 2\pi r^3$
b. La función es creciente para $r > 0$.
c. El radio debe ser mayor a 0.

2.
a. Exponente negativo, ya que decae.
b. Positivo, para $c > 0$ los valores de t son positivos
c. $c(t) = 100t^{-1}$
d. Si, se ajustan.
e. 100 minutos.
f. La concentración se acerca a aproximadamente 0,83.
g. De acuerdo al modelo la concentración para $t = 6{,}67$ es igual a 15.

3.
a. A: 1, Periodo: $\frac{2\pi}{3}$.
b. A: 1, Periodo: 2π.
c. A: 5, Periodo: 16.
d. A: 15, Periodo: 6.

Página 161

4.
a. Dom: $\mathbb{R}$; Rec: [4,5; 17,5]
b. Luego de 91 días serán aproximadamente 17,5 horas.
c. Luego de 273 días serán aproximadamente 4,5 horas.
d. Aproximadamente 182 días. Corresponde al periodo de septiembre a marzo.
e. Aproximadamente 182 días. Corresponde al periodo de marzo a septiembre.
f. 273 días después del 13 de marzo, es decir cercano a finales de diciembre.

5.
a. Dom: $\mathbb{R}$; Rec: [0,02; 0,2]
b. Amplitud: 0,09; Periodo: 365.
c. $\frac{\pi}{2}$ horizontal; 0,11 verticalmente, su periodo se contrae en $\frac{2\pi}{365}$ y amplitud 0,09.
d. $P(t) = 0{,}09 sen\left(\frac{2\pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}11$
e. Aproximadamente 182 días después.
f. En 91 días.
g. El modelo determina el promedio de la probabilidad de lluvia a través de un año, por lo que no se puede determinar si es un buen o mal modelo a partir de un hecho aislado.

Unidad 3: La toma de decisiones en situaciones de incerteza

Página 162
1. Respuesta personal.
2. Respuesta personal.
3. Respuesta personal.
4. Respuesta personal.

Página 164 Activo lo que sé

1.
a. [0, *n*], con *n*: número de alumnos en la sala.
b. Respuesta variable. Un ejemplo de respuesta es “De cero a 10 años”.
c. {2, 4, 6}

2.
a. 0,5
b. 0,1
c. 0,4

3.
a. μ: 1; σ^2: 0
b. μ: 4; σ^2 1
c. μ: 6,9; σ^2: 35,49

4.
a. 0,54
b. 0,22
c. 0,33

Lección 5: Toma de decisiones analizando la distribución binomial

Página 165 Valor esperado y varianza de una variable aleatoria

1.
a. Respuesta variable. Un ejemplo de respuesta es “*X*: Número de tornillos defectuosos al extraer uno de cada bolsa”.
b. {0, 1, 2}.
c. $P(X = 0) = 0{,}56$. $P(X = 1) = 0{,}38$. $P(X = 2) = 0{,}06$
d. Se suman las multiplicaciones de cada valor de la variable aleatoria por su probabilidad asignada.

- No pertenece al recorrido. Si bien, no podemos tener una cantidad 0,5 de tornillos defectuosos, podemos esperar que hayan cero o un tornillo defectuoso.

Página 166
- La varianza mide cómo se dispersan los datos.
- Si

2.
a. *X*: La suma de los números obtenidos al lanzar dos dados.
b. {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
c. Media: 7. Varianza: $5{,}8\overline{3}$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3.

a. 1,05 **b.** σ^2 : 0,848. σ: 0,921.

c. Respuesta variable. Un ejemplo de respuesta es "La medias nos dice que los datos se agrupan alrededor de 1,05. La varianza y la desviación estándar nos dice cómo se dispersan los datos".

- Respuesta variable. Por ejemplo, las varianza permiten saber cómo se dispersan los datos.

Para concluir:

a. *X* tiene mayor media y varianza.

b. Respuesta variable. Un ejemplo de respuesta es "La media es donde se agrupan los datos. La varianza es cuánto peso tienen los datos alejados de la media".

Página 167 Distribución binomial

1.

a. Para cada respuesta al azar existen dos posibilidades, que lo responda correctamente (éxito) o que lo responda incorrectamente (fracaso). *X*: La respuesta sea correcta.

b. $\frac{1}{5}\cdot 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

- Si, ya que el evento favorable es contestar incorrectamente la pregunta. Con p: 0,8 y q: 0,2

c. $n = 20$ y $p = 0,2$

Página 168

d. 0,0074.

e. Los valores que cumplen esta condición son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. La probabilidad de que repruebe el examen es 0,99.

f. El número de pruebas multiplicado por la probabilidad de éxito.

- No, es casi seguro que vaya a reprobar el examen.

2. Media: 5. Varianza: 3,75.

Página 169.

3.

a. $n = 12; p = \frac{1}{3}; q = \frac{2}{3}$

b. Lanzar un dado y obtener un múltiplo de 3 (éxito) o no obtener un múltiplo de 3 (fracaso) define una variable aleatoria Bernoulli. Lanzar varias veces el dado son eventos independientes. Por lo tanto *X* distribuye binomial.

c. 0,632.

d. 0,368. Es 1 menos la probabilidad de tener a lo más 4 éxitos, ya que son eventos complementarios.

e. Valor esperado: 4. Varianza: $2,\overline{6}$

4.

a. Caja normal: $p = 0,35$ y $q = 0,65$. Caja rápida: $p = 0,15$ y $q = 0,85$.

b. 0,1265. **c.** 0,012.

d. Caja rápida: esperanza 0,6. Caja normal: esperanza 1,4. Alrededor de una persona esperará.

e. Aproximadamente 9.

Página 170 Para concluir

a. *X*: Aprobación en matemáticas de un alumno.

b. $n = 38$ y $p = 0,93$. **c.** 35 alumnos.

Página 171 Antes de Continuar

1.

a. *X*: Número de zapatos con fallas.

b. No es de Bernoulli, *X* es binomial.

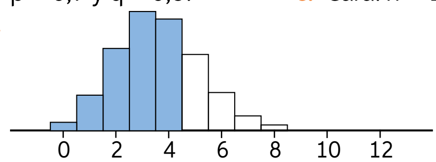
c. Se necesita 1 tacones rojos y 2 zapatos formales.

1.

a. Obtener sello.

b. p = 0,7 y q = 0,3. **c.** Cara. $n = 12$ y $p = 0,3$.

d.



e. Media: 3,6. Varianza: 2,52.

Lección 6 Toma de decisiones analizando la distribución normal

Página 172 Variable aleatoria continua

- Es una función que le asigna un valor a cada posible resultado de un experimento aleatorio.
- Respuesta personal.
- Depende de la forma en que se mida.

1.

a. Es una v.a. continua. **b.** Infinitas.

c. Respuesta variable. Por ejemplo, tiempo o volumen.

2.

a. Discreta; Recorrido: Números enteros desde cero.

b. Discreta; Recorrido: Depende de los valores que se le quiera dar a cada programa.

c. Continua;. Recorrido: [a, b], con a y b reales positivos determinados previamente.

d. Continua; Recorrido: $[0,\infty]$.

Página 173

3.

a. 0,5625. **b.** 0,9375.

4.

- Sería, simplemente, una línea bajo el 1, por lo que tiene un área igual a 0.

a. Pregunta abierta. Por ejemplo, las dos son funciones que le dan un valor a cada posible resultado de un experimento aleatorio.

b. Porque la suma de todas las probabilidades es siempre 1.

Página 174 Distribución normal.

1.

a. Entre $\mu - \sigma$. y $\mu + \sigma$.

b. Con respecto a la media μ.

c. 1 **d.** Se acercan a cero.

e. La media es 2 y la desviación típica es 1. 50 %.

Página 175

2.

a. 0,683. **b.** 0,023. **c.** 0,0015.

3.

a. 0,158. **c.** 64 individuos.

b. 0,1585. **d.** $P(X = 3,6) = 0$.

4. El 0,2 %.

Página 176

5.
- a. Las colas aumentan.
- b. Siempre suman 1.

Para concluir
- a. $P(2 < x < 8) = P(x < 8) - P(x < 2) = 0{,}6563$.
- b. Si, la probabilidad en el punto es cero y da lo mismo usar menor o menor o igual.

Página 177 Distribución normal

1.
- a. La curva se traslada horizontalmente.
- b. Con los datos se alejan más de la media. Con $\sigma < 1$ los datos están más cerca de la media.
- c. Siempre será la misma probabilidad.

2.
- a. Al ser simétrica, solo se necesitan los positivos para concluir todos.
- b. La media es 0, por lo que se acumulan el 50 % de los datos hasta el 0.
- c. El área total es 1, por lo tanto, a medida que z aumenta, vamos acumulando mayor área bajo la curva y nos acercamos a 1.

Página 178

3.
- a. 38,21 %.
- b. 5,48 %.
- c. 10,56 %.
- d. Vemos que Y tiene mayor media, por lo tanto, para el mismo peso tenemos que la probabilidad de que se rompa con el tambor cilíndrico es menor. Se debería optar por la forma cilíndrica.

- Se debe usar que $P(0{,}5 < z < 1) = P(z < 1) - P(z < 0{,}5)$.

Página 179

4.
- a. El 30,78 % podría, por lo que no es recomendable.
- b. El 8,14 % sube acompañado, no es recomendable.
- c. Un 35,5 % acompañados de un adulto más un 7,83 % sin acompañamiento.
- d. Debemos calcular $P(X < 1)$. Al estandarizar nos da un número negativo.

Página 180
- e. Si, ya que prácticamente todos los niños podrán subir al juego.
- f. El 56,75 % de los niños se podrán subir al juego.

Página 181

5.

a. 0,69	c. 0,88	e. 1	g. 0,98
b. 0,023	d. 0,048	f. 0	

6.
- a. 11,69 %
- b. Los resfríos que duran más de 7 días son el 25,25 % y los resfríos que duran menos de 3 días son el 25,25 %. Por lo tanto, no se recomienda.
- c. El 90 % de los resfriados dura entre 0,065 y 9,94 días.

- A medida que nos alejamos de la media, cada día va acumulando menos datos. En otras palabras, las colas se van haciendo cada vez más pequeñas. Por lo tanto, para cada porciento más, se necesitaran más días que cerca de la media.

7. La tienda C.

Página 182 Para concluir
- a.
  - 0,1053
  - 0,3891
- b. 0

Página 183 Estimación de la media de una población

1.
- a. La variable continua: temperatura en que se conservan las vacunas.
- b. Respuesta personal.
- c. Respuesta personal.

Página 184
- d. Muestra 1:]5,57; 6,43]; Muestra 2:]5,45; 6,15[; Muestra 3:]4,17; 4,83[; Muestra 4:]5,08; 5,72[; Muestra 5:]6,2; 6,8[;

- Se van acercando a la media.
- e. Respuesta variable. Por ejemplo, una justificación es que el 60 % de las muestras arrojó un problema con el refrigerador.
- f. Respuesta variable. Por ejemplo, en la muestra 5 por ser el intervalo de confianza más alto.

- No, siempre existe una probabilidad de error.

2.]14,8971; 16,5029[

Para concluir
- a. Respuesta variable, por ejemplo, “si el intervalo de confianza es muy ancho, la estimación es menos precisa”. Para el 0,95:]–1,96; 1,96[; para el 0,99:]–2,17; 2,17[; para el 0,99:]–2,58; 2,58[.

Página 185 Aproximación normal a la binomial
- Pregunta abierta, por ejemplo, la distribución binomial va pareciendo simétrica a medida que n crece y se cumple que los valores extremos tienen poca probabilidad asociada.

1.
- a. Respuesta personal.
- b. El puntaje promedio es 500
- c. Entre más respuestas correctas tenga una persona, mayor será su puntaje.
- d. Una variable binomial con $n = 80$ y $p = 0{,}5$.
- e. Respuesta personal del estudiante.

Página 186
- Respuesta personal.

2.

a. N(22,5; 2,37)	c. 0,8
b. 0,86	d. 0

3.
- a. Una binomial con $n = 64$ y $p = 0{,}5$
- b. 96,96 %, por lo que es un examen fácil
- c. Se debería aprobar con 30 preguntas correctas o más.

Para concluir

- Pregunta abierta.
- La media de la normal es 500, por lo tanto, siempre se cumplirá que el 50 % de los estudiantes estén por debajo de los 500 puntos.
- Cada año cambia la forma de asignar los puntajes a la cantidad de respuestas correctas, cosa que los 500 puntos estén en el promedio de respuestas correctas de todos los estudiantes.

Página 187 Antes de continuar

1.
  a. El 60 %   **b.** 0,4

2.
  a. 0,2743   **b.** 0,2743   **c.** 0,1752   **d.** 0,0666

3. 280 participantes, aproximadamente.

4.]28,18; 31,82[.

Página 188 Síntesis

1. Respuesta variable, por ejemplo puede considerar Modelos de probabilidad

2. Respuesta personal.

Página 189 Repaso

1.
  a. *X*: Responder correctamente una de las preguntas eligiendo una alternativa al azar. $p = 0{,}2$ y $q = 0{,}8$.
  b. $B(22; 0{,}2)$
  c. $P(X < 5) = 0{,}54$. Es más probable que no lo haga.
  d. La media es 4,4, por lo que se debe esperar que responda 4 preguntas correctas.

2. 0,16

3.
  a. (89,185 ; 90,815)
  b. (89,38 ; 90,619)
  c. Con un 99% de confianza, entre 89,185 y 90,815. Con un 95 % de confianza, entre 89,38 y 90,619.

Página 190

1.
  a.
  - 0,0076   • 0,0404   • 0,8486

  b. Pregunta variable. Un ejemplo de respuesta es "La media es 4,5, por lo que se espera que el medicamento no afecte de manera negativa a la gran mayoría de los perros".

2.
  a. 1,24
  b. 0,31
  c. Es un buen ajuste.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,23	0,41	0,28	0,08	0,01

3.
  a. 0,909   **b.** 0,9097   **c.** 0,996

Página 191

4.
  a.]28,178 ; 31,822[
  b. 32 días, de lo contrario se tiene incerteza de su muerte.

5.
  a. 0,8034   **b.** 0,7974   **c.** 22,5 puntos

6. La esperanza el primer bus tiene mayor media y sus tiempos de espera van a ser mayores.

7.
  a. 0,7745   **c.** 0,309   **e.** 0,962
  b. 0,0668   **d.** 0,157

UNIDAD 4: Geometría con coordenadas

Página 192

1. Respuesta personal del estudiante.

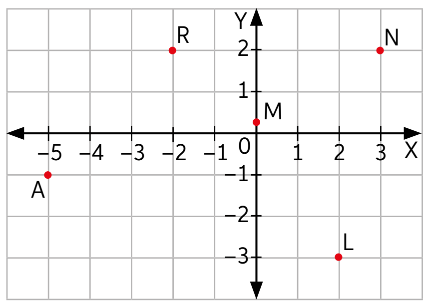
2. A través de coordenadas en el plano, y el punto (0, 0) podría ser la ubicación de la estrella más brillante.

3. Respuesta personal del estudiante.

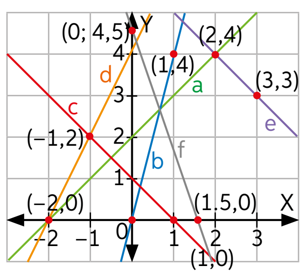
Página 194 Activo lo que sé

1.
  a. AB = 5 cm   **c.** AB = $\sqrt{34}$ cm
  b. AC = 8 cm   **d.** BC = $\sqrt{108}$ cm

2.



3.



4.
  a. 3 (*x* – 2y)   **d.** $(2x - 5y)^2$
  b. 2*x* (2*y* – 5) + 1   **e.** (*x* + 5) (*x* + 2)
  c. $(x + 3)^2$ **f.** $9(x^2 - 3y^2)$

5.
  a. $(x + 3)^2 - 9$ **c.** $(5x + 1)^2 - 1$
  b. $(x - 9)^2 - 81$ **d.** $4(x - 1)^2 - 4$

Lección 7: Resolución de problemas con rectas en el plano cartesiano

Página 195 Distancia entre puntos en el plano cartesiano

1.
  a. Cercano al (3,5; 0,5). No es claro.
  b. Para casos donde no se utilicen ejes coordenados.
  c. Respuesta personal del estudiante.

- No, en la primera se utilizó circunferencias y rectas y en la segunda un triángulo rectángulo.

Página 196

- La distancia entre dos puntos es la raíz de la resta de las coordenadas en *x* al cuadrado más las resta de las coordenadas en *y* al cuadrado.

2.

a. $\text{Perimetro}_{ABCD} = 4\sqrt{18}$
$\text{Perimetro}_{M_1M_2M_3M_4} = 4 \cdot 3 = 12$
$\text{Perimetro}_{DEFG} = 4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

b. Dos veces, se debe a que los *M* son los puntos medios de *ABCD*. La proporción es la misma.

c. $d_{AM_1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $d_{BM_1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Para concluir

a. Respuesta personal.
b. Respuesta personal.

Página 197 Rectas en el plano

1.

a. Las rectas paralelas nunca se intersectan, pero la proyección en un plano de rectas de las rectas en el espacio da la sensación que sí.
b. Este tipo de técnica sirve para darle profundidad a una imagen plana.
c. No.
d. $y = \frac{5}{9}x$ e $y = -\frac{1}{3}x$
e. Respuesta personal. Por ejemplo,

- La homotecia consiste en dejar un punto fijo, lo que podemos apreciar en la imagen en el origen.

Página 198

- Las rectas de pendientes indefinidas, son rectas paralelas al eje *Y*.

2.

a. Las pendientes de las rectas son iguales.
b. (3, 3)
c. Respuesta personal.
d. Respuesta variable. Por ejemplo A(0, 0) y B(2, 2) tiene su punto medio en M(1, 1).

- Si $A = (x, y)$ y $B = (p, q)$ entonces $M = \left(\frac{x+p}{2}, \frac{y+q}{2}\right)$. Luego, la distancia entre ambos estará será:

$$d_{(A,M)} = d_{(B,M)} = \sqrt{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-y}{2}\right)^2}.$$

- La primera expresión solo depende de los puntos y la segunda, de analizar el coeficiente de posición.

Página 199

3.

a. a = 3
b.
I. $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$
II. 10 unidades.
III. (6,5; 6)

- Respuesta personal.
- Respuesta variable. Por ejemplo, la pendiente es cero *y* es constante, mientras que para la pendiente indefinida *x* es constante.

4.

a. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{2}$
b.
I. $L_2: y = -\frac{1}{3}x + 6$
II. $\left(\frac{6}{5}, \frac{28}{5}\right)$

Página 200 Para concluir

a. $m = -\frac{A}{B}$ y $n = -\frac{C}{B}$
b. Respuesta variable, por ejemplo, verificar correspondencia entre el cálculo algebraico y la expresión geométrica.
c. Respuesta personal del estudiante.

Página 201 Distancia de un punto a una recta

1.

a. $d = 2\sqrt{2}$
b. $d = \sqrt{2}$
c. $d = \sqrt{5}$
d. $d = \sqrt{10}$

- $\frac{B}{A}$

Páginas 202

- La distancia es 0, el punto se encuentra en la recta.

2.

a. Las rectas no son paralelas
b. Las rectas se intersecan.
c. Asegurándose que las rectas son paralelas.

3.

a. 2,4 unidades.
b. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.
c. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ unidades.
d.
I. *q* unidades.
II. *p* unidades.
III. $\sqrt{2}\,\frac{|p-q|}{2}$ unidades.

- La distancia de un punto a los ejes es la coordenada complementaria.

Página 203

4.

a. Es necesario calcular d_{AB}, d_{BC} y d_{AC}.
b. $d_{AB} = \sqrt{149}$, $d_{BC} = 12$ y $d_{AC} = \sqrt{53}$. Luego, $s = 6 + \frac{\sqrt{53}}{2} + \frac{\sqrt{149}}{2}$
c. 42 unidades cuadradas.
d. Utilizando la distancia del vértice opuesto a la recta y la distancia de A y C que se encuentran en la recta.
e. A = 42
f. Utilizar la estrategia en el punto e.
g. A = 41 unidades cuadradas.

- Respuesta personal del estudiante.

Para concluir

a. $d = \frac{|-m \cdot p + q - n|}{\sqrt{(-m)^2 + 1^2}}$

b. Porque el término que está dentro del valor absoluto solo consideró el valor positivo.

Página 204 Antes de continuar

1.

a. Sí, los lados consecutivos son perpendiculares y los opuestos paralelos.

b. $50\ cm^2$

c. $\left(-1, \frac{11}{2}\right)$

2. El perímetro es $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

3. (3, 3)

Lección 8: Resolución de problemas con circunferencias en el plano cartesiano

Página 205 Ecuación de la circunferencia

1.

a. $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$, $M_{BC} = (1, 2)$ y $M_{AC} = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$

b. $L_{AB}: x = \frac{3}{2}$, $L_{BC}: y = x + 1$ y $L_{AC}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{8}$

c. (1,5; 2,5)

d. $d = \frac{\sqrt{34}}{2}$ es constante para todos los puntos.

e. Respuesta personal.

$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-h)^2}$ corresponde al radio.

Página 206

2.

a. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 8$

b. $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 52$

c. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 20$

d. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

La distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y la mediana.

Página 207

3.

a. $r = \sqrt{6}$

b. El valor es el doble del opuesto de las coordenadas.

c. $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = k^2 + h^2 - r^2$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

4.

a. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$

b. $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 81$

c. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$

5.

a. $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 13 = 0$

b. $c = (6, 3)$; $r = \sqrt{32}$

Página 208

6.

a. A = (7,3)

b. $x^2 + y^2 - 8x - 9y + 34 = 0$

c. $L_1: y = -0,5x + 6,5$

d. Área de la circunferencia $2,25\pi$

e. Área triangulo 12, Pintada = $12 - 2,25\pi$

f. $(x-4)^2 + (y-3.88)^2 = 9,77$, los radios de ambas circunferencias varían en 1,625 aproximadamente.

Para concluir

a. $(x+2.5)^2 + (y-1.5)^2 = 8,5$

b. Respuesta personal del estudiante.

Página 209 Posición relativa a las circunferencias

Reemplazando en la ecuación de la circunferencia.

1.

a. El punto se encuentra en el centro de la circunferencia.

b. La ecuación es: $(x-12)^2 + (y-2)^2 = 4$

c. Puntos dentro: $(x-12)^2 + (y-2)^2 < 4$
Puntos fuera: $(x-12)^2 + (y-2)^2 > 4$

2.

a. $c = (-2, 1)$ y $r = 6$

b. $(x-2)^2 + (y-1)^2 < 36$

c. $(x-2)^2 + (y-1)^2 > 36$

d. $-\sqrt{35} - 2 < a < \sqrt{35} + 4$

e. $b > 1 + \sqrt{27}$ y $1 - \sqrt{27} < b$

f. $c_1 = \frac{\sqrt{155}}{5}$ y $c_2 = -\frac{\sqrt{155}}{5}$

Intersección de la recta con la circunferencia.

Página 210

3.

a. Respuesta personal.

b. Las afirmaciones se cumplen cuando se intersecan en dos puntos distintos.

Página 211

4.

a. Los límites de la resta absoluta de los radios y la suma de ellos.

b. Son coincidentes. Tienen infinitas intersecciones.

c. Respuesta personal.

Página 212

5.

a. Interna.

b. Externas.

c. Internas.

d. Tangentes internas.

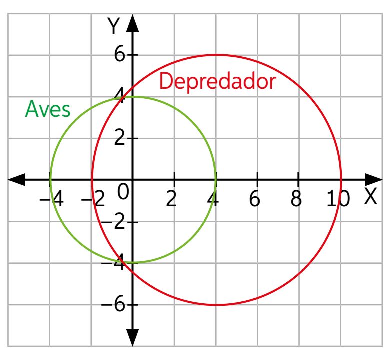
e. Externas.

f. Secantes.

Página 213

6.

a.



b. El hábitat del depredador con área 36π.

c. Respuesta personal.

d. Respuesta personal.

7.

a. Porqué el punto no sería único.

b. Deben cumplir que $|r_a - r_b| < d_{(c_a,c_b)} < r_a + r_b$.

c. Se encuentra sobre la circunferencia, la distancia a los centros es igual al radio.

d. Aproximadamente en (–4,57; 2,03) o en (–2,03; 4,57).

Página 214

8.

a. La luna y la tierra serian tangentes externas.

b. Son externas. $d_{(T,L)} > r_1 + r_2$

Para concluir

a. La circunferencia se define a partir de centro y radio, siendo los únicos dos elementos de comparación.

b. Respuesta personal del estudiante.

Página 215 Antes de continuar

1. $(x-1)^2 + (y-2.75)^2 = 23{,}56$
2. $a = 0{,}5$.
3. La recta es secante e intersecta en (–2, 2) y (2, –2).
4. a. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 2{,}5$ b. $7{,}5\pi$
5. 6 unidades cuadradas.
6. El punto medio (–1; 0,5).

Página 216 Síntesis

1. Respuesta personal.
2. Respuesta personal.

Página 217 Repaso

1.

a. $d_{(M,N)} = 3\sqrt{5}$

b. $d_{(R,Q)} = \sqrt{41}$

c. $d_{(U,V)} = 3\sqrt{17}$

d. $d_{(P,Q)} = 1$

2.

a. $d_{(A,C)} = 2\sqrt{10}$

b. Perímetro $8\sqrt{5}$

3. L_1 y L_3, L_2 y L_4, L_5 y L_6 son paralelas entre si.

4.

a. $d_{(L,M)} = 0$ b. $d_{(L,A)} = 3$ c. $d_{(L,N)} = \frac{2}{5}$

5.

a. $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 9$

b. $(x+1)^2 + (y+5)^2 = \frac{1}{9}$

6.

a. $c = (0, 0)$ y $r = 1$

b. $c = (4, 1)$ y $r = \sqrt{6}$

c. $c = (1, -8)$ y $r = \sqrt{79}$

d. $c = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$ y $r = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

7. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

Página 218

1. Están a una distancia de 696 metros

2.

a. General $x + y - 3 = 0$. Principal $y = 3 - x$

b. General $y - 3 = 0$, Principal $y = 3$.

c. General $x + y - 3 = 0$. Principal $y = 3 - x$.

d. General $x + 4y = 0$. Principal $y = -\frac{1}{4}x$.

e. General $9x + 6y - 9 = 0$. Principal $y = \frac{3}{2}(1 - x)$.

3. $y = 2x + 4$

4.

a. Área: 18; Perímetro: 17,59 aproximadamente

b. Área: 64; Perímetro: 33,18 aproximadamente.

5.

a. $m: \frac{2}{3}$; $d_{(L,p)} = \frac{7}{2\sqrt{13}}$ b. $a = \frac{13}{12}$

Página 219

6.

a. Principal $x^2 + y^2 = 4$. General $x^2 + y^2 - 4 = 0$

b. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

c. $(x+1)^2 + (y+8)^2 = \frac{36}{25}$; $x^2 + y^2 + 2x + 16y + \frac{1589}{25} = 0$

d. $x^2 + (y-3)^2 = 100$; $x^2 + y^2 - 6y - 91 = 0$

7. $C_1 : (x+5)^2 + y^2 = 16$, $C_2 : (x+1)^2 + y^2 = 9$, $C_3 : (x-2)^2 + y^2 = 4$ y $C_4 : (x-4)^2 + y^2 = 1$.

8.

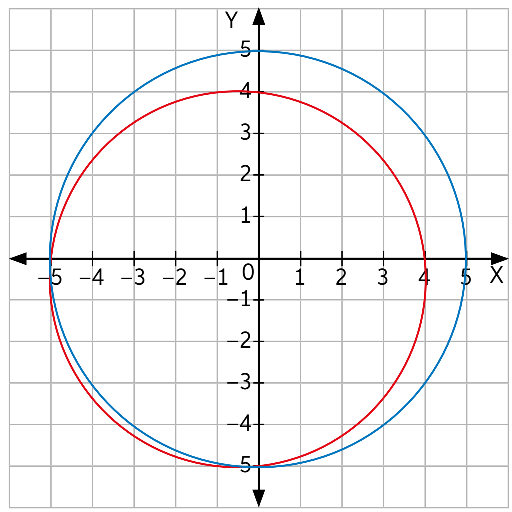
a. $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}$

b. $\left(x + \frac{89}{46}\right)^2 + \left(y - \frac{24}{23}\right)^2 = \frac{12720463}{500000}$

9.

a. Rectas secantes.

b.

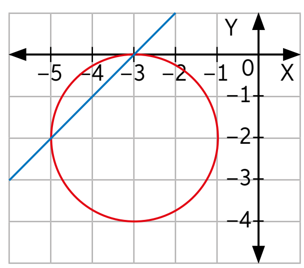


c. Puntos de intercesión (–5,0) y (0, –5)

10.

a. Secantes

b.



c. Puntos de intersección (–5, –2) y (–3, 0)

11. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

Página 116 Presupuesto de una gira de estudios en Sudamérica

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Elaboración de presupuesto	Mencionan en su presupuesto todas las categorías asignadas.	Mencionan en su presupuesto más de la mitad de las categorías asignadas.	Menciona en su presupuesto menos de la mitad de las categorías asignadas
Presentación de respuestas, y análisis	Especifican la totalidad de los recursos financieros y humanos para la gira.	Especifican algunos recursos financieros y humanos para la gira.	No especifican los recursos financieros y humanos para la gira.
Conclusiones	Presentan un presupuesto organizado y eficiente.	Presentan un presupuesto eficiente, pero desorganizado.	Presentan un presupuesto desorganizado y poco eficiente.

Página 126 Comparando productos de ahorro

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Contenido	Los datos recopilados son suficientes para analizar y comparar ambos productos de ahorro.	Los datos recopilados son suficientes para analizar, pero no para comparar ambos productos de ahorro.	Los datos recopilados son insuficientes para analizar y comparar ambos productos de ahorro.
Conclusiones	Todas las conclusiones se encuentran justificadas a partir de criterios claros.	Algunas justificaciones presentan criterios poco claros.	Las conclusiones no presentan justificaciones.

Página 130 Descuentos y créditos

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Contenido	La información en el afiche es presentada de forma lógica coherente y de forma clara y precisa.	La información en el afiche es presentada de forma lógica coherente, pero es poco clara o poco precisa.	La información en el afiche se encuentra desorganizada carece de estructura lógica.
Redacción y ortografía	El texto está bien redactado y presenta no más de 5 errores ortográficos.	El texto está bien redactado y presenta entre 6 y 10 errores ortográficos.	El texto no está bien redactado o presenta más de 10 errores ortográficos.
Imágenes	Las imágenes son relevantes para el afiche y complementan la información.	Las imágenes no son relevantes o no complementan el texto.	Las imágenes no son relevantes y no complementan el texto.

Página 140 El reciclaje en Chile

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Creatividad	La información es relevante y se encuentra presentada de forma llamativa.	La información es relevante pero no es presentada de forma llamativa.	La información no es relevante.
Resultados	Los resultados son resumidos en tablas y gráficos.	Los resultados son resumidos solo en tablas o gráficos.	Los resultados son resumidos solo en tablas o gráficos.
Investigación	Utilizan fuentes confiables y las citan de forma correcta.	Utilizan fuentes confiables, pero no registran su aporte.	Utilizan fuentes poco confiables.

Página 156 El espectro de los sonidos

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Resultados	La información obtenida es suficiente para justificar la pertinencia del modelo.	La información obtenida es suficiente para modelar la situación, pero no para justificar la pertinencia del modelo.	La información obtenida no es suficiente para modelar la situación.
Presentación y conclusiones	La presentación contiene los cuatro elementos pedidos.	La presentación contiene dos o tres de los elementos pedidos.	La presentación contiene menos de dos elementos pedidos.

Página 170 Describiendo los hábitos del colegio

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Contenido	El afiche contiene toda la información recopilada por su investigación, y está presentada de manera lógica coherente. Además es clara y precisa.	El afiche contiene toda la información recopilada por su investigación, está presentada de manera lógica coherente, aunque es poco clara o imprecisa.	El afiche contiene no contiene toda la información recopilada por la investigación.
Exposición	Todos los integrantes conocen y saben explicar su investigación.	La gran mayoría de los integrantes conocen y saben explicar su investigación.	La gran mayoría de los integrantes no conocen ni saben explicar su investigación.

Página 176 Analizando el rendimiento

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Resultados	Los resultados obtenidos se resumen de manera correcta en tablas y gráficas.	Las tablas y gráficas presentan entre 1 y 2 errores.	Los resultados obtenidos no se resumen en tablas ni gráficas.
Análisis de resultados	Realizan el análisis de los datos a través de la distribución normal de forma correcta.	Modelan los datos a través de la distribución normal de forma correcta, pero no presentan análisis.	Los datos no son modelados a través de la distribución normal.
Presentación	Presentan la gráfica asociada a la distribución de las calificaciones a partir de la encuesta realizada junto con los datos relevantes de la investigación.	Presentan la gráfica asociada a la distribución de las calificaciones a partir de la encuesta realizada, pero no los datos relevantes de su investigación.	No presentan la gráfica asociada a la distribución de las calificaciones.

Página 182 Duración de la batería

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Resultados y análisis de resultados	El análisis y la conclusión presentan su justificación clara a partir de a las distribuciones normales construidas.	El análisis y la conclusión presentan su justificación poco clara a partir de las distribuciones normales construidas.	El análisis y la conclusión no presentan su justificación en base a las distribuciones normales.
Infografía	La infografía resume las conclusiones y datos obtenidos en su investigación.	La infografía no resume las conclusiones o los datos obtenidos en su investigación.	La infografía no resume las conclusiones ni los datos obtenidos en su investigación.

Página 200 Diagramas de Voronói en tu comuna

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Análisis de información	Analizan la información obtenida y son capaces de modelarla mediante el diagrama.	Analizan la información obtenida y realizan un diagrama incompleto.	No analizan la información obtenida ni realizan un diagrama incompleto.
Presentación y conclusiones	Presentan el mapa con diagrama trazado con respuestas fundamentadas, coherentes y precisas.	Presentan el mapa con diagrama trazado, sin embargo, no todas sus respuestas son fundamentadas.	No presentan el mapa con diagrama trazado.

Página 214 Antenas

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
Análisis de la información	Analizan la información obtenida y modelan de forma correcta la situación.	Analizan la información obtenida, pero obtienen un modelo poco adecuado de la la situación.	No analizan la información obtenida. Además el modelo de la situación es incompleto.
Presentación	La presentación contiene un resumen adecuado de su investigación y demuestra completo entendimiento de todos los integrantes con respecto a la resolución del problema.	La presentación contiene un resumen adecuado de su investigación, pero no demuestra completo entendimiento de todos los integrantes con respecto a la resolución del problema.	La presentación no contiene un resumen adecuado de su investigación y ninguno de los integrantes demuestra completo entendimiento con respecto a la resolución del problema.

Álvarez, R. (2013). *Conjuntos numéricos y aritmética*. Medellín: Universidad de Medellín.

Araya, R. (2015). STEM y modelamiento matemático. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 15, 291-317.

Del Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, 49(1), 53-54.

Elicer, R. y Carrasco, E. (2014). Juegos de azar diacrónicos: un espacio para el encuentro entre las creencias subjetivas y las probabilidades condicionales. *Actas XVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Santiago, Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Elicer, R., y Carrasco, E. (2015). La probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones. *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Villarrica, Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Enlaces (2013). *Desarrollo de habilidades digitales para el siglo XXI en Chile: ¿Qué dice el SIMCE TIC?* Santiago. LOM.

Goñi, J. y Báez, J (2016). Una revisión de tres modelos para enseñar las habilidades de pensamiento en el marco escolar. *Perspectiva educacional. Formación de profesores*, 55(1), 94-113.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vistas y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 17, 5-15.

Lara, A. (2012). Desarrollo de habilidades de pensamiento y creatividad como potenciadores de aprendizaje. *Unimar*, 59, 85-96.

Lladser, M. (2012). *Variables Aleatorias y Simulación Estocástica. Colección: Herramientas para la formación de profesores de matemáticas* (N° 10). Santiago: J. C. Sáez Editor.

Ministerio de Educación & Enlaces (2013). *Matriz de habilidades TIC para el Aprendizaje*. Santiago.

Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación (2016). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Disponible en https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación (2018). *Bases Curriculares 3° y 4° medio Matemática* (versión borrador).

OREALC/Unesco (2016). *Tecnologías digitales al servicio de la calidad educativa. Una propuesta de cambio centrada en el aprendizaje para todos*. Santiago: Unesco.

Servicio Nacional del Consumidor (2014). *Programa escolar de Educación Financiera*. Disponible en https://www.sernac.cl/portal/607/w3-propertyname-614.html

Sitios web

- ALMA: www.almaobservatory.org/es
- DEMRE: www.demre.cl
- Dirección del Trabajo: www.dt.gob.cl
- Educación: www.educarchile.cl
- Enlaces: www.enlaces.cl
- Instituto Nacional de Estadísticas: www.ine.cl
- Ministerio de Educación: www.mineduc.cl
- Ministerio de Salud: www.minsal.cl
- OCDE – Pisa: www.oecd.org
- Programa “Chile aprende más”: www.yoestudio.mineduc.cl
- Programa Explora Conicyt: www.explora.cl
- WolframAlpha: www.wolframalpha.com
- Real Academia Española de la Lengua: www.rae.es
- Servicio de Impuestos Internos: www.sii.cl
- SIMCE: www.simce.cl
- Sismología: www.sismologia.cl
- *Software* GeoGebra: www.geogebra.org

TÓMALO CON CUIDADO

GUÁRDALO EN UN LUGAR ADECUADO

CUIDA SUS HOJAS Y NO DOBLES SUS ESQUINAS

ÚSALO ALEJADO DECOMIDAS Y BEBIDAS

NO LO RAYES NI SUBRAYES

mifuturo.cl
Infórmate antes de elegir

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

ISBN 978-956-363-723-6