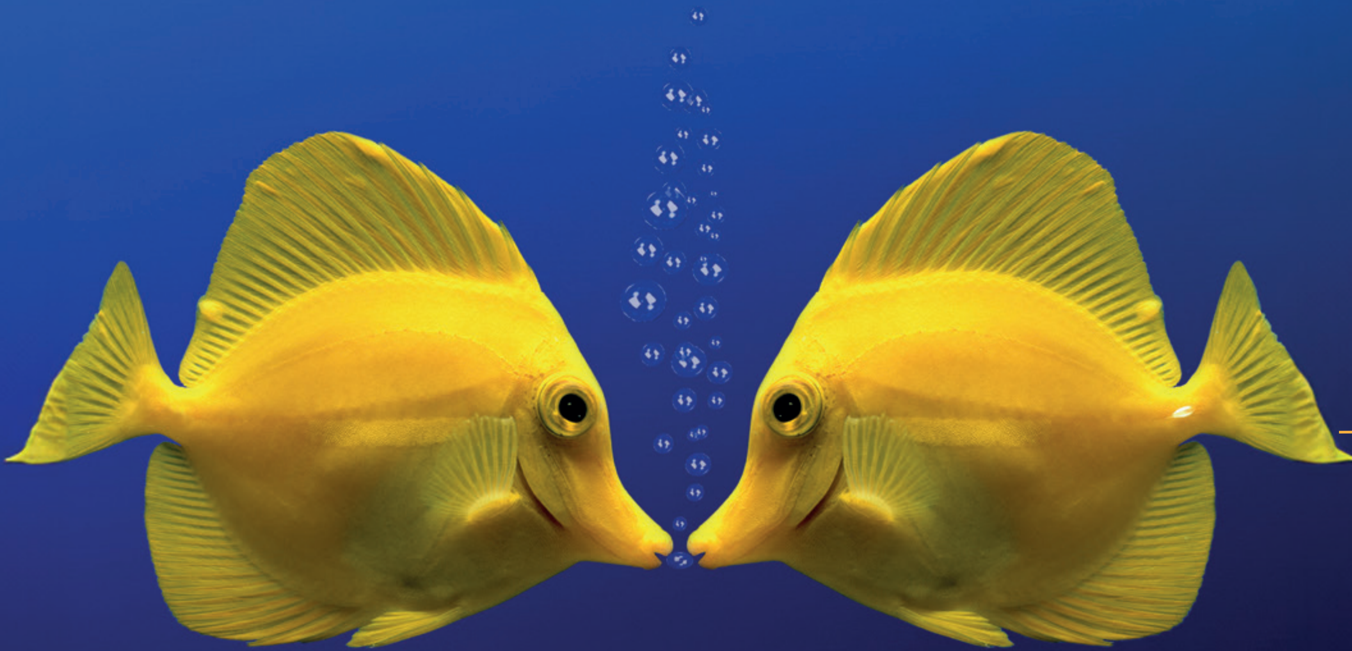


REUTILIZABLE
TEXTO ESCOLAR

Texto del Estudiante

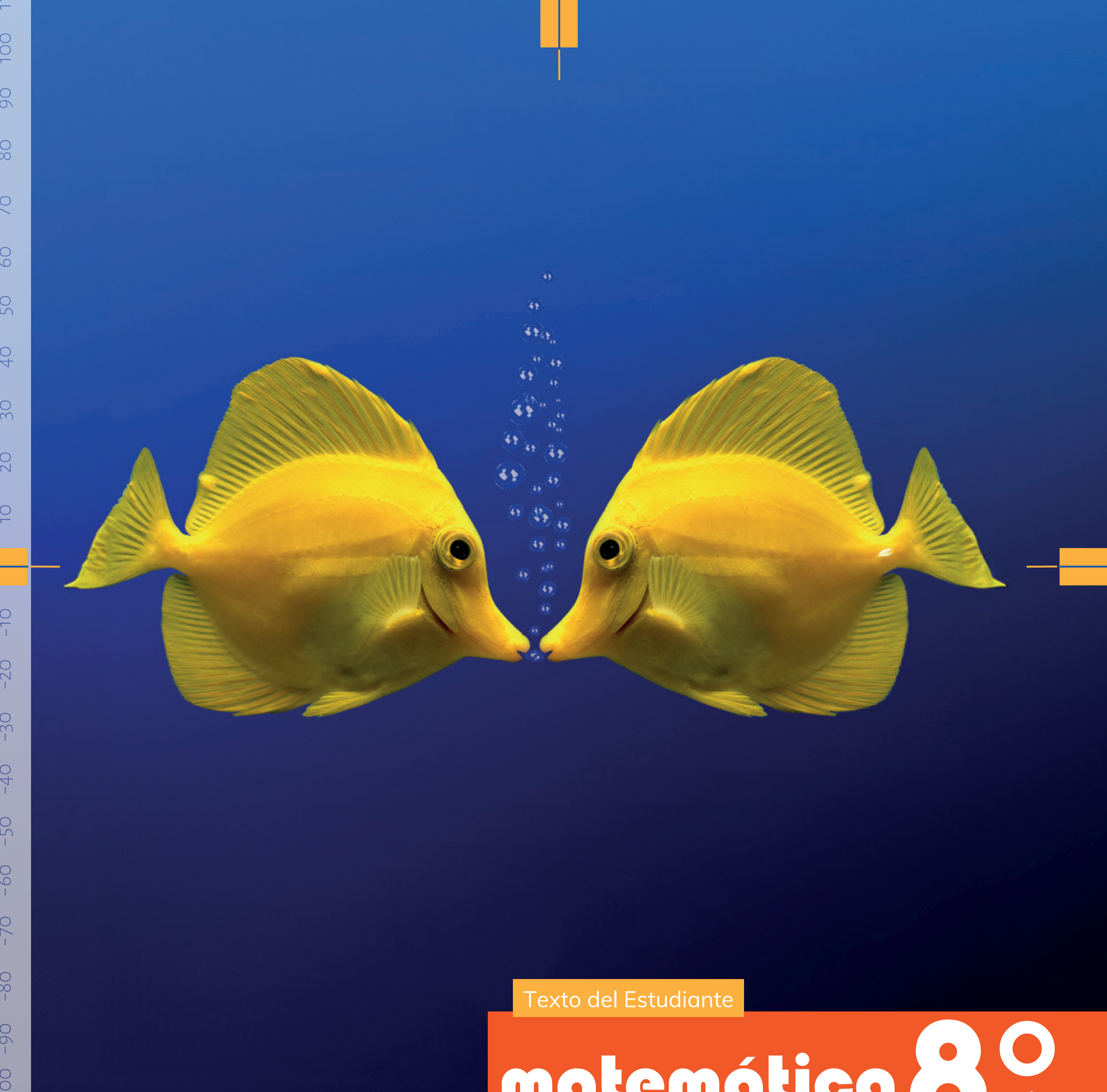
# matemática 8° básico

Claudia Torres Jeldes | Mónica Caroca Toro

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Edición especial para el Ministerio de Educación. Prohibida su comercialización.

SANTILLANA



Texto del Estudiante

# matemática 8º básico

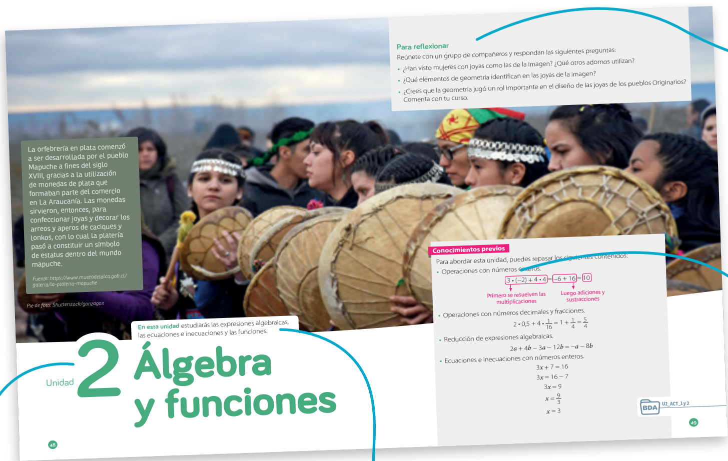

**Claudia Victoria Torres Jeldes**
Profesora de Matemática
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

**Mónica Viviana Caroca Toro**
Profesora de Matemática y Física
Licenciada en Ciencias Exactas Universidad de Chile

# ESTRUCTURA GRÁFICA

Te invitamos a conocer tu texto de **Matemática 8° Básico** que está organizado en 4 unidades y en cada una podrás encontrar:

## Inicio de Unidad




- **Para reflexionar...**
  Instancia de reflexión a partir de un contexto o situación problemática.

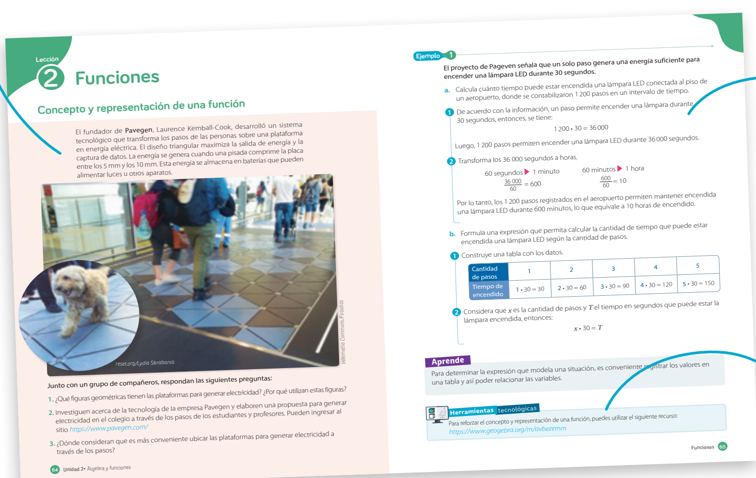
- **Conocimientos previos**
  Declara los conocimientos previos para abordar la unidad.

- **Nombre y número de unidad**
  Se relaciona con el eje de aprendizaje o hilo conductor que desarrollarás en la unidad.

- **Propósito de unidad**
  Declara el propósito y los contenidos que estudiarás a lo largo de la unidad.

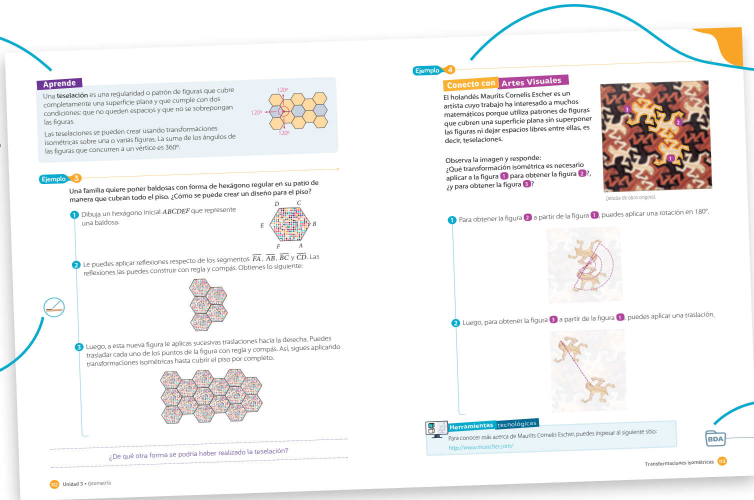
## Lección

- **Situación inicial**
  Situación contextual, problemática y recurso visual con preguntas motivadoras sobre el tema a abordar.




- **Ejemplos**
  Ejemplos y modelamientos progresivos desarrollados paso a paso.

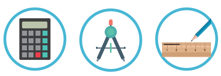
- **Herramientas tecnológicas**
  Propuesta del uso de *softwares* educativos para desarrollar o profundizar el contenido.



- **Aprende**
  Formalización de los conocimientos desarrollados.

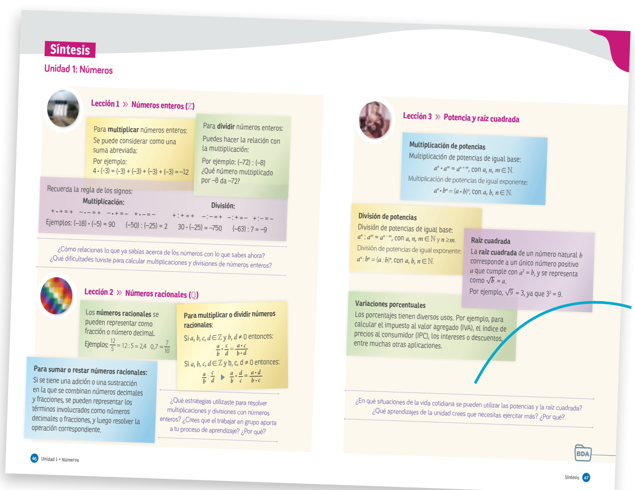
- **Conecto con…**
  Vinculación práctica intra e interdisciplinaria del contenido estudiado.

- **Herramientas manuales**
  Ícono que señala el uso de una herramienta manual.



- **Llamado al BDA**
  Vínculo directo con los recursos disponibles en el Banco Digital de Actividades (BDA).

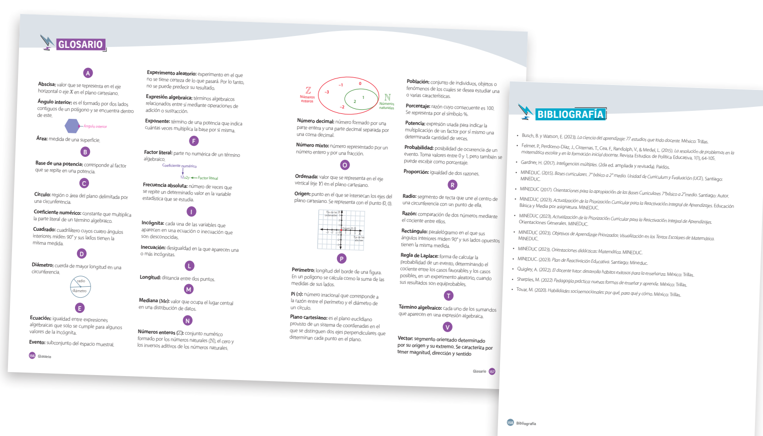
## Páginas especiales



- **Síntesis**
  Resumen de las definiciones, propiedades y procedimientos desarrollados en la unidad.

- **Preguntas de metacognición**
  Reflexión y vinculación con los conocimientos, habilidades y actitudes desarrolladas.

## Páginas finales



- **Glosario | Bibliografía | Webgrafía**
  Podrás encontrar la definición de algunos conceptos básicos trabajados a lo largo del texto.

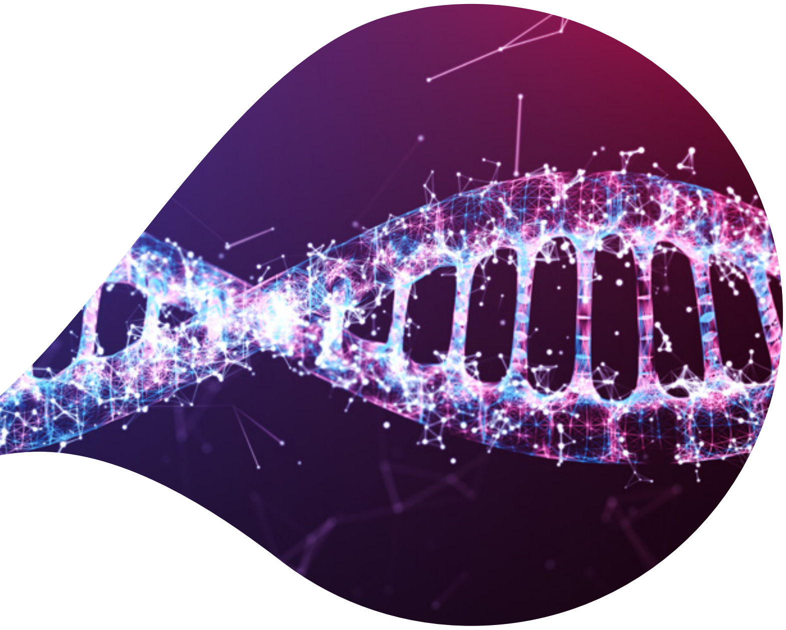
# ÍNDICE



Unidad 3

# Geometría





Unidad 4

# Probabilidad y estadística

En los últimos 150 años, la temperatura media ha aumentado casi 0,8 ºC en todo el mundo.

Por ello, se hace necesario emprender acciones para limitar las emisiones, ya que se prevé que se producirá un nuevo aumento de las temperaturas globales hasta los 4 ºC para 2100. Si llegamos a dicha temperatura, los cambios serán ya irreversibles.

*Fuente: https://www.manosunidas.org/*

*Pixabay/Geralt*

# Unidad 1 Números

**En esta unidad** estudiarás los números enteros, los números racionales, las potencias y las raíces.

## Para reflexionar

Reúnete con tus compañeros y respondan las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el cambio climático y cómo nos afecta?
- Investiguen soluciones que mitiguen los efectos del cambio climático. Para ello, visiten: *https://www.manosunidas.org/observatorio/cambio-climatico/soluciones-cambio-climatico*
- Utilizando la información, analicen cómo ha cambiado la temperatura en la ciudad donde ustedes viven. Analicen también otras ciudades de Chile. ¿Cómo ha perjudicado esto al país? ¿Qué organismos vivos y sistemas se ven afectados?

*Pixabay/Geralt*

**¿Qué es el cambio climático?**

El cambio climático es la alteración del clima y las temperaturas de la Tierra que afecta a los ecosistemas y origina cambios que directa o indirectamente son producidos por la actividad humana.

*Fuente: https://cambioclimatico.mma.gob.cl/*

## Conocimientos previos

Para abordar esta unidad, puedes recordar los siguientes contenidos:

- Adición y sustracción de números enteros.

$$(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = 5\,(-3) = -15$$

- Operaciones combinadas con números enteros:

$$(-4) + ((-3 \cdot -2) : (-1)) = (-4) + ((6) : (-1)) = (-4) + (-6) = -10$$

- Multiplicación y división de fracciones y decimales.

$$\left(3 \cdot 1{,}25\right) : \frac{1}{2} = 3{,}75 : \frac{1}{2} = \frac{15}{4} : \frac{1}{2} = \frac{15}{4} \cdot 2 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

- Potencias de base 10 con exponente natural. Por ejemplo: base 10 y exponente 5:

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$$

BDA U1_ACT_1, 2 y 17

Lección

# 1 Números enteros ($\mathbb{Z}$)

## Multiplicación de números enteros

Las **represas** son estructuras hidráulicas de grandes dimensiones que permiten almacenar o retener agua para aprovecharla en actividades como el riego, el consumo humano, la generación de energía eléctrica, entre otras.

Shutterstock/SISYPHUS_zirix

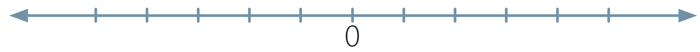
**Responde las siguientes preguntas y comenta con tus compañeros.**

1. ¿Por qué consideras que es importante hacer un buen uso del agua?
2. ¿Cómo puedes ayudar a cuidar este recurso?
3. ¿Cuáles crees que son los períodos de mayor gasto de agua en tu región?

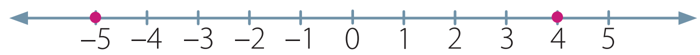
**Ejemplo 1**

**Representa los números enteros –5 y 4 en la recta numérica.**

1. Construye la recta y realiza las marcas teniendo en cuenta que la distancia entre dos marcas consecutivas debe ser la misma. Luego, ubica el cero.



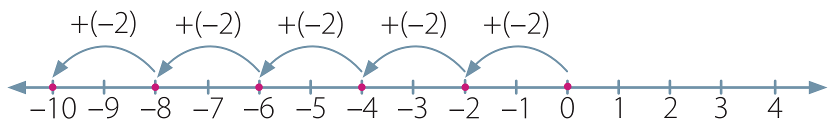

2. Finalmente, ubica el –5 y el 4 en la recta numérica.




**Ejemplo 2**

**Representa en la recta numérica la multiplicación 5 • (–2).**

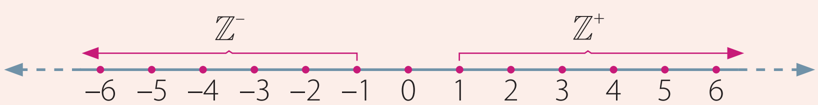
1. Como 5 • (–2) = (–2) + (–2) + (–2) + (–2) + (–2), representas la adición en la recta numérica.




2. Luego, 5 • (–2) = –10.

## Recuerda

- El **conjunto de los números enteros** ($\mathbb{Z}$) está formado por los enteros positivos, el número cero y los enteros negativos. En la recta numérica, los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) se ubican a la derecha del cero (0) y los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$), a la izquierda.




- Al sumar un número positivo a un número entero, el desplazamiento en la recta numérica se realiza hacia la derecha.

  Ejemplo: (–4) + 6 = 2

- Al sumar un número negativo a un número entero, el desplazamiento en la recta numérica se realiza hacia la izquierda.

  Ejemplo: 5 + (–4) = 1

- En la multiplicación se tiene que: Factores ← $\boxed{a \bullet b} = c$ → Producto con $a, b, c \in \mathbb{Z}$

## Ejemplo 3

**Una represa cuenta con 4 compartimentos de reserva de agua que ayudan a restablecer el nivel de agua en períodos de alta demanda, por ejemplo, en verano y en períodos prolongados de poca lluvia. En la represa, cada compartimiento aportó 40 L diarios de agua. ¿Cuántos litros de agua perdió la represa en total en 5 días?**

1. Un compartimento pierde 40 L cada día, esto es –40. Durante 5 días, la expresión que representa la pérdida de agua por compartimento es:

$$(-40) + (-40) + (-40) + (-40) + (-40) = 5 \cdot (-40) = -200$$

2. Como la represa tiene 4 compartimentos de reserva de agua, la pérdida total está dada por: $4 \cdot (-200) = -800$.

   Luego, la reserva perdió 800 litros de agua en total en los 5 días.

## Ejemplo 4

**Analiza la siguiente secuencia de multiplicaciones y responde:**

$$2 \cdot (-2) = -4$$
$$1 \cdot (-2) = -2$$
$$0 \cdot (-2) = 0$$
$$(-1) \cdot (-2) = \boxed{?}$$
$$(-2) \cdot (-2) = \boxed{?}$$

**¿Cuáles son los productos que faltan en la secuencia?**

1. Observa que los números correspondientes al primer factor de cada multiplicación disminuyen de 1 en 1 y que los resultados forman una secuencia que aumenta de 2 en 2.

2. La secuencia continúa así:

$$2 \cdot (-2) = -4$$
$$1 \cdot (-2) = -2$$
$$0 \cdot (-2) = 0$$
$$(-1) \cdot (-2) = 2$$
$$(-2) \cdot (-2) = 4$$

## Ejemplo 5

**Resuelve las multiplicaciones $5 \cdot (-11)$ y $(-3) \cdot 4$.**

- Para calcular $5 \cdot (-11)$, puedes considerar la multiplicación como una adición de sumandos iguales, por lo que $5 \cdot (-11)$ puede interpretarse como 5 veces (–11), es decir:

$$5 \cdot (-11) = (-11) + (-11) + (-11) + (-11) + (-11) = -55$$

  Luego, $5 \cdot (-11) = -55$.

¿Puedes aplicar el mismo procedimiento para calcular $(-11) \cdot 5$?

- Para resolver la multiplicación $(-3) \cdot 4$, dado que no tiene sentido contar -3 veces 4, puedes utilizar la propiedad conmutativa de la multiplicación y escribirla como una adición de sumandos iguales: $(-3) \cdot 4 = 4 \cdot (-3)$

  Luego, tienes que: $4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

## Aprende

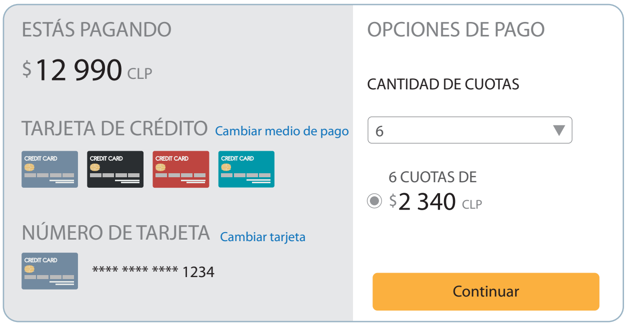
- Para **multiplicar números enteros** distintos de cero, puedes utilizar la **regla de los signos**:

$$+ \cdot + = + \qquad - \cdot - = + \qquad - \cdot + = - \qquad + \cdot - = -$$

- Todo número entero $a$ multiplicado por cero resulta cero, es decir, $a \cdot 0 = 0$

## Ejemplo 6

Andrés realiza una compra por internet con cargo a su tarjeta de crédito. El pago lo realiza en 6 cuotas, las cuales presentan un interés mensual. El detalle de la compra se muestra a continuación:




¿Cuánto pagará en total por su compra? ¿Con qué número puedes relacionar el cobro de la cuota a su tarjeta de crédito?

1. Para calcular el total de la compra, multiplica el monto de cada cuota por la cantidad de cuotas.

   $2\,340 \cdot 6 = 14\,040$ Por su compra en total pagará \$14.040

2. El cobro de la cuota se puede relacionar con el número –2 340, ya que es un cargo a la cuenta.

## Ejemplo 7

Calcula el valor de la expresión $(-6) \cdot 12 - 8 \cdot 0 - 22$.

1. Considera el orden de las operaciones resolviendo primero los paréntesis y las multiplicaciones aplicando la regla de los signos y luego las adiciones y sustracciones.

$$((-6) \cdot 12) - (8 \cdot 0) - 22$$
$$(-72) - 0 - 22$$
$$(-72) - 22$$
$$-94$$

BDA U1_ACT_3 y 18

# División de números enteros

Los expertos sostienen que la crisis hídrica requiere una urgente disminución del consumo de agua y que el problema más serio es la larga sequía que hemos tenido.

JUEVES 22 DE AGOSTO

Tendencias

MEGASEQUÍA

CHILE: PROYECTAN QUE PRECIPITACIONES SEGUIRÁN DISMINUYENDO HASTA EL 2059

Clima. Académicas de la Universidad de Chile explican algunas de las razones por las que la sequía no retrocede en nuestro país. El cambio climático, además, ha reducido las lluvias hasta en 30% en la última década, afectando al menos a 138 comunas.

Redacción

Se decretó zona de emergencia agrícola en 17 comunas de la capital por la escasez de lluvias. Pese al peligro en los cultivos, las autoridades descartaron alzas en vegetales.

Fuente: https://www.vozdeamerica.com

12 Actualidad

JUEVES 15 DE DICIEMBRE

El consumo promedio de 50 L diarios en algunas zonas del país

El consumo promedio diario de los chilenos es aproximadamente de 170 L de agua. Sin embargo, en zonas de estrés hídrico se entregan 50 L diarios.

Dicen investigadores, es clave crear un plan nacional de aguas en el que todos participen, desde expertos hasta la sociedad civil...

Fuente: https://escenarioshidricos.cl

02 Actualidad

JUEVES 22 DE AGOSTO

Trece años de severa sequía afectan a las abejas chilenas

La disminución de colmenas es un fenómeno global y su merma puede derivar no sólo en una escasez de alimentos.

Fuente: https://fch.cl

A 10

Vida • ciencia • tecnología

JUEVES 22 DE AGOSTO

Especialistas llaman a tomar medidas de largo plazo en vez de impulsar «soluciones reactivas»:

Es urgente no tratar la sequía actual como hecho aislado

Algunas zonas del país ya llevan más de una década en escasez de lluvias. Por eso, dicen investigadores, es clave crear un plan nacional de aguas en el que todos participen, desde expertos hasta la sociedad civil, y se tomen en cuenta las realidades locales.

Fuente: https://cooperativa.cl

**Reúnete con tus compañeros e investiguen acerca de la crisis hídrica que afecta hace años a Chile.**

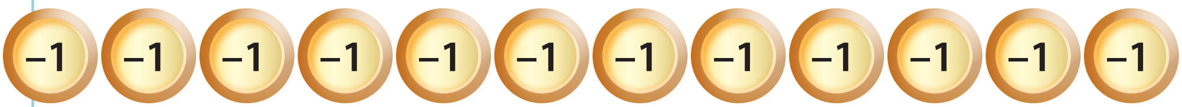
Utilicen noticias como las de la imagen como apoyo para la investigación y luego, respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Qué se entiende por crisis hídrica y qué es lo que la provoca?
2. ¿Hace cuánto tiempo Chile enfrenta la crisis hídrica que derivó en la fuerte sequía que muestran las noticias?
3. ¿En qué consiste la racionalización del agua y qué relación piensan que existe con los números enteros?
4. ¿Qué podemos hacer en nuestro diario vivir para mitigar los efectos de la crisis de agua? Elaboren una presentación con el propósito de generar conciencia en sus comunidades.

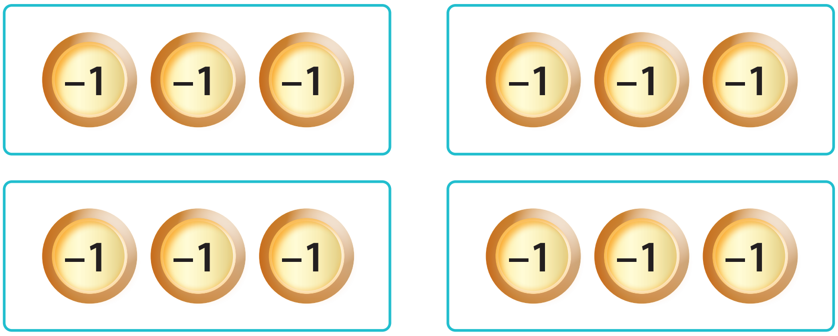
## Ejemplo 1

**Representa la división (–12) : 4.**

1 Puedes utilizar fichas con valor –1 para representar el número –12.




2 Forma 4 grupos con igual cantidad de fichas.




Hay 3 fichas en cada grupo que suman –3, por lo tanto, (–12) : 4 = –3.

Se aplica el algoritmo de la división, con el cual distribuimos -12 en 4 grupos, cada uno de -3 unidades.

## Ejemplo 2

**Considera la información de la página anterior acerca de la noticia del consumo promedio de agua diario de los chilenos y responde.**

**a.** ¿Cuántos litros de agua en un mes le faltarían a una persona que consume la cantidad promedio, si viviera en una zona de estrés hídrico? Considera un mes de 30 días.

1 Multiplica los litros correspondientes por los 30 días.

$170 \bullet 30 = 5\,100$ $\quad$ $50 \bullet 30 = 1\,500$

Donde 170 (consumo promedio diario de agua de los chilenos en L) y 50 (consumo promedio diario de agua en zonas de estrés hídrico en L)

2 Resta las cantidades de zona de estrés hídrico con los del resto del país.

$$1\,500 \text{ L} - 5\,100 \text{ L} = -3\,600 \text{ L}$$

3 El resultado muestra un déficit de 3 600 L de agua en un mes

**b.** ¿Para cuántos días alcanzaría la cantidad de agua que en promedio consume diariamente una persona si contara solo con 50 L diarios?

$170 : 50 = 3{,}4$ ▶ Alcanzaría para 3 días, aproximadamente.

¿Qué opinas de estas cifras? Comenta con tu curso.

## Aprende

Para **dividir números enteros** distintos de cero, puedes utilizar la **regla de los signos**:

$+ : + = +$  $- : - = +$  $- : + = -$  $+ : - = -$

- Si $a$ y $b$ tienen igual signo y $b \neq 0$, el cociente de la división $a : b$ es positivo.
- Si $a$ y $b$ tienen distinto signo y $b \neq 0$, el cociente de la división $a : b$ es negativo.
- Al dividir el número cero por cualquier número $a$ distinto de cero ($a \neq 0$) resulta cero, es decir, $0 : a = 0$.

### Ejemplo 3

**Resuelve la división (–72) : (–8).**

1. Para resolver una división con números enteros, puedes relacionarla con la multiplicación. Para ello, plantea la siguiente pregunta: ¿qué número multiplicado por (–8) es igual a (–72)?
2. Como $9 \cdot (-8) = (-72)$, entonces $(-72) : (-8) = 9$.

### Ejemplo 4

**Resuelve la división 126 : (–7) usando la regla de los signos.**

1. Como los signos del dividendo y del divisor son distintos, el signo del cociente será negativo.
2. Luego, $126 : (-7) = -18$.

$$\begin{array}{l} 12'6' : (-7) = 18 \\ \underline{-7} \\ \ \ 56 \\ \underline{-56} \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

### Ejemplo 5

**Se registró la temperatura mínima en la cúspide de una montaña a cierta hora del día cada mes. Los resultados se muestran en la tabla. ¿Cuál es el promedio de las temperaturas mínimas?**

1. Suma las temperaturas registradas.

$$(-5) + (-7) + (-6) + 0 + (-2) = -20$$

2. Divide la suma por la cantidad de temperaturas registradas, que en este caso son 5.

$$(-20) : 5 = -4$$

TEMPERATURA MÍNIMA

| Mes | C° |
|---|---|
| Enero | -5 |
| Febrero | -7 |
| Marzo | -6 |
| Abril | 0 |
| Mayo | -2 |

Luego, el promedio de las temperaturas mínimas fue de –4 °C.

## Ejemplo 6

Jorge y Carla resuelven un ejercicio de la siguiente forma:

**Jorge**

$$\underbrace{4\cdot(-3)}+8:(-2)$$
$$\underbrace{(-12)+8}:(-2)$$
$$\underbrace{(-4):(-2)}$$
$$2$$

**Carla**

$$\underbrace{4\cdot(-3)}+\underbrace{8:(-2)}$$
$$\underbrace{(-12)+(-4)}$$
$$-16$$

¿Cuál de ellos realizó el procedimiento de forma correcta?

1. Resuelve el ejercicio.

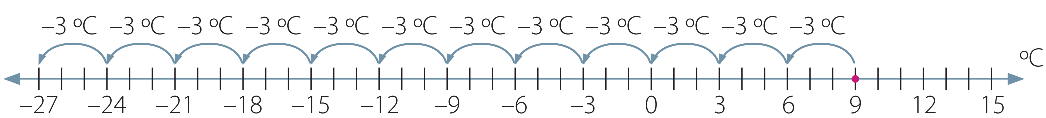
$$4\cdot(-3)+8:(-2)$$
$$(-12)+(-4)$$
$$-16$$

2. Observa que el desarrollo correcto corresponde al de Carla. En el caso de Jorge, el error está en el segundo paso, cuando resolvió primero la adición en vez de la división.

## Ejemplo 7

**La temperatura de un congelador desciende a razón de 3 °C cada 20 min. Si la temperatura inicial en el interior del congelador es 9 °C, ¿cuánto tiempo pasará para que alcance los –27 °C?**

1. Puedes construir una recta numérica para representar los datos.




2. Observa que hubo 12 saltos en la recta numérica y cada uno representa 20 minutos.
3. Luego, el tiempo que pasará para que alcance los –27 °C es:

$$12\cdot 20=240$$

Por lo tanto, pasarán 240 minutos para que el congelador alcance los –27 °C, lo que equivale a 4 horas.

¿En qué otras ocasiones puedes usar la división de números enteros? Comenta con tu curso.

BDA U1_ACT_4 a 5

Lección

# 2 Números racionales ($\mathbb{Q}$)

## El conjunto de los números racionales

El pueblo Quechua se define como pueblo indígena a partir de su lengua. Las primeras comunidades constituidas se localizan en Ollagüe y en el río San Pedro, afluente del río Loa en su curso superior de la Región de Antofagasta.

La economía de las comunidades quechua es diferenciada según la zona geográfica o pisos ecológicos. Las de Ollagüe y San Pedro se dedicaron principalmente a la ganadería y con los años desarrollaron un sistema de vida agro pastoril, domesticando llamas y la alpacas, lo que les permitió obtener lana para la manufactura de distintos productos. Las comunidades de Tarapacá se dedicaron principalmente a la agricultura.

*Fuente: http://chileprecolombino.cl*

Las comunidades quechua de Ollagüe y San Pedro crían llamas y alpacas principalmente.

*Pixabay/Rollstein*

Aprende más sobre el pueblo Quechua en el siguiente enlace: *http://chileprecolombino.cl/pueblos-originarios/quechua/ambiente-y-localizacion/*

**Reúnete con un grupo de compañeros, analicen la información y luego, comenten con el resto del curso.**

En la zona del río San Pedro, las antiguas comunidades quechua habitaban el poblado Ojos de San Pedro y ocupaban toda la cuenca en actividades de pastoreo. Aquí surgen las aguas que forman los ríos Inacaliri y Cabana, a los que se suman las aguas del río Silala provenientes de Bolivia. Sin embargo, debido a una grave alteración ecológica, hoy la mayoría de sus familias, al igual que las de Ollagüe, viven en la ciudad de Calama.

1. ¿Cuál es esta grave alteración ecológica que obligó a las familias quechua a desplazarse?
2. ¿Creen que en las actividades agrícolas del pueblo Quechua, se aplicaban conocimientos matemáticos? ¿cuáles?
3. Investiguen qué es el quipu y cómo lo utilizaban

**Ejemplo 1**

### La agricultura del pueblo Quechua

El pueblo Quechua cultiva principalmente papas, quinoa, habas, trigo y alfalfa. La **Pachamama** o "madre tierra", ocupa un lugar fundamental en su cosmovisión, pues es la madre de todos los humanos y la que promueve la fertilidad de las plantas y los animales.

*https://www.conadi.gob.cl/storage/docs/Diccionario_quechua.pdf*

Observa la imagen y responde.

Tres personas cosecharon papas. Si luego de una jornada de trabajo llenaron 12 canastas, las que repartirán en partes iguales para llevarlas a su familia, ¿cuántas canastas le corresponden a cada una?

*Shutterstock/Alberto Seminario*

1. Para responder la pregunta anterior, puedes representar los datos con una fracción.

$$\begin{array}{r} \text{Cantidad de canastas} \blacktriangleright \\ \text{Cantidad de familias} \blacktriangleright \end{array} \frac{12}{3}$$

2. Luego, puedes dividir la cantidad de canastas por el número de familias, es decir:

$$12 : 3 = 4$$

Entonces, a cada familia le corresponden 4 canastas llenas.

**Aprende**

Los números que pertenecen al conjunto de los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) son aquellos que se pueden escribir como una fracción cuyo numerador y denominador son números enteros y el denominador es distinto de cero.

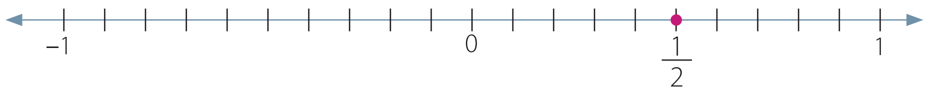
Por ejemplo, 0,5; $\frac{2}{7}$; –6; 1,$\overline{3}$.

$\frac{a}{b}$ $a \rightarrow$ numerador, $b \rightarrow$ denominador

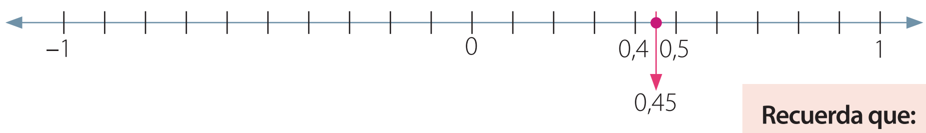
## Ejemplo 2

Representa en la recta numérica los números $\frac{1}{2}$ y 0,45.

1. Para ubicar $\frac{1}{2}$, se divide el tramo entre 0 y 1 en 2 partes iguales, y luego se cuenta 1 parte desde el 0 hacia la derecha.



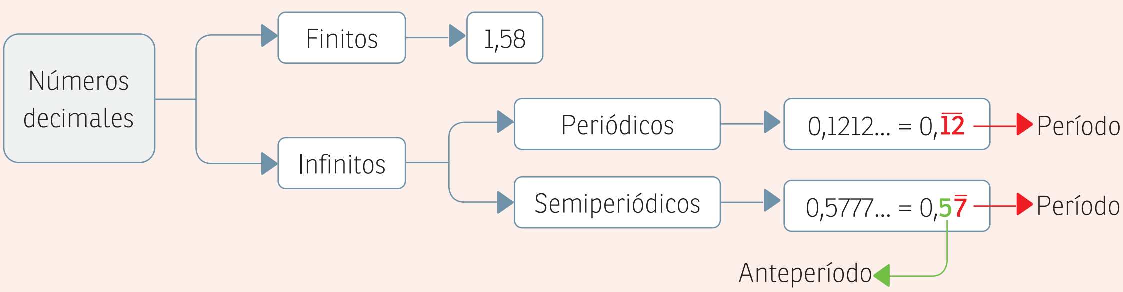

2. Para ubicar 0,45, se divide el tramo entre 0 y 1 en 10 partes iguales, luego se identifica la posición de 0,4 y de 0,5, y se divide esa parte en 2 iguales.




**Recuerda que:** $0{,}45 = \frac{45}{10}$

## Aprende

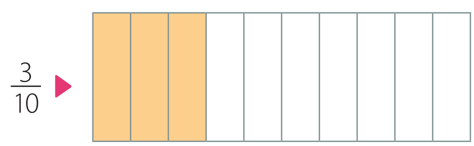
Para comprender los números decimales, puedes considerar el siguiente esquema:

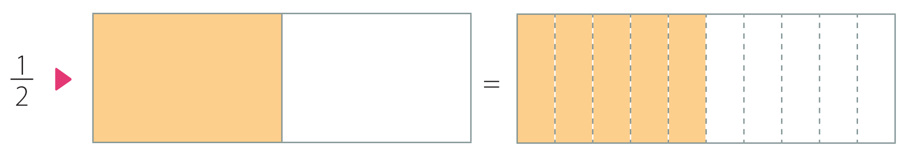



## Ejemplo 3

¿Cuál fracción es mayor, $\frac{3}{10}$ o $\frac{1}{2}$?

1. Puedes representar las fracciones considerando el mismo entero para luego compararlas.




2. Observa que la fracción $\frac{1}{2}$ ocupa una mayor parte del entero, entonces, esa es la fracción mayor.

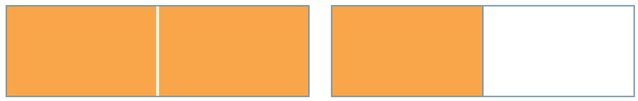
Como puedes ver en las representaciones $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

Nombra tres contextos en los que se utilicen números racionales.

## Ejemplo 4

**Imagina que comienzas a correr y avanzas 1,5 km. ¿Cómo se expresa esa distancia como una fracción?**

1. Puedes considerar que el número 1,5 es equivalente a 1 entero y medio, lo que se puede representar por:



2. Luego, el diagrama representa la fracción $\frac{3}{2}$, por lo que 1,5 km $= \frac{3}{2}$ km

- ¿Crees que puede haber números que tengan infinitos decimales?
- Al resolver la división 4 : 3, ¿cuál es el cociente?

## Ejemplo 5

**Representa la fracción $\frac{5}{9}$ como un número decimal.**

1. Divide el numerador por el denominador.

$$5 : 9 = 0{,}555\ldots$$

2. Escribe el número decimal correspondiente.

$$0{,}555\ldots \blacktriangleright 0{,}\overline{5}$$

3. $0{,}\overline{5}$ es un número decimal periódico, ya que las cifras de la parte decimal se repiten infinitamente.

$$\begin{array}{l} -5 : 9 = 0{,}\overline{5} \\ \underline{\ 0} \\ -50 \\ \underline{\ 45} \\ \ \ \ 50 \end{array}$$

## Ejemplo 6

**Algunos deportistas utilizan relojes inteligentes (*smartwatch*), que son dispositivos que permiten medir, entre otras cosas, la distancia recorrida, el ritmo y la frecuencia cardíaca. El cálculo se realiza empleando como criterios la frecuencia, la intensidad y la regularidad de los movimientos de la muñeca.**

Representa como fracción y número mixto el dato correspondiente a la distancia que aparece en la pantalla del *smartwatch*.

1 Escribe como numerador 13,25, pero sin la coma, y como denominador el valor de la potencia $10^2$, ya que el número tiene dos cifras decimales.

$$\frac{1\,325}{10^2} = \frac{1\,325}{100}$$

2 Simplifica.

$$\frac{1\,325 : 25}{100 : 25} = \frac{53}{4}$$

3 Representa la fracción como número mixto. Para ello, divide el numerador por el denominador. El cociente corresponde a la parte entera; el resto al numerador, y el divisor al denominador.

$$53 : 4 = 13 \qquad 1 \qquad 13\tfrac{1}{4}$$

$$
\begin{array}{l}
\phantom{-}53 : 4 = 13{,}25 \\
-\underline{4} \\
\phantom{-}13 \\
-\underline{12} \\
\phantom{-}10 \\
-\underline{8} \\
\phantom{-}20 \\
-\underline{20} \\
\phantom{-}0
\end{array}
$$

## Ejemplo 7

**Representa el número decimal periódico $2{,}\overline{34}$ como una fracción.**

1

$$2{,}\overline{34} = \frac{234 - 2}{99} = \frac{232}{99}$$

Escribes como numerador 2,34, pero sin la coma, y le restas la parte entera.

Como denominador escribes noventa y nueve, ya que el número tiene dos cifras decimales periódicas.

2 Puedes comprobar resolviendo la división entre el numerador y el denominador de la fracción.

$$232 : 99 = 2{,}34343434\ldots = 2{,}\overline{34}$$

## Ejemplo 8

**Representa el número decimal periódico $-1,\overline{5}$ como una fracción.**

$$-1,\overline{5} = -\frac{15-1}{9} = -\frac{14}{9}$$

Escribes como numerador 1,5, pero sin la coma, y le restas la parte entera.

Como denominador escribes nueve, ya que el número tiene una cifra decimal periódica.

Recuerda mantener el signo del número.

## Ejemplo 9

**Representa en la recta numérica el número decimal semiperiódico $0,8\overline{3}$.**

1. Para ubicar números decimales periódicos o semiperiódicos en la recta numérica, primero puedes hallar su expresión fraccionaria.

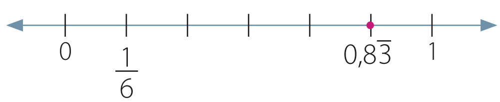
simplificamos por 15

$$0,8\overline{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{\cancel{75}:15}{\cancel{90}:15} = \frac{5}{6}$$

Escribes como numerador 0,83, pero sin la coma, y le restas el número que está antes del período, sin la coma.

Como denominador escribes noventa, ya que el número tiene una cifra periódica y una cifra en el anteperíodo.

2. Como $0,8\overline{3}$ es equivalente a $\frac{5}{6}$, ubicas $0,8\overline{3}$ en la posición de la fracción $\frac{5}{6}$.




## Aprende

- Para **representar una fracción como número decimal**, puedes dividir el numerador por el denominador de la fracción.
- Para **representar un número decimal como fracción**, puedes considerar lo siguiente:

| | Finitos | Infinitos | |
|---|---|---|---|
| | | Periódicos | Semiperiódicos |
| Numerador | Número decimal sin la coma. | Resta entre el número decimal sin la coma y la parte entera de él. | Resta entre el número decimal sin la coma y el número que está antes del período, sin la coma. |
| Denominador | Valor de una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales tenga el número. | Número formado por tantos 9 como cifras tenga el período. | Número formado por tantos 9 como cifras tenga el período, y tantos 0 como cifras tenga el anteperíodo. |

BDA U1_ACT_6 y 19

# Adición y sustracción de números racionales

En la imagen se observan expositores de la **Expo Quinua** realizada en Iquique, la cual es una vitrina del mundo rural que reúne a variados productores de quinoa y de frutas, hortalizas, procesados, artesanía y más.

*Fuente: https://www.indap.gob.cl*


INDAP

Analiza las preguntas considerando la siguiente situación:

Un expositor lleva para ofrecer cuatro canastas iguales llenas de frutas. Considera que cada canasta representa la misma cantidad respecto del total.

**1.** ¿Qué fracción del total representa una sola canasta?

**2.** ¿Qué fracción del total representan tres canastas?

**3.** ¿Cuánto resulta de sumar el contenido de ambas canastas?

## Ejemplo 1

**Respondamos las preguntas anteriores.**

**1.** ¿Qué fracción del total representa una sola canasta?

Dado que cada una de las 4 canastas representa la misma cantidad del total, una sola canasta representa 1 parte de 4 partes iguales, lo cual en fracción corresponde a $\frac{1}{4}$ del total.

**2.** ¿Qué fracción del total representan tres canastas?

Tres canastas corresponden a la suma de 3 canastas de $\frac{1}{4}$ del total, es decir, a:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

El resultado de esta suma es $\frac{3}{4}$ o, lo que es igual, 3 canastas de un total de 4.

**3.** Al sumar las fracciones que representan el contenido de cada canasta, ¿qué valor se obtiene?

Dado que cada canasta corresponde a $\frac{1}{4}$ del total, al sumar todas las canastas tenemos:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

El resultado $\frac{4}{4}$ representa 4 partes de un total de 4 partes iguales. Esto en números racionales corresponde a un entero.

## Aprende

- Como los números racionales pueden ser positivos, negativos o cero, al resolver **adiciones** y **sustracciones** entre ellos, es posible utilizar las mismas reglas que en los números enteros para determinar el signo de la suma o de la resta.
- Si se tiene una adición o una sustracción en la que se combinan números decimales y fracciones, se pueden representar los términos involucrados como números decimales o fracciones, y luego resolver la operación correspondiente.

## Ejemplo 2

**Calcula el valor de la expresión $-\frac{2}{9}+\frac{11}{18}$.**

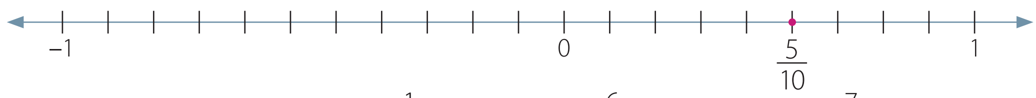
Puedes igualar los denominadores de las fracciones calculando el mínimo común múltiplo (mcm) y luego resolver la adición. Para ello, considera que la fracción $-\frac{2}{9}$ es equivalente a $-\frac{4}{18}$.

$$-\frac{4}{18}+\frac{11}{18}=\frac{-4+11}{18}=\frac{7}{18}$$

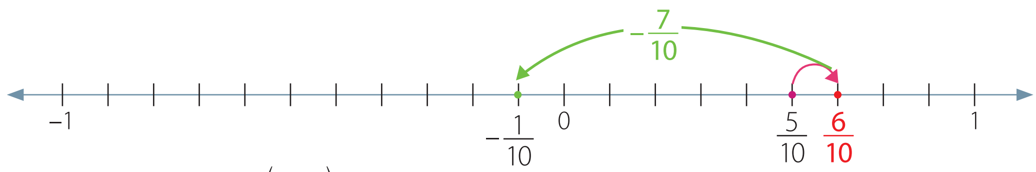
## Ejemplo 3

**Representa en la recta numérica la adición $\frac{1}{2} + 0{,}1 + \left(-\frac{7}{10}\right)$.**

1. Ubicas $\frac{1}{2}$ en la recta numérica, que es equivalente a $\frac{5}{10}$.




2. Sumas 0,1, que es equivalente a $\frac{1}{10}$, obteniendo $\frac{6}{10}$. Luego, sumas $-\frac{7}{10}$.




Por lo tanto, $\frac{1}{2} + 0{,}1 + \left(-\frac{7}{10}\right) = -\frac{1}{10} = -0{,}1$

## Ejemplo 4

**Calcula el valor de la expresión $3{,}\overline{5} + 1{,}2 - 0{,}06$.**

1. Expresa los números decimales como fracción.

simplificamos por 2

$$3{,}\overline{5} = \frac{35-3}{9} = \frac{32}{9} \qquad 1{,}2 = \frac{\cancel{12}}{\cancel{10}} = \frac{6}{5} \qquad 0{,}06 = \frac{\cancel{6}}{\cancel{100}} = \frac{3}{50}$$

2. Resuelve calculando el mcm entre los denominadores, que en este caso es 450, y resuelve las operaciones en el numerador.

$$\frac{32}{9} + \frac{6}{5} - \frac{3}{50} = \frac{(32 \cdot 50) + (6 \cdot 90) - (3 \cdot 9)}{450} = \frac{1\,600 + 540 - 27}{450} = \frac{2\,113}{450}$$

Se determina el m.c.m. entre 9, 5 y 50:
Primero se descomponen en factores primos: (3 • 3), (5), (5 • 5 • 2)
Luego se multiplican los factores elevados a su máximo exponente: $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2 = 450$

## Ejemplo 5

**Calcula el valor de la expresión $4\frac{2}{5} - 0{,}8 + \frac{3}{2}$.**

1. Expresa el número mixto $4\frac{2}{5}$ y el número decimal 0,8 como una fracción.

simplificamos por 2

$$\frac{5 \cdot 4 + 2}{5} - \frac{\cancel{8}}{\cancel{10}} + \frac{3}{2} = \frac{22}{5} - \frac{4}{5} + \frac{3}{2}$$

2. Resuelve. Para ello, calcula el mcm entre los denominadores, que en este caso es 10, y resuelve las operaciones en el numerador manteniendo el denominador.

$$\frac{22}{5} - \frac{4}{5} + \frac{3}{2} = \frac{(22 \cdot 2) - (4 \cdot 2) + (3 \cdot 5)}{10} = \frac{44 - 8 + 15}{10} = \frac{51}{10}$$

**Herramientas tecnológicas**

Para calcular el mcm, puedes utilizar el siguiente recurso: *https://www.geogebra.org/m/yvVm7mdW*

## Ejemplo 6

### Conecto con Ciencias Naturales

Para medir la masa de los planetas, se toma como unidad de medida la Tierra. En la imagen se muestra qué fracción de la masa de la Tierra tienen algunos planetas del Sistema Solar.


*Fuente: https://saberesyciencias.com.mx/2017/10/09/tamanos-distancias-sistema-solar-respecto-planeta/*

**a.** ¿Cuál de los planetas tiene menor masa?

Puedes expresar las fracciones como números decimales dividiendo el numerador por el denominador y luego comparar.

Mercurio ▶ $\frac{3}{50} = 0{,}06$ Venus ▶ $\frac{41}{50} = 0{,}82$ Marte ▶ $\frac{11}{100} = 0{,}11$

Luego, el planeta con menor masa es Mercurio.

**b.** Si se suman las masas de Mercurio, Venus y Marte, ¿superan la masa de la Tierra?

Suma las fracciones correspondientes.

igualamos denominadores amplificando las fracciones

$$\frac{3}{50} + \frac{41}{50} + \frac{11}{100} = \frac{6}{100} + \frac{82}{100} + \frac{11}{100} = \frac{99}{100}$$

La suma de las masas de los planetas no supera la masa de la tierra, ya que equivalen a $\frac{99}{100}$ de la masa de la Tierra.

**c.** Si la masa aproximada de la Tierra es 6 000 000 000 000 000 000 000 000 kg, ¿cuál es la diferencia entre las masas de Marte y Mercurio?

Plantea la expresión y resuelve.

Masa Marte ▶ $\frac{11}{100} \cdot 6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 660\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 6{,}6 \cdot 10^{23}$

Masa Mercurio ▶ $\frac{3}{50} \cdot 6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 360\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 3{,}6 \cdot 10^{23}$

Diferencia ▶ $660\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 - 360\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
$= 300\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

Luego, la diferencia es de 300 000 000 000 000 000 000 000 kg.

**Notación científica**

La notación científica es la forma de escribir los números que son muy grandes o pequeños de manera simplificada. En el caso de números muy grandes:

- Se mueve la coma decimal hacia la izquierda tantos espacios hasta llegar a la derecha del primer dígito.
- Se escribe el coeficiente, seguido del signo de multiplicación.
- Se escribe la base 10 con el exponente igual a la cantidad de espacios que se mueve la coma.

Ejemplo: El resultado de 300000000000000000000000 Kg en notación científica se escribe: $3 \cdot 10^{23}$

**Herramientas tecnológicas**

Para revisar los cálculos, puedes utilizar una calculadora online en el siguiente sitio: *https://www.wolframalpha.com/*

BDA U1_ACT_7

# Multiplicación y división de números racionales

La **wiphala** es una bandera compuesta por 49 cuadrados, con los siete colores del arcoíris distribuidos diagonalmente. Estos representan el equilibrio, reciprocidad, buen vivir y la diversidad de los pueblos andinos.

El origen de la palabra **wiphala** proviene de las palabras Wiphay que significa voz del triunfo y Lapx lapx, que refiere a la denominación que se le da al efecto del viento cuando le da movimiento a algo. Existen varias versiones de esta bandera de acuerdo con cada civilización andina, sin embargo, siempre expresa el espíritu de lucha e identidad cultural.

*Fuente: https://wiki.ead.pucv.cl/Caso_de_Estudio:_Pueblo_Originario_Aymara_-_Consultora_Sensus_1S_2021*

Istock/Daboost

**Observa la bandera wiphala y responde las siguientes preguntas:**

**1.** ¿Cuántos colores tiene la bandera?

**2.** ¿En cuántos cuadrados iguales está dividida la bandera?

**3.** ¿Cuántas veces aparece cada color?

Para conocer acerca del significado de los colores de la bandera wiphala, puedes visitar el siguiente sitio: *https://abi.bo/index.php/noticias/economia/37-notas/noticias/sociedad/13525-%C2%BFQu%C3%A9-representan-los-colores-de-la-wiphala*

## Ejemplo 1

Observa la bandera wiphala y responde.

**a.** ¿A qué fracción del total corresponde un cuadrado de color verde?

Dado que la bandera fue dividida en 49 cuadrados iguales, si se considera 1 cuadrado de los 49 (sea del color que sea), este corresponderá a la fracción $\frac{1}{49}$ del total de cuadrados de la bandera.

**b.** ¿A qué fracción del total corresponden todos los cuadrados verdes?

Dado que hay 7 cuadrados verdes y cada uno corresponde a $\frac{1}{49}$ del total, se tiene que:

$$\frac{1}{49}+\frac{1}{49}+\frac{1}{49}+\frac{1}{49}+\frac{1}{49}+\frac{1}{49}+\frac{1}{49}=\frac{7}{49}$$

Recuerda que una multiplicación es una suma abreviada, por lo que es igual al producto:

$$7\cdot\frac{1}{49}=\frac{7}{49}$$

**c.** ¿A qué fracción del total corresponden todos los cuadrados de colores que se encuentran a la derecha de la diagonal formada por los cuadrados de color blanco?

Si observas la bandera, puedes notar que está dividida en su diagonal por 7 cuadrados de color blanco. A su derecha hay 6 cuadrados amarillos, 5 cuadrados naranjas, 4 cuadrados rojos, 3 cuadrados morados, 2 azules y 1 verde.

Como cada cuadrado representa $\frac{1}{49}$ del total, se tiene:

$$6\cdot\frac{1}{49}+5\cdot\frac{1}{49}+4\cdot\frac{1}{49}+3\cdot\frac{1}{49}+2\cdot\frac{1}{49}+1\cdot\frac{1}{49}$$

$$=\frac{6}{49}+\frac{5}{49}+\frac{4}{49}+\frac{3}{49}+\frac{2}{49}+\frac{1}{49}$$

simplificamos por 7

$$=\frac{\cancel{21}}{\cancel{49}}=\frac{3}{7}$$

Los cuadrados de colores a la derecha de la diagonal blanca representan un $\frac{21}{49}$ del total.

## Aprende

Para **multiplicar** números racionales expresados como fracción, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores respectivos.

Simbólicamente: Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$, entonces la multiplicación de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ es:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

## Ejemplo 2

Resuelve la multiplicación $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$.

simplificamos por 2

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{\cancel{6}}{\cancel{20}}=\frac{3}{10}$$

## Aprende

Para **dividir** números racionales expresados como fracción, se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Simbólicamente: Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, c$ y $d \neq 0$, entonces la división de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ es:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

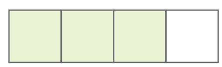
### Ejemplo 3

**Resuelve la división $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$.**

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}$$
$$= \frac{6}{4}$$
$$= 1\frac{1}{2}$$

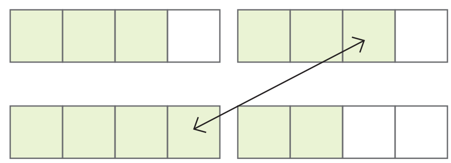
**Gráficamente**

$\frac{3}{4}$



$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2$ gráficamente:

Podemos completar 1 entero y un medio más



Luego

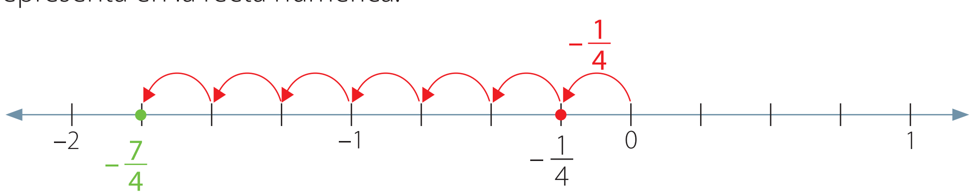
$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

¿Cuándo obtenemos un resultado mayor: al multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ o al dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$?

### Ejemplo 4

**Representa en la recta numérica la multiplicación $7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$.**

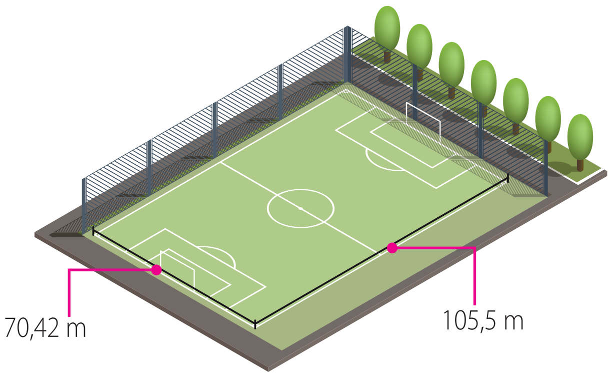
1. Se ubica $\left(-\frac{1}{4}\right)$ en la recta numérica.
2. Como $7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$
3. Se representa en la recta numérica.




Por lo tanto, $7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$

## Ejemplo 5

Las dimensiones de una cancha de fútbol son las que se muestran en la imagen. ¿Cuál es el área de la superficie de la cancha?




Multiplicar sin los puntos decimales, a continuación poner el punto decimal en la respuesta

7042 • 1055 = 7 429310

70,42 tiene 2 cifras decimales

105,5 tiene 1 cifra decimal

Por lo tanto, la respuesta tiene 3 cifras decimales

= 7 429,310

1. Para calcular el área ($A$) de la superficie de la cancha, se debe multiplicar el largo por el ancho.

$$A = 70{,}42 \text{ m} \cdot 105{,}5 \text{ m}$$

2. Se multiplican ambos valores decimales:

$$70{,}42 \cdot 105{,}5 = 7\,429{,}310$$

Luego, el área de la superficie de la cancha es 7 429,31 m$^2$.

## Ejemplo 6

Calcula el valor de la expresión $\left(2{,}\overline{3} : \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{7}$.

1. Representa el número decimal periódico como una fracción.

$$2{,}\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{\cancel{21}}{\cancel{9}} = \frac{7}{3}$$

simplificamos dividiendo por 3 el numerador y el denominador

2. Resuelve la operación del paréntesis. Para ello, multiplica $\frac{7}{3}$ por el inverso multiplicativo de $\frac{4}{5}$ para calcular el cociente.

$$\frac{7}{3} : \frac{4}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{12}$$

3. Resuelve la multiplicación y simplifica.

$$\frac{35}{12} \cdot \frac{4}{7} = \frac{140}{84} = \frac{5}{3}$$

El **inverso multiplicativo** de un número a distinto de cero es aquel que al multiplicarlo por a, resulta 1. Es decir, el inverso multiplicativo de a es $\frac{1}{a}$, ya que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

### Aprende

- Al resolver multiplicaciones y divisiones de números racionales, puedes aplicar la **regla de los signos** utilizada en los números enteros.
- Para resolver multiplicaciones y divisiones de fracciones y números decimales, puedes expresar los términos involucrados como una fracción o un número decimal, y luego resolver la operación correspondiente.

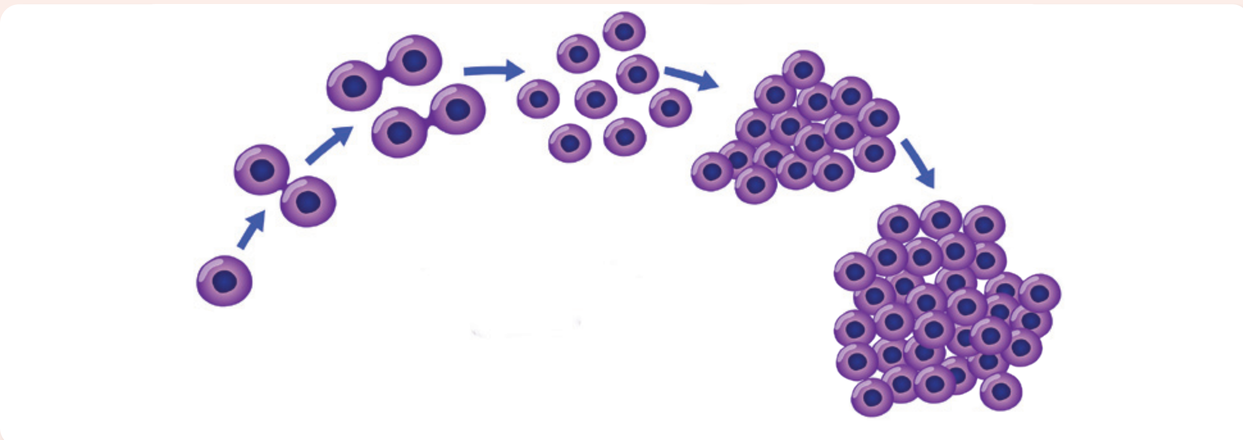
BDA U1_ACT_20

Lección

# 3 Potencia y raíz cuadrada

## Multiplicación de potencias

La **mitosis** es un tipo de división celular, en la cual una célula duplica todo su contenido y se divide para formar dos células genéticamente idénticas. Cuando la **mitosis** no se regula adecuadamente, pueden producirse problemas de salud como el cáncer.



Shutterstock/Gritsalak karalak

*Fuente: https://medlineplus.gov/spanish/genetica/entender/comofuncionangenes/celuladivision*

Responde las siguientes preguntas:

**1.** Al observar la imagen, ¿qué ves respecto de la cantidad de células en cada etapa?

**2.** Determina un patrón de crecimiento de las células de la imagen usando multiplicaciones. Ayúdate con la información de la tabla.

| Etapa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de células | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| | 2 | $2 \cdot 2$ | $2 \cdot 2 \cdot 2$ | $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ | | |

### Aprende

Cuando en una multiplicación hay factores iguales y se repiten una cantidad finita de veces, se puede escribir utilizando una potencia. En una potencia se identifican la **base**, el **exponente** y el **valor de la potencia**.

Si $a$, $n$ y $b \in \mathbb{N}$, la potencia de $a^n$ corresponde a:

Exponente

Valor de la potencia

Base

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = b$$

Se lee $a$ elevado a $n$ es igual a $b$.

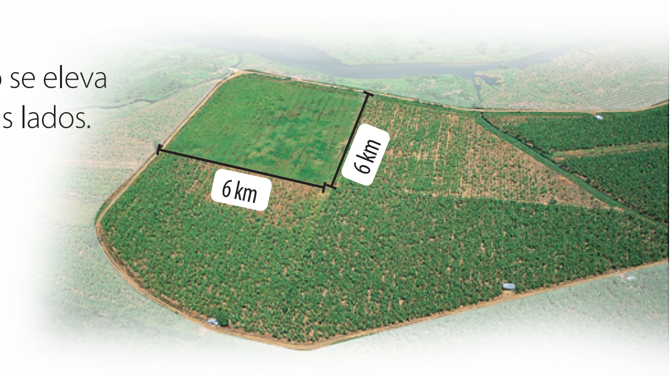
El exponente indica la cantidad de veces que aparecerá la base como factor en una multiplicación iterada. Ejemplo: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

## Ejemplo 1

En la imagen se muestra un sector cuadrado de un fundo. ¿Cuál es el área de su superficie?

1. Para calcular el área de un cuadrado se eleva a dos la medida de cualquiera de sus lados.
2. Se aplica la fórmula del área: $(6\text{ km})^2 = 6\text{ km} \cdot 6\text{ km} = 36\text{ km}^2$.

   Finalmente, el área de la superficie del sector es $36\text{ km}^2$.

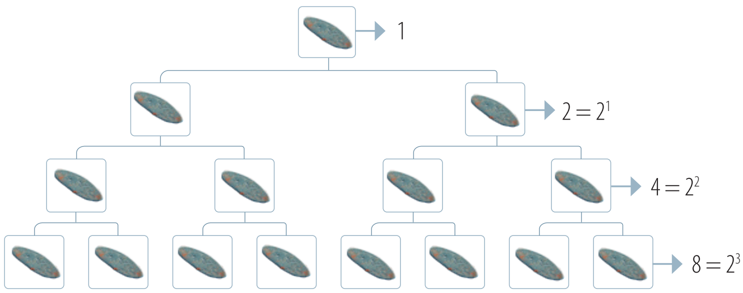



## Ejemplo 2

Los paramecios son organismos unicelulares habituales en aguas dulces estancadas con abundante materia orgánica, como charcos y estanques. Se reproducen de forma asexual por fisión binaria, es decir, una célula se divide en dos.

*Fuente: https://www.quimica.es/enciclopedia/Paramecium.html*

Representa la situación con un diagrama de árbol y con potencias.




¿Crees que utilizar diagramas de árbol ayuda a comprender una situación? ¿Por qué?

## Ejemplo 3

Macarena analiza el grado de descomposición de un alimento. Ella considera que está contaminado si la cantidad de bacterias por milímetro cuadrado es igual o superior a 512. Si en un inicio hay 1 bacteria por milímetro cuadrado y se divide en 2 en forma sucesiva cada 10 min, ¿cuánto tiempo demorará el alimento en estar descompuesto?

1. Plantea la situación con una potencia.

| Intervalos de tiempo de 10 minutos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de bacterias | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| | 1 | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ |

2. El exponente de la potencia representa la cantidad de intervalos de tiempo de 10 minutos, por lo que el tiempo que demorará el alimento en estar descompuesto es de $9 \cdot 10 = 90$ minutos.

## Ejemplo 4

Representa como una potencia el producto $4^2 \cdot 4^3 \cdot 5^5$.

$$
\begin{aligned}
4^2 \cdot 4^3 \cdot 5^5 &= \\
&= (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \\
&= (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \\
&= (4 \cdot 5)^5 \\
&= 20^5
\end{aligned}
$$

Aplicas la definición de potencias y desarrollas

## Ejemplo 5

Resuelve la expresión: $3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$.

$3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 2 \cdot 2)^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$ Aplicas la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

$= 12^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$

$= 12^3 - 3^{1+2+3}$ Aplicas la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base.

$= 12^3 - 3^6$

$= 1\,728 - 729$ Resuelves.

$= 999$

## Aprende

- Al **multiplicar potencias de igual base**, se conserva la base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n + m \text{ factores}} = a^{n+m}, \text{ con } a, n, m \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo: $8^7 \cdot 8^6 = 8^{7+6} = 8^{13}$

- Al **multiplicar potencias de igual exponente**, se multiplican las bases y se conserva el exponente.

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ factores}} = (a \cdot b)^n, \text{ con } a, b, n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo: $7^2 \cdot 4^2 = (7 \cdot 4)^2 = 28^2$

### Herramientas tecnológicas

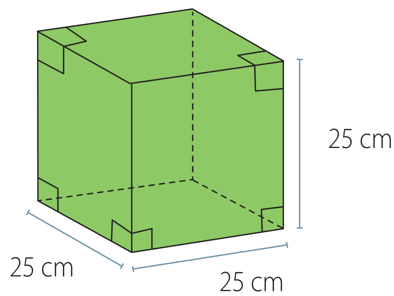
Para practicar el desarrollo de potencias, puedes utilizar el siguiente recurso:
*https://www.geogebra.org/m/pagKgma9#material/MFNDpUuq*

## Ejemplo 6

**Conecto con Geometría**

**Calcula el volumen del cubo. Expresa el resultado usando una potencia.**

**Considera que el volumen de un cubo de arista $x$ se calcula como $x^3$.**




A continuación se muestran dos procedimientos. Considera que la longitud de cada arista del cubo se expresó como $5^2$, ya que $25 = 5^2$.

**Procedimiento 1**

$5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^6\ \text{cm}^3$

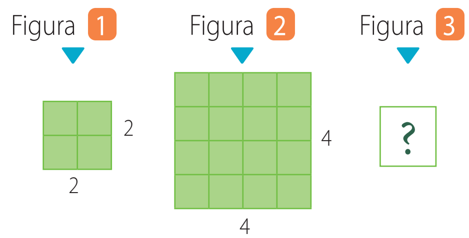
**Procedimiento 2**

$5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5^2)^3 = 5^6\ \text{cm}^3$

En ambos casos, el resultado es el mismo valor, entonces, el volumen del cubo es $5^6$ cm$^3$.

## Ejemplo 7

**Las figuras están formadas por cuadrados iguales. Si se continúa con la regla de formación que va duplicando el lado de cada figura respecto de la anterior, ¿cuántos cuadrados formarán la figura 3?**




1. La figura 1 tiene $(2^1)^2$ cuadrados y la figura 2 $(2^2)^2$ cuadrados. Al continuar con la regla de formación la figura 3 tendrá $(2^3)^2$ cuadrados.

2. Para calcular la cantidad de cuadrados, se pueden aplicar las propiedades de las potencias:

$$(2^3)^2 = \underbrace{2^3 \cdot 2^3}_{\text{Multiplicación de potencias de igual base}} = 2^{3+3} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

La figura 3 estará formada por 64 cuadrados.

**Recuerda:**

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

## Aprende

La **potencia de una potencia** se puede representar como una potencia que conserva la base original y su exponente es igual al producto de los exponentes involucrados.

$$(a^n)^m = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores de } a})^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{(n \cdot m) \text{ factores de } a} = a^{n \cdot m}, \text{ con } a, n, m \in \mathbb{N}.$$

BDA U1_ACT_10 y 22

# División de potencias

**Marie Curie** fue una física y química polaca nacionalizada francesa. Pionera en el campo de la radiactividad, es la primera y única persona en recibir dos Premios Nobel en distintas especialidades científicas: Física y Química. También fue la primera mujer en ocupar el puesto de profesora en la Universidad de París y la primera en recibir sepultura con honores en el Panteón de París en 1995. En la actualidad, la radiactividad es utilizada para combatir el cáncer en las personas, entre otros usos.

*Fuente: https://www.conicyt.cl/mujeres-en-ciencia-y-tecnologia/mujeres-destacadas/premios-nobel/marie-curie/*

Durante la Primera Guerra Mundial, Marie Curie se enfrentó a los prejuicios de los franceses que no querían mujeres ligadas a la guerra, pero ella demostró que sus radiografías ayudaban a salvar vidas. Para ello usó fuentes de rayos X portátiles que montó y llevó a los frentes de combate con su hija. Se calcula que esta hazaña ayudó a más de un millón de soldados heridos.


*Shutterstock/Trabantos*

**Responde y comenta con tus compañeros.**

**1.** Investiguen más acerca de los aportes que realizó Marie Curie a la ciencia.

**2.** ¿Qué relación hay entre la matemática y los descubrimientos de Curie junto a su esposo?

**Ejemplo 1**

La imagen corresponde a una estampilla histórica con la fotografía de la científica Marie Curie. Imagina que en tu colegio quieren utilizar esa imagen para un pendón que tenga $120^2$ cm² de área para colgarlo en la feria de ciencias. Si el alto del pendón debe ser como se muestra en la imagen, ¿cuántos centímetros debe medir el ancho?


$12^2$ cm

Istock/Sinopics

1. Como el área de un rectángulo se calcula multiplicando la medida de sus lados, se puede resolver la división $120^2 : 12^2$ para determinar la medida del ancho.
2. La división anterior se representa de la siguiente forma:

$$120^2 : 12^2 = \frac{120^2}{12^2} = \left(\frac{120}{12}\right)^2 = 10^2 = 100$$

Luego, el ancho del pendón debe medir $10^2$ cm o 100 cm.

## Aprende

- Al **dividir potencias de igual exponente**, se dividen las bases y se conserva el exponente.

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n \text{ factores}}}{\underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ factores}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a : b) \cdot (a : b) \cdot \ldots \cdot (a : b)}_{n \text{ factores}} = (a : b)^n \text{ con } a, b, n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo: $9^2 : 3^2 = (9 : 3)^2 = 3^2 = 9$

**Ejemplo 2**

Resuelve la expresión $36^3 : 12^3$.

$36^3 : 12^3 = (36 : 12)^3$ ........ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^3$

$= 27$ ........ Resuelves la potencia.

**Ejemplo 3**

Resuelve la expresión $60^2 : 5^2 : 3^2$.

$(60^2 : 5^2) : 3^2 = (60 : 5)^2 : 3^2$ ........ Resuelves de izquierda a derecha.

$= 12^2 : 3^2$ ........ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= (12 : 3)^2$

$= 4^2$

$= 16$ ........ Resuelves la potencia.

## Aprende

- Al **dividir potencias de igual base**, se conserva la base y se restan los exponentes.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n \text{ factores}}}{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ factores}}} = \frac{\overbrace{(\cancel{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a})}^{m \text{ factores}} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n - m \text{ factores}}}{\underbrace{(\cancel{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a})}_{m \text{ factores}}} = a^{n-m} \text{ con } a, n, m \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq m.$$

Ejemplo: $7^4 : 7^2 = 7^{4-2} = 7^2$

## Ejemplo 4

**Representa como una potencia el resultado de $(4^5 : 4^2) : 2^3$.**

$$(4^5 : 4^2) : 2^3 = \left(\frac{4^5}{4^2}\right) : 2^3$$ Escribes como fracción y simplificas.

$$= \left(\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}\right) : 2^3$$

$$= \frac{4^3}{2^3}$$ Escribes como fracción y aplicas la definición de potencias de igual base

$$= (4 : 2)^3$$

$$= 2^3$$

## Ejemplo 5

**Un tipo de bacteria se duplica cada 6 min. ¿Cuántas bacterias había en un comienzo si luego de una hora hay 2 048 bacterias?**

1. Plantea la expresión que representa el problema.

| Intervalos de tiempo de 10 minutos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de bacterias | 2 | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ |

Como las bacterias se duplican cada 6 min, en una hora hay 10 intervalos de tiempo de 6 min.

Cantidad de intervalos de tiempo.

$$x \cdot 2^{10} = 2\,048$$

Cantidad de bacterias que había en un comienzo.

2. Expresa el número 2 048 como una potencia de base 2 y resuelve.

$$x \cdot 2^{10} = 2\,048 \Leftrightarrow x \cdot 2^{10} = 2^{11}$$
$$x = 2^{11} : 2^{10}$$
$$x = 2^{11-10}$$
$$x = 2$$

Entonces, en un comienzo había 2 bacterias.

### Herramientas tecnológicas

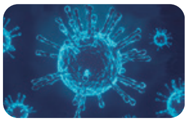
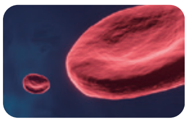
Para practicar la multiplicación y división de potencias, puedes utilizar el siguiente recurso:
*https://www.geogebra.org/m/pagKgma9#material/tvWNZpuS*

## Ejemplo 6

### Conecto con Ciencias Naturales

En Biología, para representar las medidas de diversos elementos de los organismos, como las células, las bacterias, los glóbulos rojos, entre otros, se utilizan las potencias en un método de escritura numérico llamado notación científica. Este se emplea cuando las medidas son muy pequeñas (como en el caso del estudio de la Biología celular) o muy grandes (como en el caso de las distancias y tamaños en el espacio).

Observa la siguiente tabla:

| Elemento | Medida | Medida en notación científica |
|---|---|---|
| Virus  | 0,0001 cm | $1 \cdot 10^{-4}$ cm |
| Glóbulo rojo  | 0,007 cm | $7 \cdot 10^{-3}$ cm |
| Bacteria  | 0,002 cm | $2 \cdot 10^{-3}$ cm |
| Diámetro del ADN  | 0,000002 cm | $2 \cdot 10^{-6}$ cm |

¿Qué razón hay entre las siguientes medidas?

**a.** El tamaño de un glóbulo rojo y el tamaño de una bacteria.

**b.** El diámetro del ADN y el tamaño de un glóbulo rojo.

**c.** El tamaño de una bacteria y el tamaño de un virus.

Para responder, utiliza el concepto de razón y relaciona las siguientes medidas:

**a.** $\dfrac{\textit{glóbulo rojo}}{\textit{bacteria}} \Rightarrow \dfrac{7 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{7}{2}$ Observa la división de potencias de igual base. La razón es de 7 : 2.

**b.** $\dfrac{\textit{diámetro del ADN}}{\textit{glóbulo rojo}} \Rightarrow \dfrac{2 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{2 \cdot 10^{-3}}{7}$ Observa la división de potencias de igual base. La razón es de 0,002 : 7.

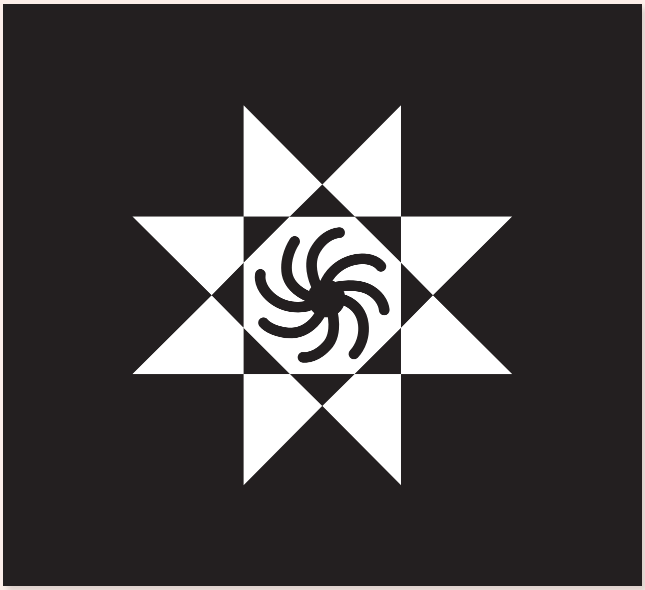
**c.** $\dfrac{\textit{bacteria}}{\textit{virus}} \Rightarrow \dfrac{2 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-4}} = \dfrac{2 \cdot 10}{1}$ Observa la división de potencias de igual base. La razón es de 20 : 1.

BDA U1_ACT_11

# Raíz cuadrada

El **Wüñelfe** es un símbolo de la cultura mapuche que puede ser descrito como una forma especial de octagrama o estrella de ocho puntas. Representa el lucero del alba o el planeta Venus y está presente en el kultxug, estandartes y elementos ceremoniales. Existen variaciones en su diseño. Algunas son las siguientes:

*Fuente: https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-68942016000200006*



**Responde y comenta con tus compañeros.**

1. ¿Para qué crees que se utiliza este símbolo y con qué contenidos podríamos vincularlo?

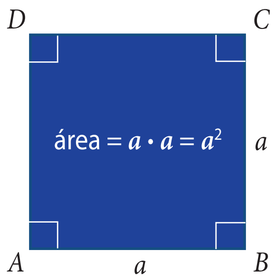
2. Investiga cuál es la importancia cultural que tiene Wüñelfe para el Pueblo Mapuche.

**Ejemplo 1**

**Desde 2021, Chile conmemora el día de los Pueblos Originarios y en un colegio, se quiere realizar una actividad para ese día, la cual consiste en pintar un mural, el cual debe ocupar un sector cuadrado de la pared de 1 m$^2$ de superficie. Luego de votar, los estudiantes decidieron dibujar uno de los tipos de Wüñelfe blanco con el fondo azul, como el de la imagen anterior.**

**a.** ¿Cuánto deben medir los lados del cuadrado azul en la pared?

Dado que la superficie que se pintará tiene la forma de un cuadrado, el cálculo del área corresponde al producto de la medida de los lados, es decir:




Se sabe que el área es de 1 m$^2$, por lo que para conocer la medida de los lados del cuadrado, se puede utilizar la raíz cuadrada:

$$a^2 = 1\text{ m}^2$$
$$a = \sqrt{1\text{ m}^2}$$
$$a = 1\text{ m}$$

De esta forma, los lados del cuadrado de 1 m$^2$ deben medir 1 m cada uno.

**b.** Si en otro lugar, la superficie que se pintará puede ser de 169 cm$^2$ ¿cuánto deben medir los lados del cuadrado?

La superficie a considerar ahora es de 169 cm$^2$, entonces:

$$a^2 = 169\text{ cm}^2$$
$$a = \sqrt{169\text{ cm}^2}$$
$$a = 13\text{ cm}$$

De esta forma, los lados del cuadrado de 169 m$^2$ deben medir 13 cm cada uno.

## Aprende

La **raíz cuadrada** de un número natural $b$ corresponde a un único número positivo $a$ que cumple: $a^2 = b$ y se representa como $\sqrt{b} = a$.

Ejemplos:

- $3^2 = 9$, así que $\sqrt{9} = 3$
- $5^2 = 25$, así que $\sqrt{25} = 5$
- $11^2 = 121$, así que $\sqrt{121} = 11$

## Ejemplo 2

El cubo de Astor Place es una escultura de Bernard Rosenthal situada en la isla de Manhattan, en Nueva York.
La obra fue construida con 820 kg de acero y se puede girar sobre su eje vertical. El cubo de Astor Place tiene un área total de su superficie aproximada de 345 600 cm$^2$.
¿Cuál es la medida de la arista del cubo?

*Fuente: https://www.esculturaurbanaaragon.com.es/estadosunidos9.htm*

*Shutterstock/Holly Vegter*

1. Para conocer el área de un cubo, se calcula el área de una de sus caras y se multiplica por 6, ya que sus caras son de iguales dimensiones.
2. Entonces, para calcular el área de una cara, divides el área por 6.

$$345\,600 : 6 = 57\,600$$

3. Luego, determinas la medida de la arista calculando la raíz cuadrada.

$$\sqrt{57\,600} = 240$$

Entonces, la medida de cada arista del cubo es de 240 cm.

## Ejemplo 3

**Estima la raíz cuadrada de 18 y ubícala en la recta numérica.**

1. El número 18 no es un cuadrado perfecto, ya que no existe un número $a \in \mathbb{N}$ que cumpla $a^2 = 18$. Por lo tanto, se buscan dos números cuadrados perfectos cercanos a 18.

$a = 2$, entonces $a^2 = 2^2 = 4$ $\qquad$ $a = 4$, entonces $a^2 = 4^2 = 16$

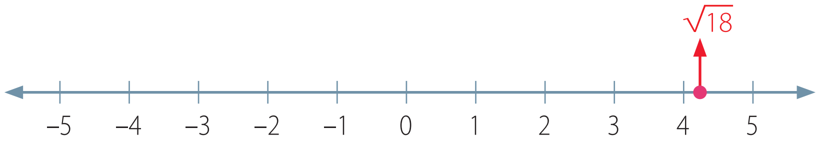
$a = 3$, entonces $a^2 = 3^2 = 9$ $\qquad$ $a = 5$, entonces $a^2 = 5^2 = 25$

Luego, los números buscados son 16 y 25.

2 Calcula la raíz cuadrada de cada número.

$$\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$$
$$4 < \sqrt{18} < 5$$

Como 18 es más próximo a 16 que a 25, entonces $\sqrt{18}$ es más próximo a 4.




## Ejemplo 4

**Supón que tienes que crear un volante para dar a conocer la actividad del 21 de junio a todos los estudiantes del colegio. Para ello, te solicitan utilizar papeles cuadrados de, aproximadamente, 29 cm² de superficie. ¿Cuánto deben medir, aproximadamente, los lados de cada volante?**

1 Como los papeles son cuadrados, se puede calcular la raíz cuadrada de 29 para determinar la medida del lado de cada volante, pero como $\sqrt{29}$ no es un número exacto, puedes estimar su valor.

$$25 < 29 < 36 \Leftrightarrow \sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36} \Leftrightarrow 5 < \sqrt{29} < 6$$

2 Luego, como 29 es más próximo a 25 que a 36 en la recta numérica, se puede afirmar que $\sqrt{29}$ es más cercano a 5.

3 Ahora, escoge un número decimal cercano a 5, por ejemplo 5,3. Obtienes $5{,}3^2 = 28{,}09$. Si eligieras 5,4, obtienes que $5{,}4^2 = 29{,}16$. Por lo tanto, $\sqrt{29}$ se aproxima a 5,4; es decir, $\sqrt{29} \approx 5{,}4$.

De esta forma, los lados de cada volante deben medir, aproximadamente, 5,4 cm.

## Aprende

El valor de una potencia de la forma $a^2$, con $a$ un número natural, se conoce como **cuadrado perfecto**. Por ejemplo, 64 es un cuadrado perfecto, ya que $8^2 = 64$.

Para **estimar la raíz cuadrada de un número natural** $d$ ($\sqrt{d}$), se pueden elegir dos números $x, y \in \mathbb{N}$, tal que $x < d < y$.

Estos números deben cumplir con la condición de ser **cuadrados perfectos**, es decir, $(\sqrt{x}) = c$ y $(\sqrt{y}) = e$, con $c, e \in \mathbb{N}$. En general, se consideran $c$ y $e$ dos números consecutivos.

$$x < d < y \qquad \sqrt{x} < \sqrt{d} < \sqrt{y} \qquad c < \sqrt{d} < e$$

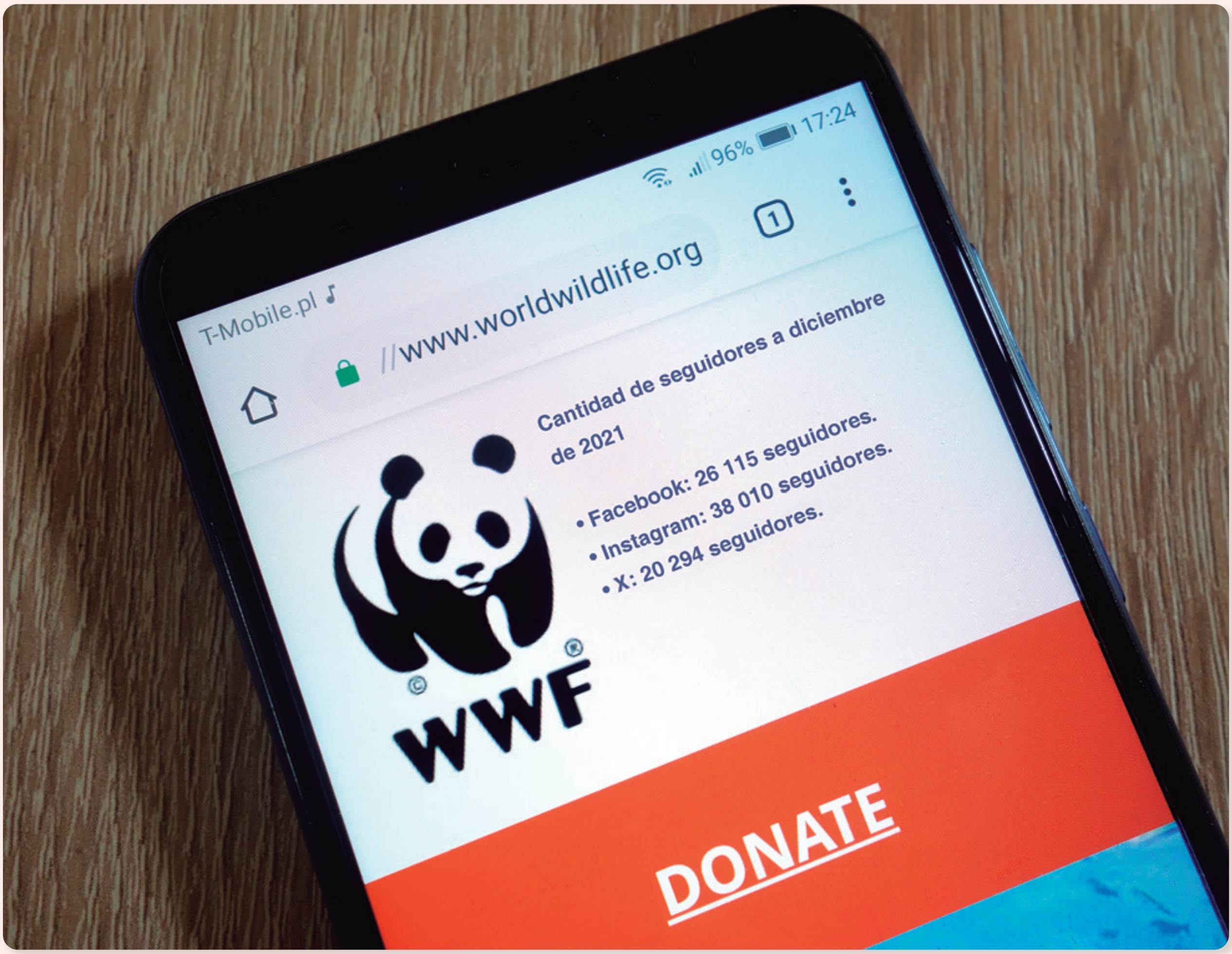
$$(\sqrt{17}) \Rightarrow \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < 5$$

BDA U1_ACT_12, 23 y 24

# Variaciones porcentuales

**WWF (World Wildlife Fund, Fondo mundial para la vida silvestre)** es una ONG (Organización No Gubernamental) internacional, con sede en Valdivia, Chile, preocupada de que tanto las especies animales como vegetales que habitan en la Zona Sur se encuentren debidamente resguardadas bajo alguna modalidad de protección, ya sea en áreas protegidas públicas, como parques y monumentos nacionales, o en áreas privadas, comunitarias o territorios indígenas de conservación.

*Fuente: https://www.wwf.cl/*




*Shutterstock/Piotr Swat*

**Responde y comenta con tus compañeros.**

1. ¿Qué piensas acerca de la labor que cumple la WWF en Chile?
2. ¿De qué manera podemos contribuir al cuidado y protección de nuestro entorno natural como hacen las ONG como WWF?
3. Investiga otras ONG que impacten en el medioambiente del país. Para ello, revisa el siguiente enlace: *https://www.minrel.gob.cl/minrel/ministerio/direcciones/direccion-de-medio-ambiente-y-asuntos-oceanicos/ongs-nacionales-e-internacionales*

## Ejemplo 1

**Observa la imagen con la cantidad de seguidores que tiene la organización. Si cada persona sigue a la organización solo en una red social, ¿qué porcentaje representa cada cantidad respecto del total?**

1. Determina la cantidad total de seguidores.
   - Facebook: 26 115 seguidores.
   - Instagram: 38 010 seguidores.
   - X: 20 294 seguidores.

   $$26\,115 + 38\,010 + 20\,294 = 84\,419$$

2. Calcula el porcentaje relacionado con los seguidores de cada red social.

**Facebook**

| Seguidores | Porcentaje (%) |
|---|---|
| 84 419 | 100 |
| 26 115 | $x$ |

$$x = \frac{26\,115 \cdot 100}{84\,419}$$

$x \approx 31$

**Instagram**

| Seguidores | Porcentaje (%) |
|---|---|
| 84 419 | 100 |
| 38 010 | $x$ |

$$x = \frac{38\,010 \cdot 100}{84\,419}$$

$x \approx 45$

**X**

| Seguidores | Porcentaje (%) |
|---|---|
| 84 419 | 100 |
| 20 294 | $x$ |

$$x = \frac{20\,294 \cdot 100}{84\,419}$$

$x \approx 24$

* Observa que 26115 seguidores de un total de 84419 es: $\frac{26\,115}{84\,419} \approx 0{,}31$

Luego, los seguidores de Facebook representan, aproximadamente, el 31 % del total de seguidores, Instagram el 45 % y X, el 24 %.

## Ejemplo 2

**Un producto que tenía un precio de \$25 000 se está liquidando con un descuento del 40 %, ¿cuál es el precio final?**

1. Un descuento del 40 % equivale a cancelar el 60 % del precio del producto. Es decir:

$$60\,\% \cdot \$25\,000 = \frac{60}{100} \cdot \$25\,000 = 0{,}6 \cdot \$25\,000 = \$15\,000$$

3. El precio final del producto será de \$15 000.

### Aprende

- El $a$ % de descuento en el valor de un producto equivale a cancelar el $(100 - a)$ % del precio del producto.
- Un aumento del $b$ % en el valor de un producto equivale a cancelar el $(100 + b)$ % del precio del producto.

Ejemplo:

El 35% de descuento de 700 equivale a (100 – 35)% de 700 000, es decir, el 65% de 700 que es 455.

## Ejemplo 3

**Conecto con Historia, Geografía y Ciencias Sociales**

El índice de precios al consumidor (IPC) es un indicador económico que mide mes a mes la variación en los precios de una canasta familiar conformada por ciertos bienes y servicios.

Si una familia destinara \$280 000 mensuales para ciertos bienes y servicios y el IPC acumulado de dos meses fuese del 5,2 %, ¿cuánto más se puede estimar que gastarán si siguen consumiendo lo mismo?

1. Debido a que el costo de los bienes y servicios aumenta en un 5,2 %, se debe calcular el 5,2 % de \$280 000.

| Costo (\$) | Porcentaje (%) |
|---|---|
| 280 000 | 100 |
| $x$ | 5,2 |

$$x = \frac{280\,000 \cdot 5{,}2}{100}$$

$$x = 14\,560$$

2. Se puede estimar que la familia gastará \$14 560 más mensualmente.

## Ejemplo 4

¿Cuál es el interés simple producido por un capital de \$400 000 al 5 % anual durante dos años?

1. Para determinar el interés que se genera el primer año, calculamos el 5 % de \$400 000.

| Pesos (\$) | Porcentaje (%) |
|---|---|
| 400 000 | 100 |
| $x$ | 5 |

$$x = \frac{400\,000 \cdot 5}{100}$$

$$x = \$20\,000$$

2. Como el período es de dos años, multiplicamos el interés generado el primer año por 2, es decir, \$20 000 • 2 = \$40 000:

3. Podemos comprobar lo obtenido utilizando la expresión:

$$\begin{aligned} I &= 400\,000 \cdot 5\,\% \cdot 2 \\ &= 400\,000 \cdot \frac{5}{100} \cdot 2 \\ &= 40\,000 \end{aligned}$$

Luego, el interés producido durante dos años es de \$40 000.

### Aprende

Los **porcentajes** tienen diversos usos. Por ejemplo:

- Para calcular el impuesto al valor agregado (IVA), que corresponde al 19 % de un cierto producto o servicio, o el índice de precios al consumidor (IPC).
- Para calcular intereses o descuentos. Por ejemplo, el interés simple $I$ que genera un capital $C$ a una tasa de interés anual $i$ % en un período $t$ se puede calcular utilizando la expresión: $I = C \cdot i\,\% \cdot t$.
- Para calcular el porcentaje de ganancia o pérdida, entre muchas otras aplicaciones.

## Ejemplo 5

Completa la siguiente liquidación de sueldo con las cantidades que faltan. Considera que el sueldo bruto es el monto sin descuentos y el sueldo líquido es lo que se recibe finalmente.

| LIQUIDACIÓN DE SUELDO | |
|---|---|
| Sueldo bruto | |
| Descuentos | |
| AFP (13 %) | |
| Salud (7 %) | $42 000 |
| Total descuentos | |
| Sueldo líquido | |

1. Calcula el sueldo bruto.

| Pesos ($) | Porcentaje (%) |
|---|---|
| $x$ | 100 |
| 42 000 | 7 |

$$x = \frac{42\,000 \cdot 100}{7}$$

$$x = \$600\,000$$

2. Calcula el 13 % de $600 000, que representa el descuento por concepto de AFP, es decir, 13 % • $600 000 = 0,13 • $600 000 = $78 000.

3. Luego, el total de los descuentos es ($42 000 + $78 000) = $120 000.

4. Finalmente, el sueldo líquido es ($600 000 – $120 000) = $480 000.

| LIQUIDACIÓN DE SUELDO | |
|---|---|
| Sueldo bruto | $600 000 |
| Descuentos | |
| AFP (13 %) | $78 000 |
| Salud (7 %) | $42 000 |
| Total descuentos | $120 000 |
| Sueldo líquido | $480 000 |

## Ejemplo 6

Un automóvil se encuentra a la venta con el siguiente aviso:


¿Cuánto es el IVA que se paga por el automóvil?

1. El IVA equivale al 19 % del valor inicial fijado para un producto. Por lo tanto, el precio del automóvil equivale al 119 % de su valor inicial:

2. Calcula el IVA que se paga por el automóvil.

| Precio ($) | Porcentaje (%) |
|---|---|
| 7 500 000 | 119 |
| $x$ | 19 |

$$x = \frac{7\,500\,000 \cdot 19}{119}$$

$$x = \$1\,197\,479$$

3. El IVA que se paga por el automóvil es, aproximadamente, $1 197 479.

BDA U1_ACT_13, 25, 26 y 27

# Síntesis

## Unidad 1: Números

### Lección 1 » Números enteros ($\mathbb{Z}$)

Para **multiplicar** números enteros:

Se puede considerar como una suma abreviada:

Por ejemplo:

$4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

Para **dividir** números enteros:

Puedes hacer la relación con la multiplicación:

Por ejemplo: $(-72) : (-8)$
¿Qué número multiplicado por $-8$ da $-72$?

Recuerda la regla de los signos:

**Multiplicación:** $\boxed{+ \cdot + = +}$ $\boxed{- \cdot - = +}$ $\boxed{- \cdot + = -}$ $\boxed{+ \cdot - = -}$

**División:** $\boxed{+ : + = +}$ $\boxed{- : - = +}$ $\boxed{- : + = -}$ $\boxed{+ : - = -}$

Ejemplos: $(-18) \cdot (-5) = 90$ $\quad (-50) : (-25) = 2$ $\quad 30 \cdot (-25) = -750$ $\quad (-63) : 7 = -9$

¿Cómo relacionas lo que ya sabías acerca de los números con lo que sabes ahora?
¿Qué dificultades tuviste para calcular multiplicaciones y divisiones de números enteros?

### Lección 2 » Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Los **números racionales** se pueden representar como fracción o número decimal.

Ejemplos: $\frac{12}{5} = 2{,}4 \qquad 0{,}7 = \frac{7}{10}$

**Para multiplicar o dividir números racionales**:

Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$ entonces:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y b, c, d $\neq 0$ entonces:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \blacktriangleright \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplos:

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{6 \cdot 3} = \frac{28}{18} = \frac{14}{9} \qquad \frac{5}{3} : \frac{7}{4} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$$

**Para sumar o restar números racionales:**

Si se tiene una adición o una sustracción en la que se combinan números decimales y fracciones, se pueden representar los términos involucrados como números decimales o fracciones, y luego resolver la operación correspondiente. Ejemplos:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2+5+7}{3} = \frac{14}{3} \qquad \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = \frac{9-3-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

¿Qué estrategias utilizaste para resolver multiplicaciones y divisiones con números enteros? ¿Crees que el trabajar en grupo aporta a tu proceso de aprendizaje? ¿Por qué?

## Lección 3 » Potencia y raíz cuadrada

**Multiplicación de potencias**

Multiplicación de potencias de igual base:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \text{ con } a, n, m \in \mathbb{N}.$$

Multiplicación de potencias de igual exponente:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \text{ con } a, b, n \in \mathbb{N}.$$

**División de potencias**

División de potencias de igual base:

$a^n : a^m = a^{n-m}$, con $a, n, m \in \mathbb{N}$ y $n \geq m$.

División de potencias de igual exponente:

$a^n : b^n = (a : b)^n$, con $a, b, n \in \mathbb{N}$.

**Raíz cuadrada**

La **raíz cuadrada** de un número natural $b$ corresponde a un único número positivo $a$ que cumple con $a^2 = b$, y se representa como $\sqrt{b} = a$.

Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$, ya que $3^2 = 9$.

**Variaciones porcentuales**

Los porcentajes tienen diversos usos. Por ejemplo, para calcular el impuesto al valor agregado (IVA), el índice de precios al consumidor (IPC), los intereses o descuentos, entre muchas otras aplicaciones.

Ejemplos **Multiplicación de potencias de igual base:**

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

Ejemplos **Multiplicación de potencias de igual exponente:**

$$7^2 \cdot 4^2 = (7 \cdot 4)^2 = 28^2$$

Ejemplos **División de potencias de igual base:**

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5 : \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^1$$

Ejemplos **División de potencias de igual exponente:**

$$28^2 : 4^2 = (28 : 4)^2 = 7^2$$

¿En qué situaciones de la vida cotidiana se pueden utilizar las potencias y la raíz cuadrada? ¿Qué aprendizajes de la unidad crees que necesitas ejercitar más? ¿Por qué?

BDA U1_ACT_15, 16, 28, 29 y 30

La orfebrería en plata comenzó a ser desarrollada por el pueblo Mapuche a fines del siglo XVIII, gracias a la utilización de monedas de plata que formaban parte del comercio en La Araucanía. Las monedas sirvieron, entonces, para confeccionar joyas y decorar los arreos y aperos de caciques y lonkos, con lo cual la platería pasó a constituir un símbolo de estatus dentro del mundo mapuche.

*Fuente: https://www.museodetalca.gob.cl/galeria/la-plateria-mapuche*

*Pie de foto: Shutterstock/gonzagon*

**En esta unidad** estudiarás las expresiones algebraicas, las ecuaciones e inecuaciones y las funciones.

# Unidad 2 Álgebra y funciones

## Para reflexionar

Reúnete con un grupo de compañeros y respondan las siguientes preguntas:

- ¿Han visto mujeres con joyas como las de la imagen? ¿Qué otros adornos utilizan?
- ¿Qué elementos de geometría identifican en las joyas de la imagen?
- ¿Crees que la geometría jugó un rol importante en el diseño de las joyas de los pueblos Originarios? Comenta con tu curso.

## Conocimientos previos

Para abordar esta unidad, puedes repasar los siguientes contenidos:

- Operaciones con números enteros.

$$\underbrace{\boxed{3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4}}_{\text{Primero se resuelven las multiplicaciones}} = \underbrace{\boxed{-6 + 16}}_{\text{Luego adiciones y sustracciones}} = \boxed{10}$$

- Operaciones con números decimales y fracciones.

$$2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

- Reducción de expresiones algebraicas.

$$2a + 4b - 3a - 12b = -a - 8b$$

- Ecuaciones con números enteros.

$$3x + 7 = 16$$
$$3x = 16 - 7$$
$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3$$

BDA U2_ACT_1 y 2

Lección

# 1 Expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones

## Operaciones con expresiones algebraicas

Un **txapelakucha** es un adorno pectoral usado por mujeres mapuche que representa el mundo espiritual y terrenal. Su uso va más allá de lo ornamental, ya que según el conocimiento mapuche, protege a quien lo usa de enfermedades causadas por los malos espíritus.

El **txarilogko** usado por las mujeres corresponde a una cadena de plata con discos colgantes los que pueden ser monedas o discos de plata o alpaca. Es una joya muy popular que se utiliza en las ceremonias.

*Fuente: https://web.uchile.cl/cultura/mapa/artesamapuche/plateria.htm*

*Wikimedia Commons/Pagsi*

Piensa y comenta con tus compañeros.

1. ¿Qué otros elementos geométricos reconoces en los adornos mapuche?
2. Investiga qué museos de Chile tienen platería mapuche en sus exhibiciones.

**Ejemplo 1**

| Equipo **ñarqui** (gato) | Equipo **trewa** (perro) |
| --- | --- |
|  |  |

En una prueba entre alianzas, cada equipo debía elaborar una joya mapuche usando principalmente piezas rectangulares y circulares. Los equipos confeccionaron un **txapelakucha** y un **txarilogko**. Para asignar los puntajes, las piezas rectangulares suman 2 puntos y las circulares 1 punto.

Si cada rectángulo se representa con una $r$ y cada círculo con una $c$, ¿qué expresión permite calcular el puntaje obtenido por cada equipo? ¿Cuál equipo ganó la prueba?

1. Cuenta la cantidad de rectángulos y círculos que tiene el adorno de cada equipo.

   **Equipo ñarqui**

   14 rectángulos en la 1° cadena.
   13 rectángulos en la 2° cadena.
   14 rectángulos en la 3° cadena.
   } 41 rectángulos
   10 círculos en la base.

   **Equipo trewa**

   A lo largo del cintillo hay:
   45 rectángulos.
   44 círculos.

2. Escribe la expresión pedida en cada caso.

   Equipo ñarqui ▶ $41r + 10c$

   Equipo trewa ▶ $45r + 44c$

3. Para saber qué equipo ganó la prueba, reemplaza los puntajes según corresponda.

   Equipo ñarqui ▶ $41r + 10c$
   $41 \bullet 2 + 10 \bullet 1$
   $= 82 + 10$
   $= 92$

   Equipo trewa ▶ $45r + 44c$
   $45 \bullet 2 + 44 \bullet 1$
   $= 90 + 44$
   $= 134$

   Entonces, el equipo trewa ganó la prueba.

## Aprende

- Una **expresión algebraica** es aquella en que se combinan letras, números y operaciones. Por ejemplo:

  Coeficiente numérico

  $$b^2 + \boxed{12a^3b}$$

  Factor literal

  Término algebraico

- En una expresión algebraica se llaman **términos semejantes** a aquellos que tienen el mismo factor literal. Por ejemplo: $5a^2b$ y $-7a^2b$ tienen el mismo factor literal.
- Para sumar o restar expresiones algebraicas se asocian los términos semejantes y luego, se suman o se restan sus coeficientes numéricos y se conserva el factor literal. Por ejemplo: $2a^4b + y - 7a^4b + 3y = (2a^4b - 7a^4b) + (y + 3y) = -5a^4b + 4y$

## Ejemplo 2

**Reduce la expresión $x + (3x - y) - (-x + 5y)$.**

Para reducir una expresión algebraica con paréntesis, puedes eliminar los paréntesis si el signo que les antecede es positivo (+); mientras que si es negativo (–), debes multiplicar por –1 todos los términos asociados. Entonces:

$$x + (3x - y) - (-x + 5y)$$
$$= x + 3x - y + x - 5y$$
$$= (x + 3x + x) + (-y - 5y)$$
$$= 5x - 6y$$

## Ejemplo 3

**Conecto con Geometría**

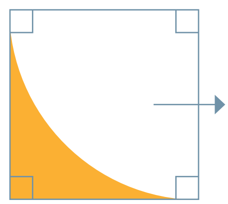
**Determina el área de la parte pintada de la figura si el área del cuadrado está dada por la expresión $(4x^2 + 3y^2)$ cm² y el área del sector circular es $(2x^2 - y^2)$ cm².**

1. Para determinar el área ($A$) de la parte pintada se resta al área del cuadrado el área del sector circular:

$$A = (4x^2 + 3y^2)\text{ cm}^2 - (2x^2 - y^2)\text{ cm}^2$$

2. Resuelve la expresión.

$$A = [4x^2 + 3y^2 - 2x^2 + y^2]\text{ cm}^2$$
$$A = [(4x^2 - 2x^2) + (3y^2 + y^2)]\text{ cm}^2$$
$$A = (2x^2 + 4y^2)\text{ cm}^2$$




El área de la parte pintada es $(2x^2 + 4y^2)$ cm².

¿Qué es lo primero que haces al resolver adiciones y sustracciones de expresiones algebraicas?

## Ejemplo 4

**Calcula el producto de $8x^2 \cdot (-5x^3)$.**

1. Agrupa la multiplicación entre los coeficientes numéricos y entre los factores literales.

$$(8x^2) \cdot (-5x^3) = (8 \cdot (-5)) \cdot (x^2 \cdot x^3)$$

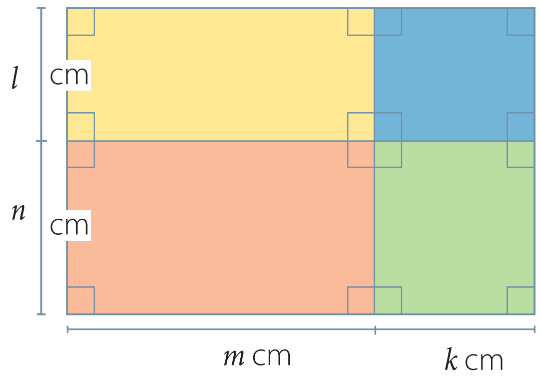
2. Multiplica los coeficientes numéricos y los factores literales.

$$-40 \cdot (x^2 \cdot x^3) = -40 \cdot x^{2+3} = -40x^5$$

Llamamos monomio, a una expresión con un solo término. Binomio, a una expresión con dos términos, y trinomio a una expresión con tres términos. Una expresión con más de tres términos es llamada según su número de términos, por ejemplo: polinomio de cinco términos.

## Ejemplo 5

La siguiente figura está compuesta solo por rectángulos. ¿Cuál es el área total de la figura?




### 1ª estrategia

- Calcula el área de cada rectángulo y luego súmalas.

Área rectángulo amarillo: $m \cdot l = ml$ cm$^2$ Área rectángulo azul: $k \cdot l = kl$ cm$^2$

Área rectángulo anaranjado: $m \cdot n = mn$ cm$^2$ Área rectángulo verde: $k \cdot n = kn$ cm$^2$

Área total ▶ $kl + kn + ml + mn$ cm$^2$

### 2ª estrategia

- Determina la expresión que representa el largo y el ancho de la figura y multiplícalas para calcular el área.

Largo: $(m + k)$ cm Ancho: $(l + n)$ cm

Área total ▶ $(m + k) \cdot (l + n) = m \cdot (l + n) + k \cdot (l + n)$

$$= m \cdot l + m \cdot n + k \cdot l + k \cdot n$$

$$= ml + mn + kl + kn$$

$$= kl + kn + ml + mn \text{ cm}^2$$

En ambos casos se obtiene el mismo resultado, por lo que el área total de la figura es $kl + kn + ml + mn$ cm$^2$.

¿Piensas que intercambiar opiniones con tus compañeros aporta a tu aprendizaje? ¿Por qué?

## Aprende

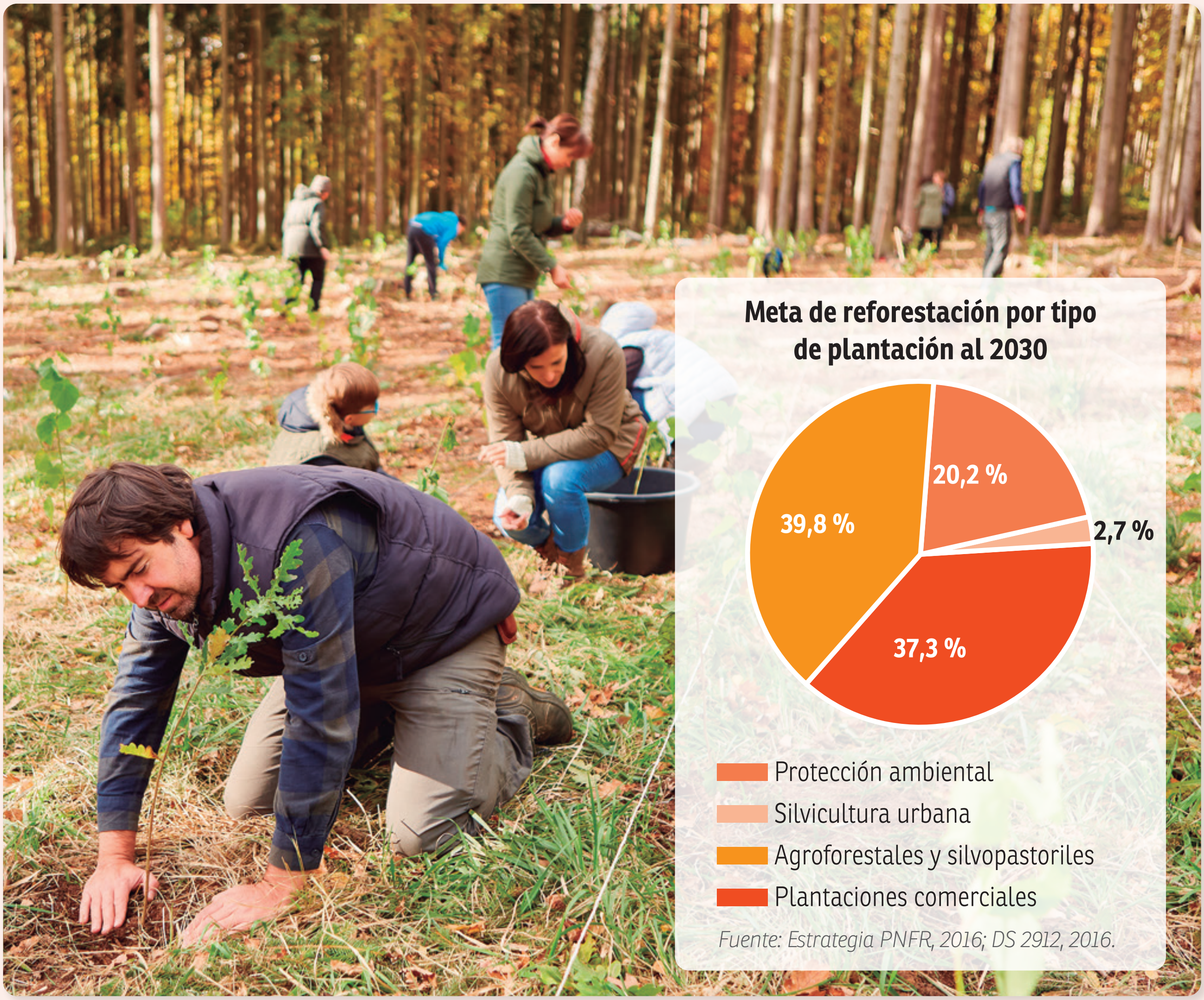
Para **multiplicar expresiones algebraicas**, puedes considerar lo siguiente:

- **Monomio por monomio:** se multiplican los coeficientes numéricos de los términos y los factores literales, según corresponda. Ejemplo: $3a^2 \cdot 2a = 6a^3$
- **Monomio por polinomio:** se multiplica el monomio por cada término del polinomio, aplicando la propiedad distributiva. Ejemplo: $4m \cdot (x + 2 - 3y) = 4mx + 8m - 12my$
- **Polinomio por polinomio:** se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación y luego, de ser posible, se reducen términos semejantes. Ejemplo: $(a + 2) \cdot (3b + c) = a \cdot (3b + c) + 2 \cdot (3b + c) = 3ab + ac + 6b + 2c$

BDA U2_ACT_3

# Ecuaciones

En La Araucanía han desaparecido alrededor de 275 000 hectáreas del bosque nativo entre 1973 y 2008, esto según una investigación publicada en la revista científica *Applied Geography*, y cerca de un 50 % han sido reemplazadas principalmente por plantaciones forestales exóticas, como pino y eucalipto.




Shutterstock/Robert Kneschke

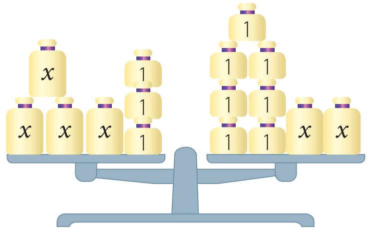
*Fuente: https://www.forestal.uach.cl/noticias/post.php?s=2015-10-05-cuanto-bosque-nativo-se-ha-perdido-en-35-anos-en-la- araucania*

Reúnete con un grupo de compañeros y respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las dos mayores metas de reforestación según el gráfico? Expliquen en qué consiste cada una.
2. Investiguen los riesgos que conlleva la plantación de pino y eucalipto.
3. ¿Cuántos litros de agua consume un pino? ¿Cuántos litros de agua consume un eucalipto desde que es plantado hasta su estado adulto?

## Ejemplo 1

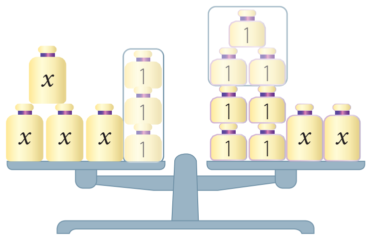
**Representa con una ecuación la balanza en equilibrio y luego determina el valor de $x$.**



1. Modela la situación de la balanza con una ecuación.

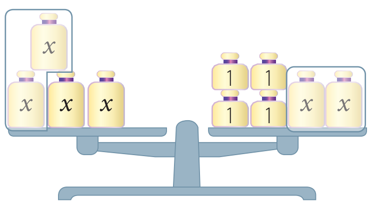
$$4x + 3 = 2x + 7$$

2. Extrae la misma cantidad de  en cada lado.



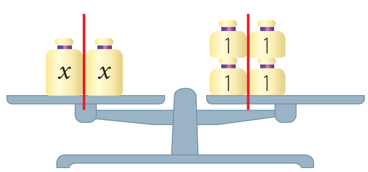
En la ecuación inicial tienes que: $4x + 3 - 3 = 2x + 7 - 3 \Leftrightarrow 4x = 2x + 4$

3. Extrae la misma cantidad de  en cada lado.



Luego, en la ecuación tienes que: $4x - 2x = 2x - 2x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4$

4. Asocia los pesos de cada lado de la balanza y determina el valor de $x$.



Al observar la balanza, puedes notar que cada $x$ equivale a 2 unidades, por lo que $x = 2$.

Entonces, tienes que: $2x : 2 = 4 : 2 \Leftrightarrow x = 2$

### Aprende

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que contiene una o más incógnitas.

**Ejemplo 2**

**Resuelve la ecuación $12x + 4 = 5x + 25$.**

1. Resta 4 en ambos lados de la igualdad.

$$12x + 4 - 4 = 5x + 25 - 4 \Rightarrow 12x = 5x + 21$$

2. Resta $5x$ en ambos lados de la igualdad.

$$12x - 5x = 5x - 5x + 21 \Rightarrow 7x = 21$$

3. Divide por 7 cada lado de la igualdad.

$$7x : 7 = 21 : 7 \Rightarrow x = 3$$

4. Puedes comprobar el resultado reemplazando el valor de $x$ en la ecuación.

$$12 \cdot 3 + 4 = 5 \cdot 3 + 25$$
$$36 + 4 = 15 + 25$$
$$40 = 40$$

Como la igualdad se cumple, entonces $x = 3$ es la solución de la ecuación.

**Ejemplo 3**

**Resuelve la ecuación $\frac{x}{6} + 4 = 11$.**

1. Resta 4 en ambos lados de la igualdad.

$$\frac{x}{6} + 4 - 4 = 11 - 4 \Rightarrow \frac{x}{6} = 7$$

2. Multiplica por 6 cada lado de la igualdad.

$$\frac{x}{6} \cdot 6 = 7 \cdot 6 \Rightarrow x = 42$$

3. Puedes comprobar la solución reemplazando el valor de $x$ en la ecuación.

$$\frac{42}{6} + 4 = 11$$
$$7 + 4 = 11$$
$$11 = 11$$

Como la igualdad se cumple, entonces $x = 42$ es la solución de la ecuación.

**Aprende**

- Una **ecuación lineal con coeficientes racionales** es aquella en la que están involucrados números racionales. Estas ecuaciones pueden ser de la forma: $ax + b = c$, $ax - b = c$; $ax + b = cx + d$; $b = ax + c$; entre otras. Con $a$, $b$, $c$ números racionales y $a \neq 0$.
- Para resolver una ecuación con coeficientes fraccionarios, se puede calcular el mínimo común múltiplo (mcm) entre los denominadores y multiplicar cada término de la ecuación por dicho número para obtener los coeficientes enteros.

## Ejemplo 4

**En un colegio han decidido participar de una campaña para reunir fondos y reforestar pequeñas áreas con plantaciones de comestibles como lechugas, tomates, papas, maqui, entre otros. El curso de Sofía donó un cuarto de sus ahorros, el de Joaquín donó \$25 000 y en conjunto donaron \$45 000.**

**a.** ¿Qué ecuación permite calcular la cantidad de dinero que tenía ahorrado el curso de Sofía?

Dado que la cantidad que tenía ahorrada el curso de Sofía es desconocida, la denominamos $x$. Así, la expresión para las donaciones de ambos cursos es:

| Curso de Sofía | | Curso de Joaquín | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}x$ | $+$ | $25\,000$ | $= 45\,000$ |

**b.** ¿Cuál curso donó más dinero?

Para responder, se debe calcular cuánto dinero donó el curso de Sofía. Para ello, se resuelve la ecuación planteada anteriormente:

$$\frac{1}{4}x + 25\,000 = 45\,000$$

$$\frac{1}{4}x + 25\,000 - 25\,000 = 45\,000 - 25\,000$$ Restas 25 000 en ambos lados de la igualdad.

$$\frac{x}{4} = 20\,000$$ Resuelves.

Entonces, el curso de Sofía donó \$20 000, que es una cantidad menor a la que donó el curso de Joaquín, por lo tanto, el curso de Joaquín donó más dinero.

**c.** ¿Cuánto dinero tenía ahorrado el curso de Sofía?

Ya que se sabe que el curso de Sofía donó \$20 000, lo que corresponde a un cuarto de sus ahorros, se resuelve la última expresión de la ecuación anterior, es decir:

$$\frac{1}{4}x = 20\,000$$

$$\frac{1}{4}x \cdot 4 = 20\,000 \cdot 4$$ Multiplicas por 4 cada lado de la igualdad

$$x = 80\,000$$ Resuelves.

Luego, el valor de $x$ es 80 000, por lo que el curso de Sofía tenía ahorrados \$80 000.

¿Qué otras situaciones de la vida cotidiana puedes resolver usando ecuaciones?

Ejemplo 5

## Conecto con Educación Física y Salud

Martina está calculando el índice de masa corporal (IMC) de sus compañeros de curso para un trabajo en el cual debe elaborar un plan de alimentación y vida saludable. Para conocer este índice, utiliza la siguiente ecuación:

$$IMC = \frac{\text{Masa (en kilogramos)}}{\text{Estatura}^2 \text{ (en metros)}}$$

De acuerdo con los indicadores de salud, un índice de masa corporal ($IMC$) de entre 25 y 29,9 se considera sobrepeso. Si es superior a 30, se considera obesidad. El $IMC$ normal está entre 18,5 y 24,9.

Istockphoto/Piotrekswat

*Fuente: https://medlineplus.gov/spanish/ency/article/003101.htm*

**a.** ¿Cuál es el $IMC$ de una persona cuya masa es de 70 kg y su estatura es 1,6 m?

**1** Reemplaza los valores en la ecuación.

$$IMC = \frac{70}{1{,}6^2}$$

**2** Resuelve.

$$IMC = \frac{70}{1{,}6^2} = \frac{70}{2{,}56} \approx 27{,}3$$

Se obtiene un $IMC$ de 27,3, aproximadamente.

**b.** ¿Cuál es, aproximadamente, la masa de una persona que tiene un $IMC$ de 22,5 y cuya estatura es 1,9 m?

**1** Reemplaza los valores en la ecuación. Considera que $x$ es la incógnita que corresponde a la masa en kilogramos.

$$22{,}5 = \frac{x}{1{,}9^2}$$

**2** Resuelve.

$$22{,}5 = \frac{x}{3{,}61}$$

$$22{,}5 \cdot 3{,}61 = x$$

$$81{,}225 = x$$

Luego, la masa de la persona es, aproximadamente, 81 kg. lo cual indica que se encuentra con sobrepeso.

## Ejemplo 6

Resuelve la ecuación $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

1. $$\frac{2x}{3} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{5}{6} \cdot 6$$ Calculas el mcm entre los denominadores, que en este caso es 6, y lo multiplicas por cada término de la igualdad.
$$4x - 3 = 5$$
$$4x - 3 + 3 = 5 + 3$$ Sumas 3 en ambos lados de la igualdad.
$$4x = 8$$
$$\frac{4}{4}x = \frac{8}{4}$$ Divides en 4 ambos lados de la igualdad.
$$x = 2$$

2. Comprueba la solución obtenida: $\frac{2 \cdot 2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

## Ejemplo 7

**Un trayecto tiene una parte asfaltada y otra sin pavimentar. Tamara recorrió el camino asfaltado y 4,8 km del tramo no pavimentado. Nicolás recorrió el tramo asfaltado más 1,2 km sin pavimentar, pero lo hizo dos veces. Si ambos anduvieron la misma distancia, ¿cuántos kilómetros hay de camino asfaltado?**

1. Plantea la ecuación en la que $x$ representa los kilómetros de camino asfaltado.

Recorrido de Tamara → $\boxed{x + 4{,}8} = \boxed{2(x + 1{,}2)}$ ← Recorrido de Nicolás

2. Resuelve la ecuación.

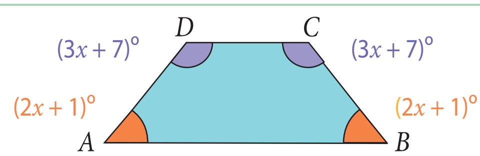
$$x + 4{,}8 = 2x + 2{,}4$$
$$4{,}8 - 2{,}4 = 2x - x$$
$$2{,}4 = x$$

Luego, hay 2,4 kilómetros de camino asfaltado.

## Ejemplo 8

**Conecto con Geometría**

**Observa la figura y determina el valor de $x$.**




1. Plantea una ecuación con los datos. Considera que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es de 360°.
$$2(3x + 7) + 2(2x + 1) = 360$$

2. Resuelve.
$$2(3x + 7) + 2(2x + 1) = 360$$
$$6x + 14 + 4x + 2 = 360$$ Resuelves cada paréntesis.
$$10x + 16 = 360$$ Reduces términos semejantes.
$$10x + 16 - 16 = 360 - 16$$ Restas 16 en ambos lados de la igualdad.
$$10x = 344$$ Divides por 10 cada lado de la igualdad.
$$\frac{10}{10}x = \frac{344}{10}$$
$$x = 34{,}4$$

Luego, el valor de $x$ es 34,4.
Comprueba el resultado, reemplazando el valor encontrado en x

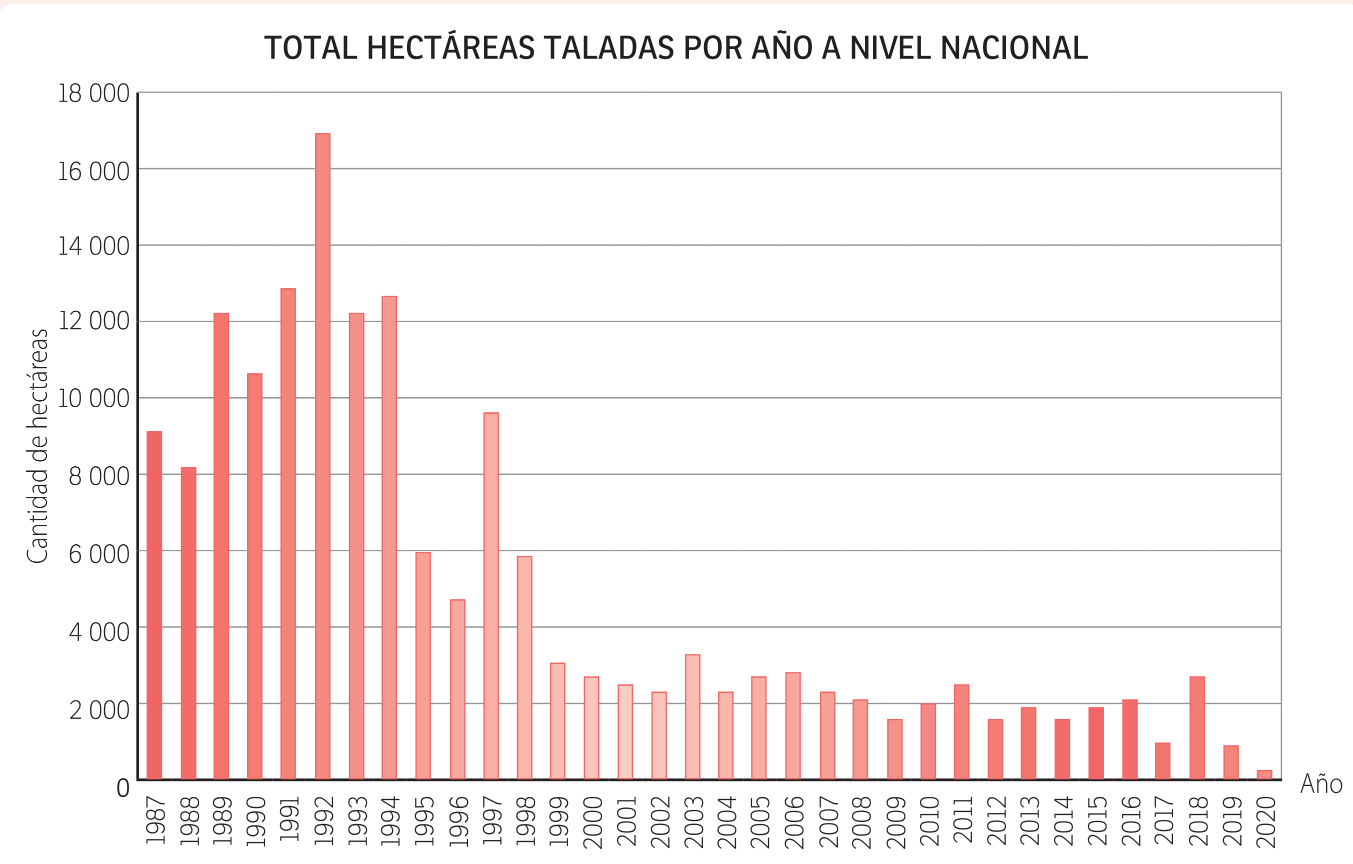
BDA U2_ACT_4

## Inecuaciones

En Chile existen más de tres millones de hectáreas de monocultivos de pino y eucalipto que abastecen una industria forestal que le permite al país ser el segundo productor de celulosa en América Latina, un producto a partir del cual se obtiene el papel.

Los impactos ambientales que genera esta industria han sido ampliamente documentados por la ciencia. Impactos que, además, el cambio climático profundiza, aseguran los expertos. Entre estos se encuentran: el deterioro de los suelos, un impacto negativo en el suministro hídrico y además, son especies que se queman con más facilidad, por lo cual facilitan los incendios forestales.

*Fuente: https://es.mongabay.com/2021/10/chile-industria-forestal-evaluacion-de-impacto-ambiental-entrevista/*




*Fuente: https://www.ciperchile.cl/2020/11/30/el-avance-de-la-desertificacion-las-22-mil-hectareas-de-bosque- nativo-que-conaf-aprobo-talar-sin-reforestar/*

**Reúnete con un grupo de compañeros y respondan las siguientes preguntas:**

1. De acuerdo con el gráfico, ¿entre qué años hubo una mayor tala de árboles a nivel nacional?
2. Aproximadamente, ¿cuántas hectáreas más se talaron el año 1998 en comparación con el año 2020?
3. Aproximadamente, ¿cuántas hectáreas se talaron luego del año 2016?

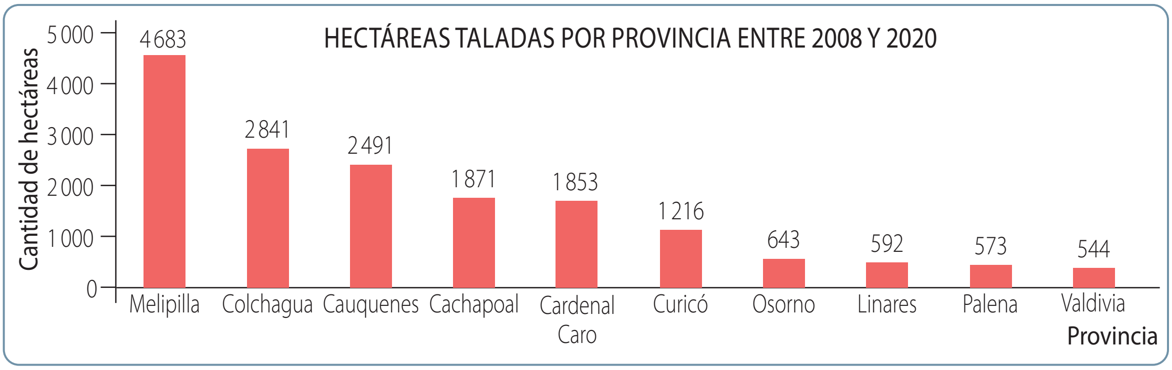
## Aprende

Una **desigualdad** es una expresión que establece una relación matemática de orden entre dos cantidades, es decir, que indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

$>$ : mayor que    $<$ : menor que

### Ejemplo 1

**Si entre los años 2008 y 2023 se podía talar menos de 600 hectáreas en total, ¿cuántas hectáreas más se podrían haber talado en Valdivia según la información del siguiente gráfico?**




*Fuente: https://www.ciperchile.cl/2020/11/30/el-avance-de-la-desertificacion-las-22-mil-hectareas-de-bosque-nativo-que-conaf- aprobo-talar-sin-reforestar/*

1. Representa con una inecuación la expresión que permite saber cuántas hectáreas más se podrían haber talado en Valdivia.

$$544 + x < 600$$

En la que $x$ corresponde a la cantidad de hectáreas más que se podrían haber talado.

2. Resuelve la inecuación.

$$544 + x < 600$$
$$544 - 544 + x < 600 - 544$$ Restas 544 en ambos lados de la desigualdad.
$$x < 56$$

En Valdivia se podrían haber talado menos de 56 hectáreas.

### Ejemplo 2

1. ¿Cuántas hectáreas menos deberían haberse talado en Cauquenes para cumplir con la norma? Representa la situación a través de una inecuación.

$$2491 - x < 600$$
$$2491 - x + x < 600 + x$$ Se suma $x$ en ambos lados de la desigualdad.
$$2491 - 600 < 600 - 600 + x$$ Se quita 600 en ambos lados de la desigualdad.
$$1891 < x$$

2. En Cauquenes se talaron al menos 1891 hectáreas de más.

## Ejemplo 3

**Un vivero que busca apoyar la reforestación del sur de Chile señala que por cada planta nativa que venda, donará \$500 para la campaña de reforestación de su comuna. ¿Cuántas plantas nativas deben vender para que la donación sea mayor a \$60 000?**

1. Plantea la inecuación que relaciona los datos del problema.

Donación por cada planta nativa vendida → $\boxed{500} \cdot \boxed{x} > \boxed{60\,000}$ ← Mayor que \$60 000

Cantidad de plantas nativas vendidas

2. Resuelve la inecuación.

$$500 \cdot x > 60\,000$$
$$\frac{500}{500}x > \frac{60\,000}{500}$$
$$x > 120$$

Divides por 500 a ambos lados de la inecuación.

3. Comprueba el resultado. Para ello, evalúa la inecuación con un número cualquiera mayor que 120, por ejemplo, 130.

$$500 \cdot 130 > 60\,000$$
$$65\,000 > 60\,000$$

Es decir, se deben vender más de 120 plantas nativas para que la donación sea mayor a \$60 000.

## Aprende

- Una **inecuación lineal con coeficientes racionales** es una desigualdad que tiene una o más incógnitas y sus coeficientes son números racionales. Es una expresión matemática que describe cómo se relacionan entre sí dos expresiones lineales. Por ejemplo:

$$6 + 5x \geq 18 \qquad -2(x + 1) < -8 \qquad \frac{3x}{8} > 2 + \frac{x}{8}$$

- **Resolver una inecuación** es determinar el conjunto de números que satisfacen la desigualdad.
- Si se multiplican o se dividen ambos lados de una desigualdad por un mismo número negativo, **se cambia el sentido** de la desigualdad. Es decir:

$$a < b; c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \qquad a < b; c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

con $a, b, c \in \mathbb{Q}$

## Ejemplo 4

**Resuelve la inecuación $\frac{1}{4}x - \frac{5}{3}x + 1 > \frac{19}{2}$. Considera que $x$ es un número entero.**

$$12 \cdot \frac{1}{4}x - 12 \cdot \frac{5}{3}x + 12 \cdot 1 > 12 \cdot \frac{19}{2}$$

Calculas el mcm entre los denominadores, que en este caso es 12, y lo multiplicas por cada término de la desigualdad.

$$3x - 20x + 12 > 114$$

$$-17x + 12 > 114$$

$$-17x + 12 - 12 > 114 - 12$$

Restas 12 en ambos lados de la desigualdad.

$$-17x > 102$$

$$-17x \cdot (-1) > 102 \cdot (-1)$$

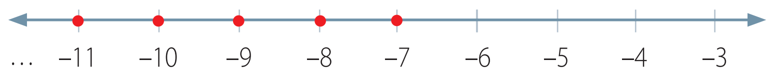
Multiplicas por –1 en ambos lados de la desigualdad, por lo que cambia el sentido.

$$17x < -102$$

Divides por 17 en ambos lados de la desigualdad.

$$x < -6$$

La solución también la puedes representar gráficamente en la recta numérica.



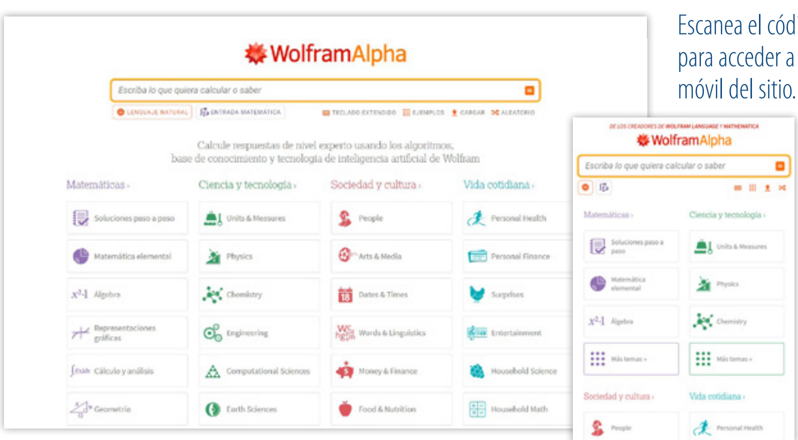

¿Por qué no se marcó el número –6 en la recta numérica? Comenta con tus compañeros.

## Herramientas tecnológicas

**Utilizando *WolframAlpha*, puedes resolver diversos problemas matemáticos. A continuación, se muestra cómo resolver inecuaciones.**

**1.** Ingresa al sitio www.wolframalpha.com

**2.** En la barra escribe la inecuación que se resolverá, por ejemplo: $3x + 5 > \frac{9}{2}$, y luego presiona Enter.




Escanea el código QR, para acceder a la versión móvil del sitio.

Considera lo siguiente:

- Para escribir fracciones se debe usar el símbolo «/».
- Para la coma decimal, debes escribir un punto.

BDA U2_ACT_5 Y 6

Lección 2

# Funciones

## Concepto y representación de una función

El fundador de **Pavegen**, Laurence Kemball-Cook, desarrolló un sistema tecnológico que transforma los pasos de las personas sobre una plataforma en energía eléctrica. El diseño triangular maximiza la salida de energía y la captura de datos. La energía se genera cuando una pisada comprime la placa entre los 5 mm y los 10 mm. Esta energía se almacena en baterías que pueden alimentar luces u otros aparatos.

*reset.org/Lydia Skrabania*

*Wikimedia Commons/Fotodios*

Junto con un grupo de compañeros, respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Qué figuras geométricas tienen las plataformas para generar electricidad? ¿Por qué utilizan estas figuras?
2. Investiguen acerca de la tecnología de la empresa Pavegen y elaboren una propuesta para generar electricidad en el colegio a través de los pasos de los estudiantes y profesores. Pueden leer más visitando la pagina web ingresando al código QR:
3. ¿Dónde consideran que es más conveniente ubicar las plataformas para generar electricidad a través de los pasos? Lee más en:

**Ejemplo 1**

**El proyecto de Pavegen señala que un solo paso genera una energía suficiente para encender una lámpara LED durante 30 segundos.**

**a.** Calcula cuánto tiempo puede estar encendida una lámpara LED conectada al piso de un aeropuerto, donde se contabilizaron 1 200 pasos en un intervalo de tiempo.

**1** De acuerdo con la información, un paso permite encender una lámpara durante 30 segundos, entonces, se tiene:

$$1\,200 \cdot 30 = 36\,000$$

Luego, 1 200 pasos permiten encender una lámpara LED durante 36 000 segundos.

**2** Transforma los 36 000 segundos a horas.

60 segundos = 1 minuto

$$\frac{36\,000}{60} = 600$$

60 minutos = 1 hora

$$\frac{600}{60} = 10$$

Por lo tanto, los 1 200 pasos registrados en el aeropuerto permiten mantener encendida una lámpara LED durante 600 minutos, lo que equivale a 10 horas de encendido.

**b.** Formula una expresión que permita calcular la cantidad de tiempo que puede estar encendida una lámpara LED según la cantidad de pasos.

**1** Construye una tabla con los datos.

| Cantidad de pasos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo de encendido (segundos) | $1 \cdot 30 = 30$ | $2 \cdot 30 = 60$ | $3 \cdot 30 = 90$ | $4 \cdot 30 = 120$ | $5 \cdot 30 = 150$ |

**2** Considera que $x$ es la cantidad de pasos y $T$ el tiempo en segundos que puede estar la lámpara encendida, entonces:

$$x \cdot 30 = T$$

**Aprende**

Para determinar la expresión que modela una situación, es conveniente registrar los valores en una tabla y así poder relacionar las variables.

**Herramientas tecnológicas**

Para reforzar el concepto y representación de una función, puedes utilizar el siguiente recurso: *https://www.geogebra.org/m/avbezemm*

## Ejemplo 2

**En una máquina se ingresa un número y sale otro según la indicación dada. Observa la imagen y completa la tabla.**


| Entrada $x$ | 1 | 2 | 4 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| Salida $y$ | ? | ? | ? | ? |

1. Calcula según la instrucción y el valor de entrada

Entrada 1 ▶ $2 \cdot 1 - 1 = 1$ Entrada 4 ▶ $2 \cdot 4 - 1 = 7$

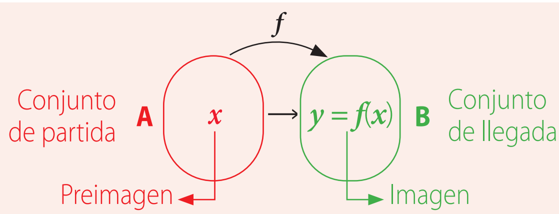
Entrada 2 ▶ $2 \cdot 2 - 1 = 3$ Entrada 15 ▶ $2 \cdot 15 - 1 = 29$

2. Completa la tabla.

| Entrada $x$ | 1 | 2 | 4 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| Salida $y$ | 1 | 3 | 7 | 29 |

## Aprende

Una **función** $f$ de un conjunto $A$ en un conjunto $B$ ($f: A \to B$) es una relación que asocia a cada elemento $x$ de $A$ un único elemento $y$ de $B$.




## Ejemplo 3

**Como proyecto de una municipalidad, se han instalado bicicletas estáticas para cargar teléfonos móviles. Por cada hora de pedaleo, a mediana velocidad, se pueden cargar cuatro teléfonos. Formula una expresión que calcule la cantidad de teléfonos que se pueden cargar según las horas de pedaleo.**

1. Construye una tabla para organizar los datos.

| Horas de pedaleo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de teléfonos cargados | $4 \cdot 1 = 4$ | $4 \cdot 2 = 8$ | $4 \cdot 3 = 12$ | $4 \cdot 4 = 16$ | $4 \cdot 5 = 20$ |

2. Determina la expresión que modela la situación. Considera que $x$ representa las horas de pedaleo e $y$ la cantidad de teléfonos cargados.

$$y = 4 \cdot x$$

## Aprende

- Una **función** es una relación entre dos variables $x$ e $y$ números racionales de manera que a cada valor de $x$, llamado **preimagen**, le corresponde un único valor de $y$, llamado **imagen**.
- Como el valor de $y$ depende del valor de $x$, se dice que $y$ es la **variable dependiente** y $x$ la **variable independiente**.
- La variable $y$ puede también escribirse como $f(x)$, en que $x$ es la otra variable, y se lee "$f$ de $x$". Por ejemplo, la función $y = 150 + 25x$ también se puede escribir como $f(x) = 150 + 25x$.

## Ejemplo 4

**Daniel vende electrodomésticos. Su sueldo fijo mensual es de \$500 000, y por cada unidad vendida recibe una comisión de \$12 000. ¿Cuál será el sueldo de Daniel si vende 14 electrodomésticos durante un mes? ¿Cuál es la expresión que modela la situación?**

1. Construye una tabla para representar los datos.

| Cantidad de electrodomésticos vendidos | Sueldo (\$) |
|---|---|
| 1 | $500\,000 + 12\,000 \cdot 1 = 512\,000$ |
| 2 | $500\,000 + 12\,000 \cdot 2 = 524\,000$ |
| 3 | $500\,000 + 12\,000 \cdot 3 = 536\,000$ |

2. Calcula el sueldo de Daniel si vende 14 electrodomésticos.

$$500\,000 + 12\,000 \cdot 14 = 668\,000$$

3. Representa con $y$ el sueldo recibido por Daniel al vender $x$ electrodomésticos y determina la expresión que modela la situación.

$$y = 500\,000 + 12\,000x$$

## Ejemplo 5

**¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar la relación entre los valores de $x$ e $y$ que se muestra en la siguiente tabla?**

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |

Observa que los números correspondientes a la variable $y$ son números impares. Luego, puedes notar que comienzan en 5, por lo que la expresión que modela la relación de las variables es:

$$y = 2x + 3$$

**Ejemplo 6**

Representa la función $f$ que relaciona los números enteros con su sucesor.

### Tabla

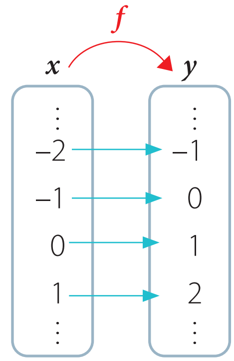
Al representar la función $f$ en una tabla de valores obtienes:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Preimágenes $x$ | ... | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | ... |
| Imágenes $y$ | ... | $-1$ | 0 | 1 | 2 | ... |

Nota: Tanto las pre imágenes como las imágenes pertenecen al conjunto $Z$

### Diagrama

En un diagrama sagital puedes relacionar los elementos por medio de flechas desde el conjunto de partida al conjunto de llegada.




### Expresión algebraica

Puedes representar la función $f$ con una expresión algebraica.

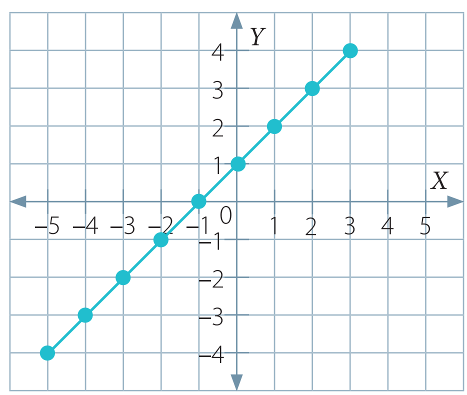
Si $x$ representa un número entero, la expresión $x + 1$ representa a su sucesor.

$$\boxed{y = x + 1}$$

### Gráfico

Para representar una función en el plano cartesiano, los valores de $x$ se representan sobre el eje horizontal o de las abscisas ($X$), y los valores de $y$ se representan sobre el eje vertical o de las ordenadas ($Y$).

La representación gráfica de la función $f$ es el conjunto de pares ordenados $(x, y)$ que satisfacen $y = f(x)$.

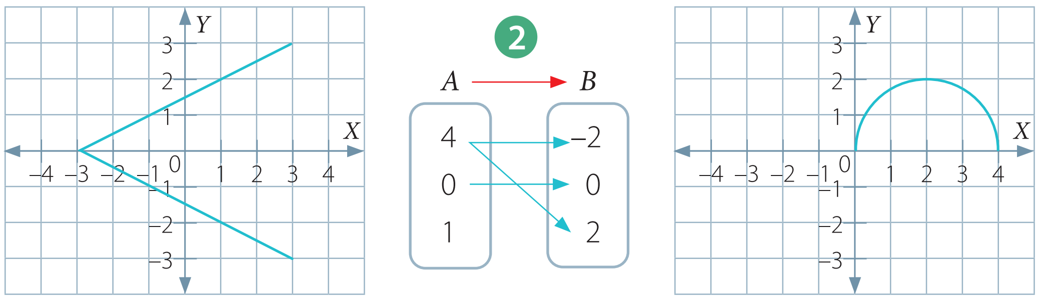


## Aprende

- Se llama **dominio** de una función $f$ ($Dom(f)$) al conjunto de valores que la variable $x$ puede tomar, es decir, el conjunto de las preimágenes.
- Se llama **recorrido** de una función $f$ ($Rec(f)$) al conjunto de las imágenes $y$, es decir, todos los valores que resultan al reemplazar los valores del dominio en la función $f$.

## Ejemplo 7

**¿Cuál de las siguientes representaciones corresponde a una función?**

1  3


1. El primer gráfico no representa una función, ya que para cualquier valor de $x$ entre –3 y 3 existen 2 valores de $y$ a los que está relacionado. Por ejemplo, para $x = 1$, $y$ toma los valores de 2 y –2.
2. El diagrama no representa una función, ya que el valor de 4 en $A$ está relacionado con los dos valores en $B$, –2 y 2, además el valor 1 en $A$ no está relacionado con ningún valor en $B$.
3. El último gráfico representa una función, ya que para todo valor de $x$ entre 0 y 4 existe un único valor de $y$.

## Ejemplo 8

**El valor general de las entradas para una obra de teatro es de \$4 500 y la capacidad máxima del teatro es para 150 personas. ¿Cuál es el dominio y cuál el recorrido de la función que modela la cantidad de asistentes y la recaudación de dinero?**

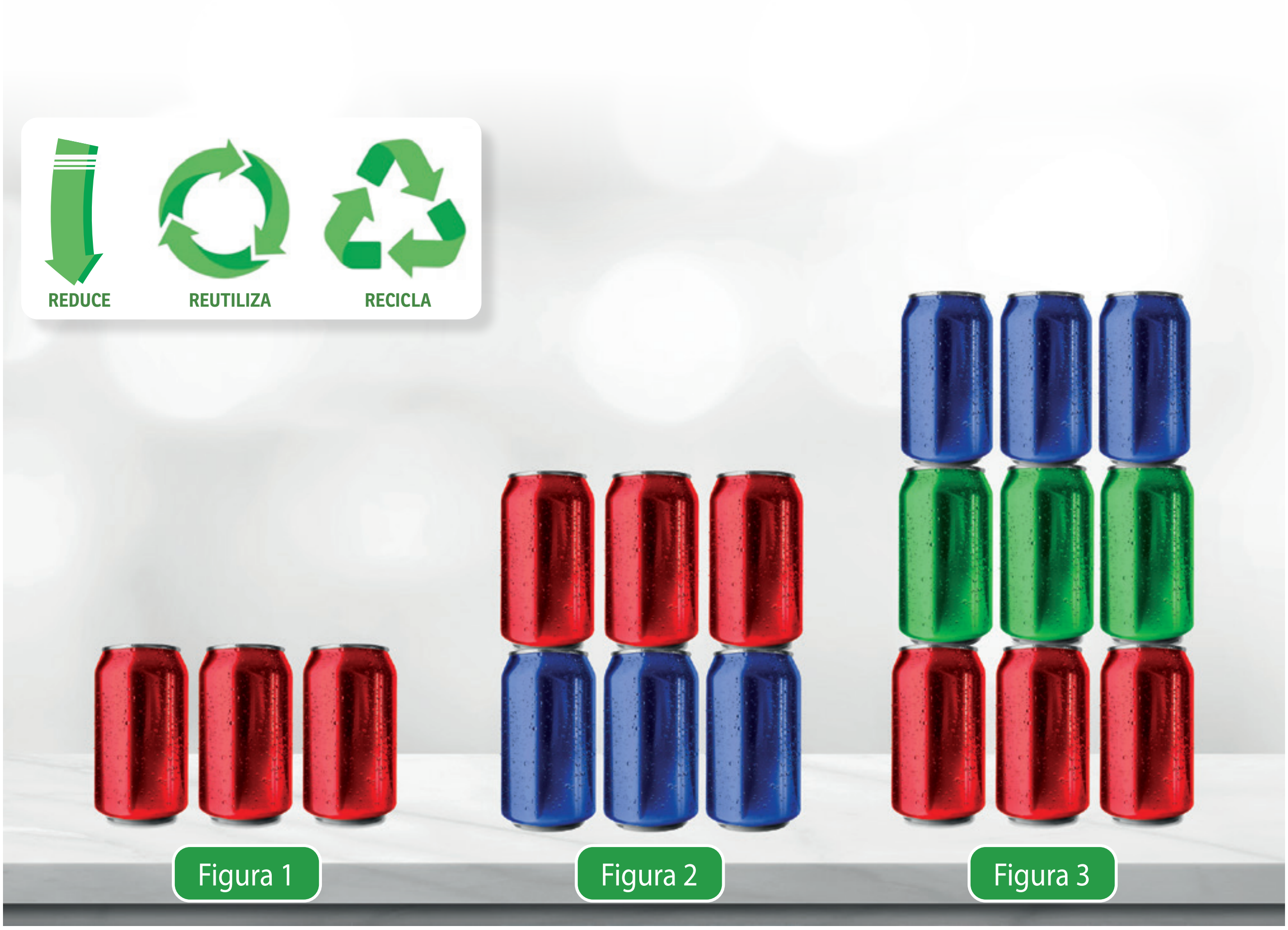
1. La regla que define a la función que modela esto es $f(x) = 4\,500x$, en que la variable independiente $x$ es la cantidad de personas que asisten al teatro y la variable dependiente $y$ es la recaudación de dinero en pesos.
2. Como $x$ representa la cantidad de personas, los valores que puede tomar van desde 0 a 150, y al reemplazarlos en la función resultan los valores de $y$, es decir, $4\,500 \cdot 0; 4\,500 \cdot 1; \ldots, 4\,500 \cdot 150$.
3. Luego, el dominio y el recorrido de la función están dados por:

$$Dom(f) = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 150\}$$
$$Rec(f) = \{0, 4\,500, 9\,000, \ldots, 675\,000\}$$

BDA U2_ACT_7

# Función lineal

La profesora de Artes Visuales pidió a sus estudiantes que, en grupos, construyeran obras tridimensionales con materiales reciclados. Un grupo confeccionó figuras con latas de bebidas y las puso por distintas partes del colegio a modo de intervención y como un llamado a seguir la regla de las 3R: reducir, reutilizar y reciclar. A continuación, se muestran las primeras tres figuras:




Responde las siguientes preguntas y comenta con tu curso:

1. ¿Cómo crees que afecta al ser humano y a otras especies los deshechos producidos y lanzados al mar o a los vertederos?
2. ¿Crees que estas prácticas contribuyen al aumento de temperatura de la Tierra?
3. ¿Cómo podemos mejorar nuestras prácticas para mitigar los efectos dañinos al planeta?

## Ejemplo 1

**Si se construyeran muchas figuras siguiendo el patrón de la situación anterior, ¿cuántas latas se ocuparían para formar la figura 70?**

1. Construye una tabla considerando que las figuras siguen un patrón.

| Número de la figura | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de latas | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |

2. Determina la función que modela esto considerando que $x$ es el número de la figura y $f(x)$ la cantidad de latas utilizadas.

$$f(x) = 3x$$

3. Reemplaza en la función el valor de $x$ pedido y responde.

$$f(70) = 3 \cdot 70$$
$$f(70) = 210$$

Luego, para formar la figura 70 se utilizarían 210 latas.

¿Crees que es importante implementar la regla de las 3R en tu vida cotidiana? ¿Por qué?

## Ejemplo 2

**Sea $f(x) = 3 \cdot x$**

**Comprueba que: $f(4) = f(1) + f(3)$**

1. Calculamos los valores de cada una de las funciones involucradas:

$$f(4) = f(1) + f(3)$$

2. Resolvemos y comparamos los valores en la igualdad:

$$3 \cdot 4 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3$$
$$12 = 3 + 9$$
$$12 = 12$$

3. De acuerdo con lo anterior, cuando $f(x) = 3 \cdot x$ se cumple que:

$$f(4) = f(1) + f(3)$$

Más adelante buscaremos generalizar el resultado encontrado.

## Ejemplo 3

**Se tiene un proyector que duplica el tamaño de las letras del documento que presenta. Si se quiere aumentar seis veces el tamaño original de las letras de un escrito, ¿cuánto se deben aumentar previamente las letras para conseguir este resultado?**

1. El tamaño original del documento se relaciona de manera directamente proporcional con el tamaño en la proyección, por lo tanto, podemos representar la función que modela la proyección del documento.

$f(x) = 2 \cdot x$ ........ Función que **duplica** el tamaño de las letras.

2. Si $x$ representa el tamaño original de las letras y $a$ el tamaño con el aumento previo para que en la proyección el tamaño sea 6 veces el del original, analizamos la siguiente igualdad:

$f(x) = 6 \cdot x = 3 \cdot 2 \cdot x \blacktriangleright a = 3 \cdot x$ ........ El **triple** del tamaño de las letras.

3. El tamaño original debe triplicarse para obtener una proyección en la que el tamaño de las letras sea 6 veces el del original.

## Ejemplo 4

**Se tiene la función $f$ definida como $f(x) = 16x$. Si $a$, $b$ y $c$ son números cualquiera, verifica que:**

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$$

1. Calcula el valor de $f(a + b)$ y $f(c \cdot x)$ aplicando propiedades numéricas.

$$f(a + b) = 16(a + b) = \underbrace{16a + 16b}_{\text{Propiedad distributiva}} \qquad f(c \cdot x) = 16(c \cdot x) = \underbrace{c(16 \cdot x)}_{\text{Propiedad asociativa}}$$

2. Calcula $f(a) + f(b)$ y $c \cdot f(x)$.

$$f(a) + f(b) = 16a + 16b$$
$$c \cdot f(x) = c(16 \cdot x)$$

3. Verifica que los resultados obtenidos en 1 coincidan con los obtenidos en 2.

Luego, se cumple que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ y que $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$.

## Aprende

Una **función lineal** $f$ es una función que puede escribirse de la forma: $f(x) = mx$, con $m \neq 0$.

Una función lineal cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad aditiva: $f(x + z) = f(x) + f(z)$.
- Propiedad homogénea: $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$, con $c \neq 0$.

## Conecto con Ciencias Naturales

**En un estudio científico se indica que la temperatura media de la tierra aumenta en un grado en el período de un siglo. Es decir, que cada 100 años la temperatura aumenta en 1 °C. De acuerdo con esta información, determina cuántos grados, aproximadamente, aumentó el índice de temperatura entre los años 1960 y 2000.**

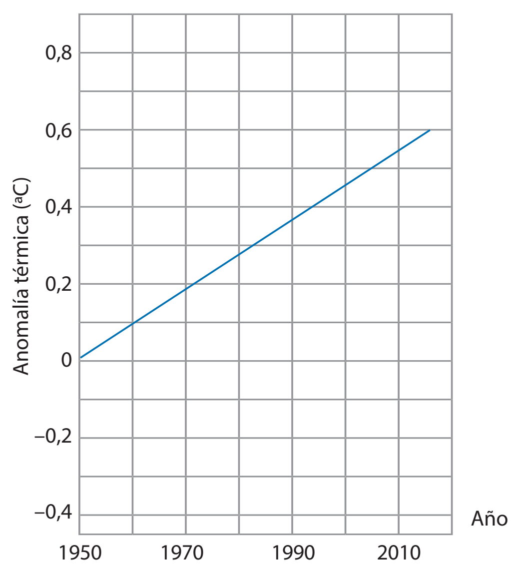
1. Calcula cuántos grados aumentaría la temperatura en un año.

   Aumento de temperatura en un año $\rightarrow \frac{1}{100} = 0{,}01$

   Es decir, cada año, la temperatura global aumenta 0,01 °C.

2. Puedes utilizar el gráfico para observar la tendencia lineal (línea azul) en el aumento del índice de la temperatura.

ÍNDICE DE LA TEMPERATURA GLOBAL (TIERRA Y MAR)




3. Determina la función que representa este hecho y responde la pregunta.

$$f(x) = 0{,}01 \cdot x$$

En la que $f(x)$ corresponde al aumento aproximado del índice de temperatura en $x$ años.

Luego, como de 1960 al 2000 han transcurrido 40 años, se tiene que:

$$f(x) = 0{,}01 \cdot x$$
$$f(x) = 0{,}01 \cdot 40$$
$$f(x) = 0{,}4$$

Entonces, entre los años 1960 y 2000 el índice de temperatura aumentó, aproximadamente, 0,4 °C.

**Ejemplo 5**

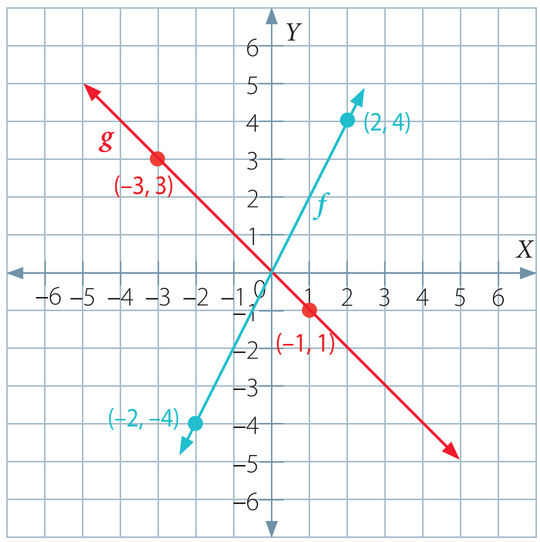
**Determina si las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = -x$ representan un crecimiento o un decrecimiento. ¿Qué punto tienen en común?**

**1** Construye una tabla de valores para cada función.

| $x$ | $-2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-4$ | $0$ | $4$ |

| $x$ | $-3$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $3$ | $0$ | $-1$ |

**2** Grafica ambas funciones en el plano cartesiano.




**3** Al observar la representación gráfica de la función $f$, es posible notar que los valores $f(x)$ crecen a medida que los de $x$ aumentan. Del mismo modo, los valores de $g(x)$ disminuyen a medida que los de $x$ aumentan. Además, se verifica que en $f(x) = 2x$, $m = 2$, que es mayor que cero, por lo que $f$ es creciente; y en $g(x) = -x$, $m = -1$, que es menor que cero, por lo que $g$ es decreciente.

El punto que tienen en común ambas funciones es el punto (0, 0).

## Aprende

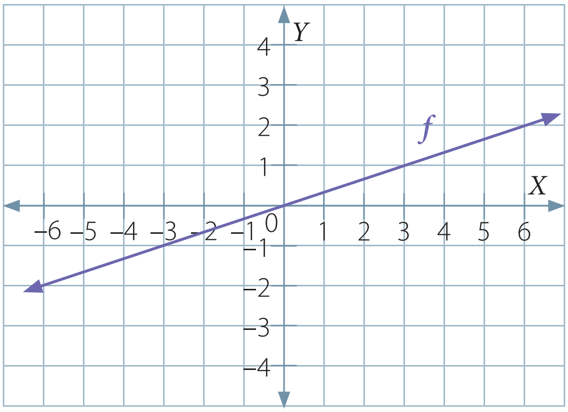
La gráfica de una **función lineal** $f(x) = m \cdot x$, con $x \in \mathbb{R}$, corresponde a una recta que pasa por el origen $O(0, 0)$.

- El valor $m$ representa la **pendiente de la recta**. Si $m > 0$, la función es creciente, y si $m < 0$, la función es decreciente, si $m = 0$ la función es constante.
- Si se conocen dos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ que pertenecen a la gráfica de la función $f$, la pendiente $m$ se puede calcular de la siguiente forma:

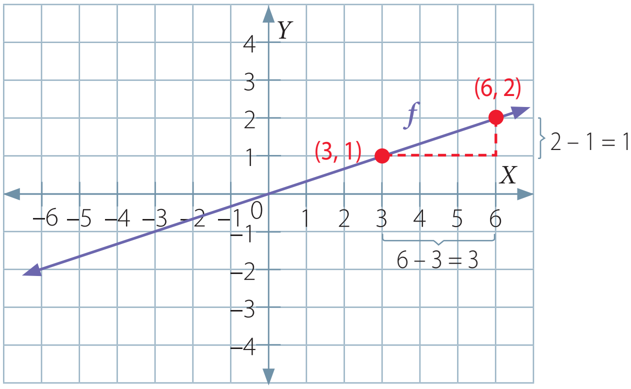
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1,\ \neq 0$$

## Ejemplo 6

Determina si el punto (12, 4) pertenece a la gráfica de la función lineal $f$.




**1** Ubica dos puntos que pertenezcan a la gráfica de la función. En este caso, los puntos son (3, 1) y (6, 2).




**2** Determina el valor de $m$ y representa la función lineal $f$ como $f(x) = m \cdot x$.

$$m = \frac{(2 - 1)}{(6 - 3)} = \frac{1}{3}$$

Diferencia entre las ordenadas de los puntos.

Diferencia entre las abscisas de los puntos.

Luego, $f(x) = \frac{1}{3}x$

**3** Verifica si $f(12) = 4$.

$$f(12) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

Por lo tanto, el punto (12,4) pertenece a la gráfica de $f$.

### Aprende

Para determinar si un par ordenado $(x, y)$ pertenece a la gráfica de una función, se debe cumplir que $f(x) = y$.

Por ejemplo, para verificar que (2, 7) pertenece a la gráfica de $f(x) = 5x - 3$, se debe comprobar que $f(2) = 7$. Es decir, $f(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7$.

BDA U2_ACT_8

# Función afín

Debido a las emisiones de dióxido de carbono ($CO_2$) generadas por las actividades humanas, las concentraciones de $CO_2$ en la atmósfera están aumentando aceleradamente. Datos recientes de la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica de los Estados Unidos (NOAA) muestran un aumento brusco en los niveles globales de $CO_2$.

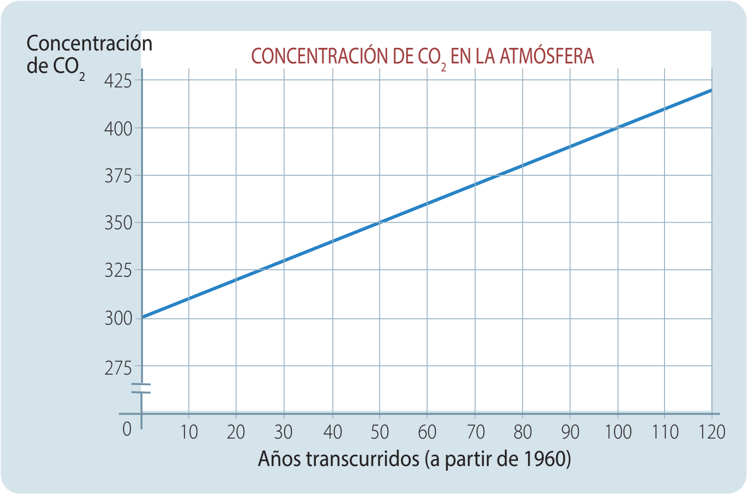
En abril de 2020, la concentración promedio de $CO_2$ en la atmósfera fue de 420 partes por millón (ppm), mientras que a principios de los 60, antes de la industrialización, se contabilizaban 300 ppm, que se mantenían, hasta ese entonces, constantes.


Wikimedia Commons

**Responde las siguientes preguntas:**

1. ¿Cómo crees que afectan al ser humano y a otras especies las altas concentraciones de dióxido de carbono en la atmósfera?
2. ¿Cuáles actividades humanas contribuyen al aumento de las concentraciones de dióxido de carbono en la atmósfera?
3. Investiga qué podemos hacer para detener el aumento de las concentraciones de $CO_2$.

## Ejemplo 1




Analizando el gráfico, completa la siguiente tabla y luego responde:

| Años transcurridos (a partir de 1960) | 0 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|
| Concentración de $CO_2$ (en ppm) | 300 | 350 | 400 |

**a.** ¿Cuál es la pendiente de la recta?

Considera los puntos (0, 300) y (50, 350) y calcula la pendiente.

$$m = \frac{350 - 300}{50 - 0} = \frac{50}{50} = 1$$

**b.** ¿Con cuál función puedes modelar la cantidad de dióxido de carbono con los años?

Considera que:

$$f(x) \Rightarrow \text{Concentración } CO_2$$
$$x \Rightarrow \text{Años transcurridos}$$

Luego, la función buscada es:

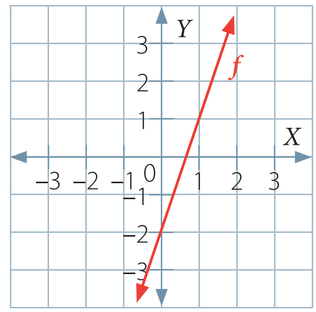
$$f(x) = x + 300$$

### Aprende

Una **función afín** es una función de la forma $f(x) = mx + c$, con $x, m, c \in \mathbb{R}$ y $m$ y $c$ distintos de cero. La constante $m$ es la **pendiente** y $c$ el **coeficiente de posición**, el cual corresponde al punto $(0, c)$, que está en el eje $Y$ y por donde pasa su gráfica.

## Ejemplo 2

**Representa algebraicamente la función mostrada en el gráfico.**




1. La función $f$ es afín, porque no pasa por el origen, por lo tanto podemos representarla como $f(x) = mx + c$. Luego, como la gráfica de la función corta al eje $Y$ en el punto $(0, -2)$, el valor de $c$ es $-2$.

2. Reemplazamos el valor de $c$ en la expresión:

$$f(x) = mx + (-2)$$

3. Como el punto $(1, 1)$ pertenece a su gráfica se cumple que $f(1) = 1$

$$f(1) = m \cdot 1 + (-2) = 1 \blacktriangleright m + (-2) = 1 \blacktriangleright m = 3$$

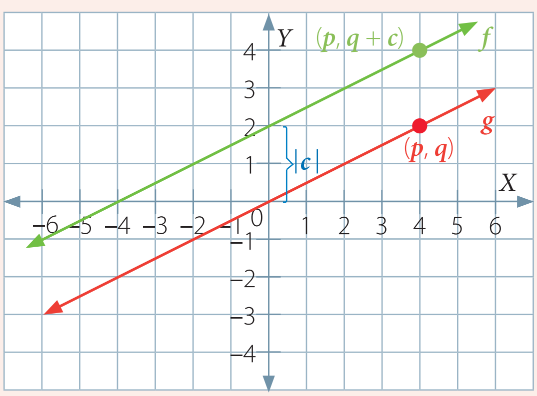
Entonces, $f(x) = 3x + (-2)$, o bien $f(x) = 3x - 2$.

¿En qué se diferencian la gráfica de la función afín con la gráfica de la función lineal?

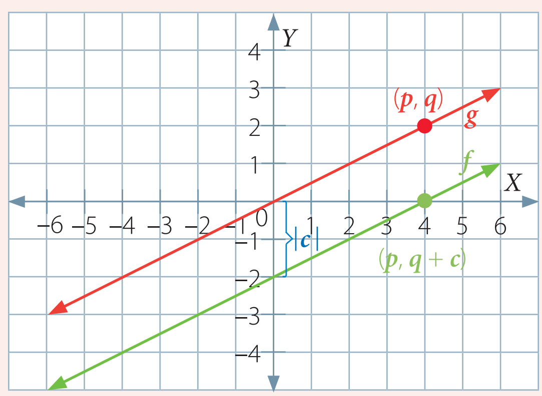
## Aprende

Una **función afín** $f(x) = mx + c$, con $x, m, c \in \mathbb{R}$ y $m$ y $c$ distintos de cero, se puede **representar** como la gráfica de una función lineal $g(x) = mx$ trasladada $c$ unidades hacia arriba o hacia abajo según corresponda.

- Si $c > 0$




- Si $c < 0$




En una función afín de la forma $f(x) = mx + c$ se tiene que:

- Si $m \neq 0$ y $c = 0$, la función $f$ es una función lineal.
- Si $m = 0$ y $c \neq 0$, la función $f$ es una función constante, es decir, para todo $x \in Dom(f)$ se tiene que $f(x) = c$.

Ejemplo 3

## Conecto con Educación Física y Salud

En un colegio se quiere analizar la relación entre la edad de los estudiantes y la distancia de salto largo sin impulso que alcanzan. Para ello, se considera un grupo de estudiantes y se mide la distancia horizontal de salto sin impulso. Los resultados se registraron en la siguiente tabla y gráfico:

| Edad (años) | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Salto (m) | 1,18 | 1,20 | 1,26 | 1,30 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,50 | 1,53 |


¿Es correcto concluir que existe una relación lineal entre la edad de un estudiante y la distancia que alcanza en salto largo?, ¿por qué?

Traza una recta que se aproxime a los puntos para observar si existe relación.


Puedes observar que existe una relación lineal entre la edad de los estudiantes y la distancia que alcanzan en salto largo sin impulso. Como se puede apreciar, a medida que aumenta la edad, aumenta también la distancia del salto, y la pendiente es casi constante entre dos puntos cualesquiera de los registros.

## Ejemplo 4

**En un experimento, una sustancia que se encuentra a 10 °C aumenta su temperatura a razón de 3 °C por minuto. Si $f$ representa la temperatura de la sustancia y $t$ los minutos transcurridos, ¿cuál es el valor de $c$ si se sabe que $f(t + 1) = f(t) + c$?**

1. Representa la función $f$ que modela la situación.

Temperatura inicial $f(t) = \boxed{10} + \boxed{3t}$ Aumento de temperatura por minuto.

2. Representa la expresión algebraica para $f(t + 1)$.

$$f(t + 1) = 10 + 3(t + 1) = 10 + 3t + 3 \cdot 1 = 13 + 3t$$

3. Calcula el valor de $c$.

$f(t + 1) = f(t) + c$ ▶ $c = f(t + 1) - f(t) = 13 + 3t - (10 + 3t) = \boxed{3}$ Cambio de temperatura por minuto.

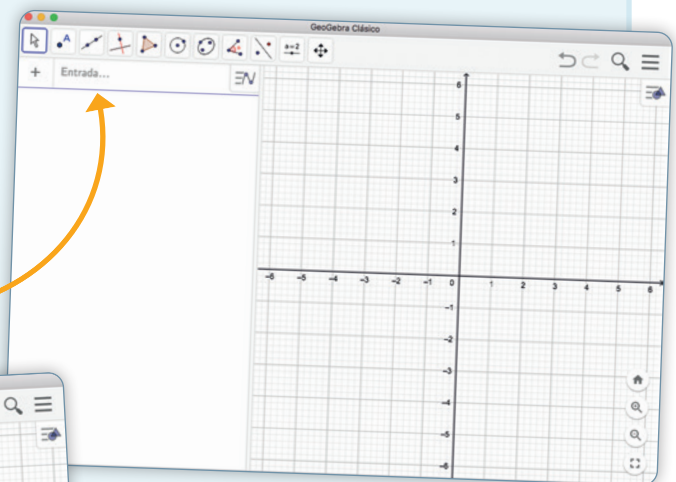
Luego, se tiene que $c = 3$.

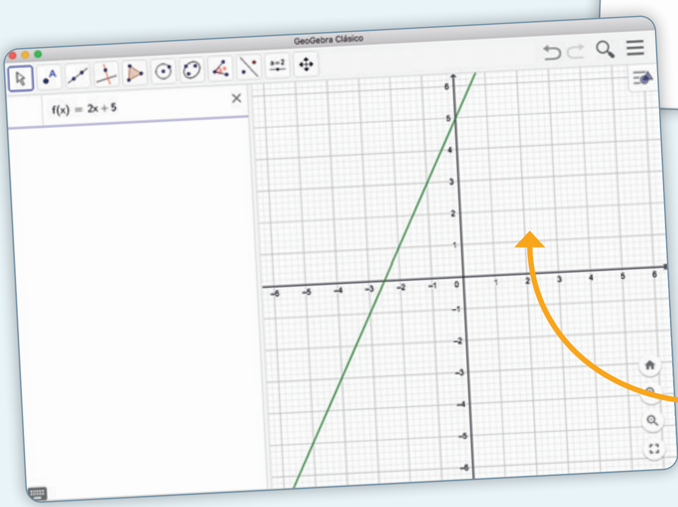
## Herramientas tecnológicas

**Para representar la gráfica de una función lineal o afín se puede utilizar el programa *GeoGebra*.**

1. Ingresa al sitio *https://www.geogebra.org/graphing*

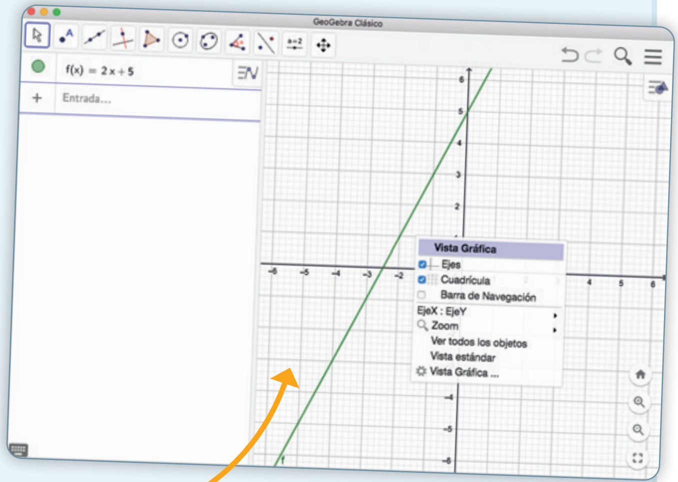
2. Escribe la función lineal o afín que quieras en la sección «Entrada», ubicada en la parte superior de la ventana. Por ejemplo $f(x) = 2x + 5$.

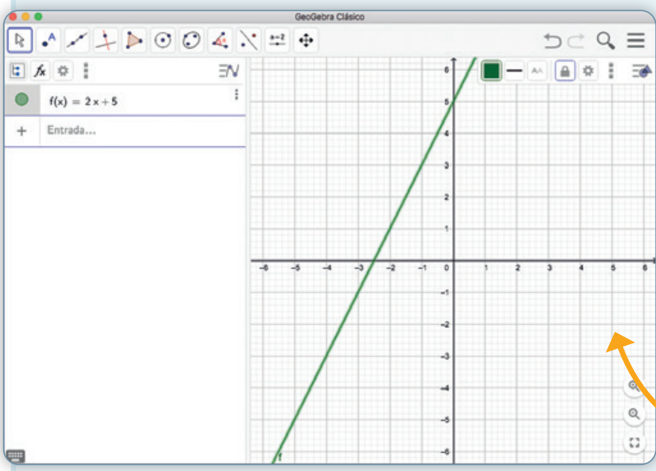



3. Una vez ingresada, presiona *Enter* y observa la gráfica que aparece.

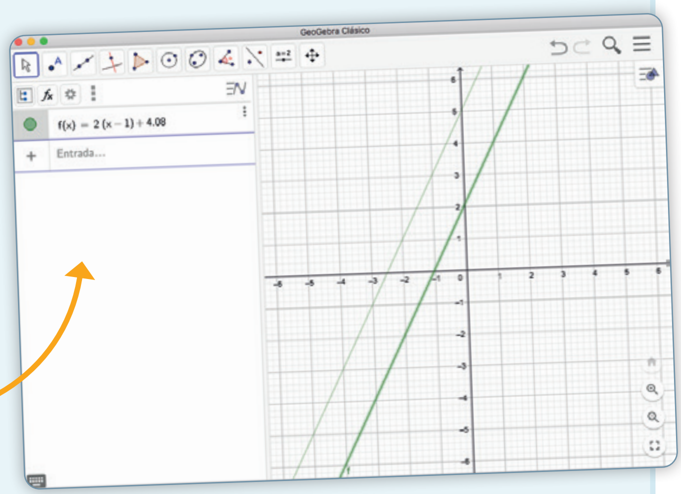
4. Haz clic con el botón derecho del *mouse* sobre el plano cartesiano para acceder a las opciones de apariencia del plano cartesiano, como ejes, cuadriculado, *zoom*, entre otras.




5. Haz clic con el botón derecho del *mouse* sobre la función para acceder a las opciones de apariencia y propiedades del objeto, en este caso, la función.

6. presionado el botón derecho o izquierdo del *mouse* sobre la función. Observa que la expresión algebraica de la función cambia según varía la gráfica.




BDA U2_ACT_9

# Síntesis

## Unidad 2: Álgebra y funciones

### Lección 1 » Expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones

#### Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es aquella en que se combinan letras, números y operaciones.

Por ejemplo, al reducir la expresión $5x + y - 3y + 2x - 4y$ se tiene que:

$$\begin{aligned} 5x + y - 3y + 2x - 4y &= (5x + 2x) + (y - 3y - 4y) \\ &= 7x + (-6y) \\ &= 7x - 6y \end{aligned}$$

$x^3y - \boxed{4xy^2}$

Coeficiente numérico

Factor literal

Término algebraico

#### Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que contiene una o más incógnitas.

Por ejemplo, al resolver la ecuación $\frac{x}{4} + 1 = 13$ se tiene que:

$$\frac{x}{4} + 1 - 1 = 13 - 1$$ Restamos 1 en ambos lados de la igualdad.

$$\frac{x}{4} = 12$$

$$\frac{x}{4} \cdot 4 = 12 \cdot 4$$ Multiplicamos por 4 cada lado de la igualdad.

$$x = 48$$

#### Inecuaciones

Una inecuación lineal con coeficientes racionales es una desigualdad que tiene una o más incógnitas y sus coeficientes son números racionales.

Por ejemplo, al resolver la inecuación $5 + \frac{x}{2} < 10$ se tiene que:

$$5 - 5 + \frac{x}{2} < 10 - 5$$ Restamos 5 en ambos lados de la desigualdad.

$$\frac{x}{2} < 5$$

$$\frac{x}{2} \cdot 2 < 5 \cdot 2$$ Multiplicamos por 2 cada lado de la desigualdad.

$$x < 10$$

- ¿Qué fue lo que te produjo mayor dificultad?, ¿por qué crees que fue así?
- ¿En qué se diferencian las ecuaciones de las inecuaciones?
- ¿Qué dificultades tuviste para resolver ecuaciones e inecuaciones?

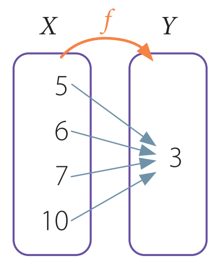
## Lección 2 » Funciones

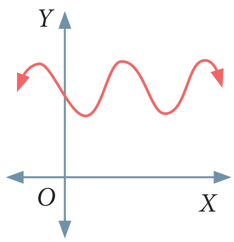
### Concepto y representación de una función

Una **función** es una relación entre dos variables, $x$ e $y$, de manera que a cada valor de $x$, llamado **preimagen**, le corresponde un único valor de $y$, llamado **imagen**.

Como el valor de $y$ depende del valor de $x$, se dice que $y$ es la **variable dependiente** y $x$ la **variable independiente**.

Por ejemplo, las siguientes representaciones corresponden a funciones:




### Función lineal

La gráfica de una función lineal $f(x) = m \cdot x$, con $m \neq 0$, corresponde a una recta que pasa por el origen $O(0, 0)$.

El valor $m$ representa la **pendiente de la recta**. Si $m > 0$, la función es creciente, y si m < 0, la función es decreciente.

Si se conocen dos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ que pertenecen a la gráfica de la función $f$, la pendiente $m$ se puede calcular de la siguiente forma:

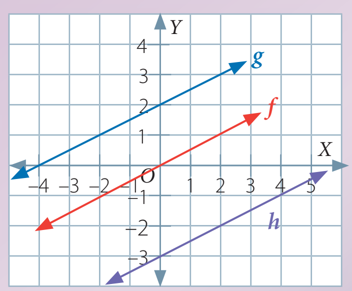
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1\ , \neq 0$$

- ¿Para qué puedes utilizar las funciones en la vida cotidiana?
- ¿Qué errores cometiste al identificar funciones?, ¿qué puedes hacer para no volver a cometerlos?
- ¿Qué más te gustaría saber sobre funciones? Explica.

### Función afín

Una **función afín** es de la forma $f(x) = m \cdot x + c$, $c \neq 0$. La constante $m$ es la **pendiente de la recta** y $c$ el **coeficiente de posición**.

Por ejemplo, en el siguiente gráfico, la función $f$ es una función lineal y las funciones $g$ y $h$ son funciones afines:




BDA U2_ACT_10,11 y 12

La cerámica de la cultura diaguita, se caracteriza especialmente por sus vasijas y cuencos pintados con diseños geométricos. Los motivos conforman diseños regulares y continuos bajo principios de simetría. Entre ellos destacan el zigzag, las ondas y cadenas. Estas se fabricaron para satisfacer prácticas como la cocción de alimentos, almacenamiento de agua, comida, y también para rendir culto a los dioses y a los difuntos. Las piezas utilitarias tenían diseños y decoraciones sencillas. En cambio, las funerarias eran decoradas con mayor pulcritud, ornamentación y figuras geométricas pintadas con engobes.

*Fuente: https://museo.precolombino.cl/2020/10/13/geometria-en-la-ceramica-diaguita/*

Wikimedia Commons/Jim cadwell

# Unidad 3 Geometría

**En esta unidad** estudiarás el teorema de Pitágoras, las transformaciones isométricas y aprenderás a calcular el área y volumen de prismas rectos y de cilindros.

## Para reflexionar

Reúnete con un grupo de compañeros y respondan las siguientes preguntas:

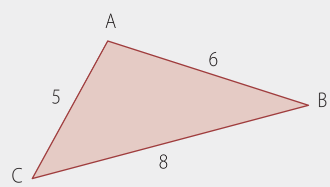
- ¿Qué figuras geométricas identifican en las vasijas de la imagen?
- Investiguen acerca del arte de la cultura diaguita y sobre su relación con los elementos de la geometría clásica. ¿Qué elementos estudiados reconocen en ella?
- ¿Qué aspectos de la geometría clásica es posible distinguir en los diseños diaguita? ¿Por qué?

## Conocimientos previos

Para abordar esta unidad, puedes repasar los siguientes contenidos:

- Perímetro de figuras.

  ¿Cuál es el perímetro del triángulo de la imagen?




  Se nos da un triángulo cuyos lados tienen las siguientes medidas:

  $\overline{AB} = 5$ $\quad\quad$ $\overline{BC} = 8$ $\quad\quad$ $\overline{CA} = 8$

  En este caso, el perímetro del triángulo, que es la suma de los **3** lados equivaldría a **19.**

- Cuadrados perfectos

  $2^2 = 4$ $\quad$ $3^2 = 9$ $\quad$ $4^2 = 16$ $\quad$ $5^2 = 25$

- Propiedades de potencias y operaciones combinadas.

$$7^2 \cdot 4^2 = (7 \cdot 4)^2 = 28^2$$

BDA U3_ACT_1, 2 y 15

Lección

# 1 Teorema de Pitágoras

## Teorema de Pitágoras

Esteban está aprendiendo el arte textil mapuche. Para esto, utiliza un telar con forma de cuadrado de lado 30 cm, como el de la fotografía, en el que primero realiza un tejido de fondo sobre el que colocará un anümka.

**Anümka** es el nombre que recibe el símbolo de la imagen, el que se encuentra presente en varios tejidos mapuche y con el cual se representa a las plantas de uso medicinal.

*Fuente: https://symbolikon.com/downloads/anumka-mapuche-symbols/*

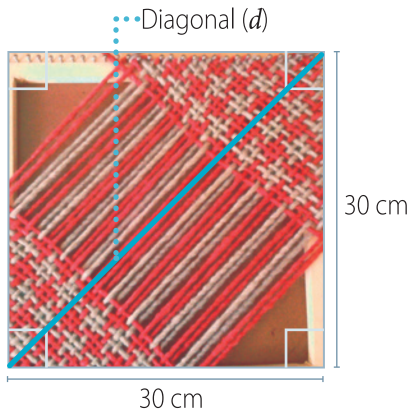
*Pinterest/Ruth Muñoz*

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Consideras que es importante aprender de la cultura de los pueblos originarios?, ¿por qué?
2. ¿Cuáles otros símbolos de la cultura mapuche conoces?

Ejemplo 1

Esteban quiere conocer la medida de la diagonal de su telar para así calcular las proporciones del anümka que tejerá. ¿Cuánto mide la diagonal del telar?




1. Se quiere calcular la medida de la diagonal para un cuadrado de 30 cm de lado. Para esto, puedes considerar la siguiente igualdad:

$$d^2 = 30^2 + 30^2$$

2. Resuelve.

$$d^2 = 30^2+30^2$$
$$d^2 = 900 + 900$$
$$d^2 = 1\ 800$$

3. Utiliza la raíz cuadrada para despejar la incógnita $d$.

$$d^2 = 1\ 800$$
$$d = \sqrt{1\ 800}$$
$$d \approx 42{,}4$$

Luego, la medida de la diagonal es 42,4 cm, aproximadamente.

**Herramientas** tecnológicas

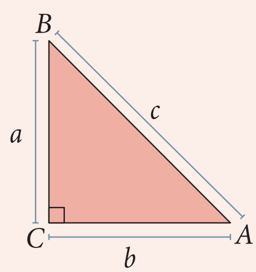
Para realizar los cálculos, puedes utilizar una calculadora *online* en el siguiente sitio:
*https://www.geogebra.org/scientific*

## Aprende

En un triángulo rectángulo, el **teorema de Pitágoras** establece que la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

En el triángulo $ABC$, $a$ y $b$ representan las medidas de los catetos y $c$ la medida de la hipotenusa.

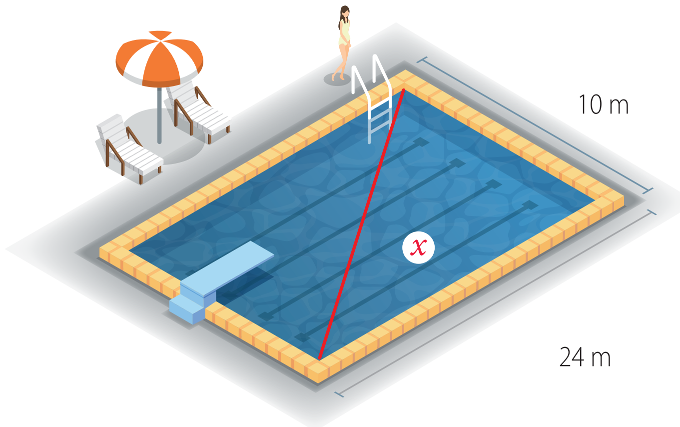
Si un trío de números naturales cumple con el teorema de Pitágoras, son llamados **trío pitagórico**.



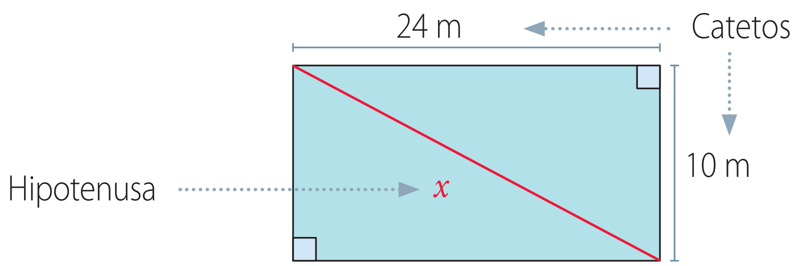

$$c^2 = a^2 + b^2$$

## Ejemplo 2

La piscina de la imagen es de forma rectangular y mide 24 m de largo y 10 m de ancho. ¿Cuál es la distancia máxima que puede nadar una persona si solo lo hace en línea recta?




1. Si solo puede nadar en línea recta, la distancia máxima ($x$) corresponde a la diagonal de la superficie de la piscina.




2. Nota que la diagonal de la piscina determina dos triángulos rectángulos.

3. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la diagonal ($x$) de la piscina.

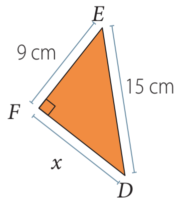
$$x^2 = 24^2 + 10^2$$
$$x^2 = 576 + 100$$
$$x^2 = 676$$
$$x = \sqrt{676}$$
$$x = 26$$

De esta forma, se tiene que la distancia máxima que se puede nadar en la piscina es de 26 m.

¿Qué pasos sigues al aplicar el teorema de Pitágoras?

## Ejemplo 3

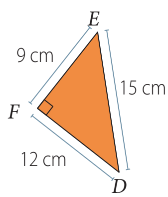
**Calcula el perímetro y el área del siguiente triángulo *DEF*:**




1. Dado que el triángulo es rectángulo, puedes utilizar el teorema de Pitágoras para determinar la medida del lado desconocido ($x$).

$$9^2 + x^2 = 15^2$$
$$81 + x^2 = 225$$
$$x^2 = 225 - 81$$
$$x^2 = 144$$
$$x = 12$$

2. Luego, como $x = 12$ cm, el triángulo queda:




3. Calcula el perímetro ($P$). Recuerda que el perímetro de un triángulo corresponde a la suma de las medidas de sus lados.

$$P = 9 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 15 \text{ cm}$$
$$P = 36 \text{ cm}$$

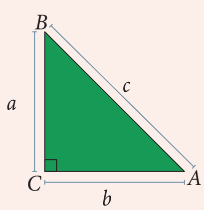
4. Calcula el área ($A$). Recuerda que el área de un triángulo es igual al producto entre la medida de la base y la altura, dividido por 2.

$$A = \frac{12 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm}}{2}$$
$$A = \frac{108}{2} \text{ cm}^2$$
$$A = 54 \text{ cm}^2$$

Entonces, el perímetro del triángulo *DEF* es 36 cm y su área, 54 cm$^2$.

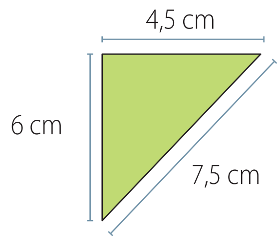
### Aprende

El **recíproco del teorema de Pitágoras** establece que si se tienen 3 segmentos de medidas $a$, $b$ y $c$ que cumplen con la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$, entonces, el triángulo formado por estos segmentos es un triángulo rectángulo.



## Ejemplo 4

**Determina si el siguiente triángulo $ABC$ es rectángulo:**




1. Para responder, puedes utilizar el recíproco del teorema de Pitágoras. Se debe cumplir que:

$$6^2 + 4{,}5^2 = 7{,}5^2$$

2. Resuelve y verifica si se cumple la igualdad.

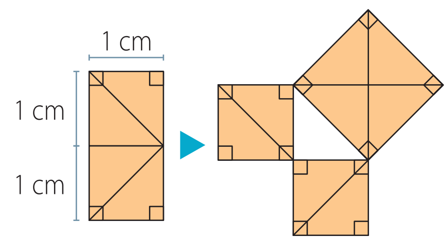
$$6^2 + 4{,}5^2 = 7{,}5^2$$
$$36 + 20{,}25 = 56{,}25$$
$$56{,}25 = 56{,}25$$

Entonces, se verifica que el triángulo $ABC$ es rectángulo.

## Ejemplo 5

**Explica la validez del teorema de Pitágoras.**

**Según las medidas del siguiente rectángulo, verifica que la suma de las áreas de los cuadrados que lo forman es igual al área del cuadrado de mayor de la imagen.**




1. Calcula el área ($A$) del rectángulo.

$$A = (2 \cdot 1)\ \text{cm}^2 = 2\ \text{cm}^2$$

2. Observa que el rectángulo está formado por 4 triángulos congruentes y el cuadrado de mayor tamaño está formado por 4 triángulos congruentes iguales a los que forman el rectángulo. Por lo tanto, su área es 2 cm$^2$ al igual que el rectángulo.

3. Los cuadrados de menor medida están formados por dos triángulos congruentes iguales a los que forman el rectángulo.

   Por lo tanto, el área de cada uno es igual a (2 : 2) cm$^2$, es decir, 1 cm$^2$.

4. Al sumar las áreas de los cuadrados de menor tamaño se verifica que el resultado es igual al área del cuadrado de mayor medida.

$$1\ \text{cm}^2 + 1\ \text{cm}^2 = 2\ \text{cm}^2$$

Área cuadrados pequeños. Área cuadrado grande.

Entonces, se verifica que la suma de las áreas de los cuadrados pequeños es igual al área del cuadrado de mayor tamaño.

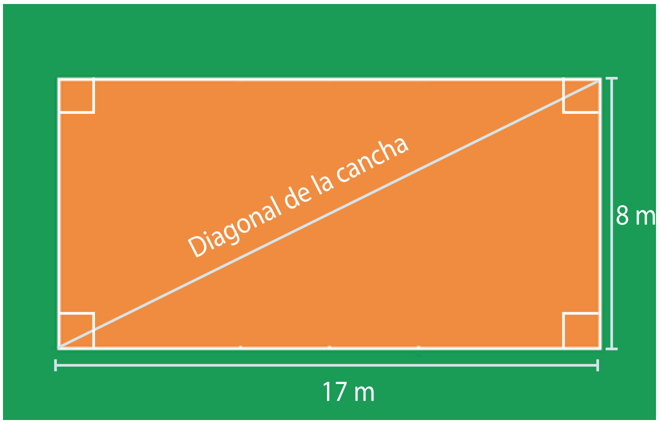
Ejemplo 6

## Conecto con Educación Física y Salud

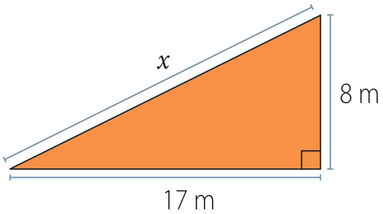
Para un campeonato escolar de vóleibol, el equipo *Marea Brava* ha entrenado todo el semestre en la cancha de su comuna, que por motivos de ubicación, mide un poco menos que una cancha normal de vóleibol.

El mejor saque del equipo tiene un alcance en diagonal con el balón, con el que generalmente pueden asegurar un punto porque la pelota va de un extremo de la cancha al otro, a gran velocidad, sin tocar la red, siendo muy difícil interceptarla por los oponentes.

Si la cancha en la que entrenó *Marea Brava* es rectangular y las medidas son las que se muestran en la imagen, ¿cuánto es el alcance máximo en diagonal que tiene el mejor saque?




1. Observa que la diagonal divide a la cancha en dos triángulos rectángulos congruentes.




2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de $x$.

$$x^2 = 17^2 + 8^2$$
$$x^2 = 289 + 64$$
$$x^2 = 353$$
$$x = \sqrt{353}$$
$$x \approx 18{,}8$$

El alcance máximo en diagonal que tiene el mejor saque de *Marea Brava* es de, aproximadamente 18,8 m.

BDA U3_ACT_3, 16 y 17

# Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Los **paneles solares** no emiten gases contaminantes ni generan residuos tóxicos, por lo que contribuyen a mitigar el calentamiento global y, además, son una alternativa para comunidades alejadas que no cuenten con energía eléctrica.

Estos paneles son un conjunto de células fotovoltaicas interconectadas que conforman un sistema capaz de transformar luz solar en energía eléctrica.

*Fuente: https://sabermas.umich.mx/archivo/tecnologia/133-numero-1755/268-paneles-solares-generadores-de-energia-electrica.html*

*Wikimedia Commons/ENERGÍA.GOV*

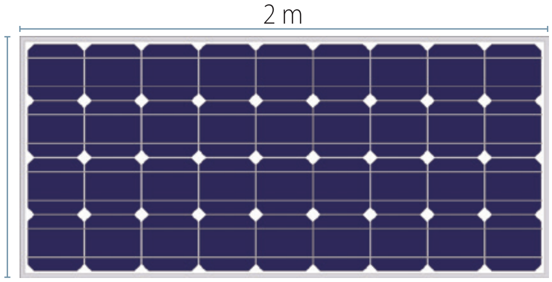
Piensa y comenta con tus compañeros.

1. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar la energía solar para generar energía eléctrica?
2. Averigüen qué tan factible es instalar paneles solares en tu colegio para generar energía eléctrica. ¿Creen que sería una buena opción para luchar contra el calentamiento global?

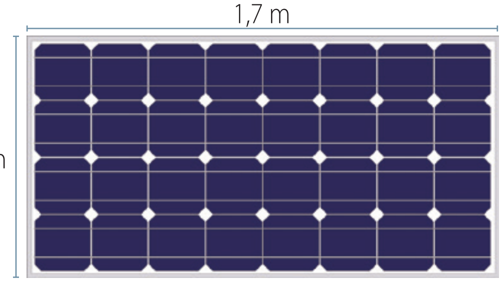
## Ejemplo 1

Daysi quiere instalar paneles solares en la casa de su familia para mitigar los efectos del cambio climático y ahorrar energía. Necesita cubrir un sector rectangular del techo, cuya diagonal mide 8 m. Daysi averigua y le ofrecen dos tipos de paneles, como los que se muestran en la imagen.

Opción 1

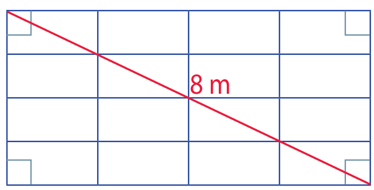



Opción 2




Si quiere instalar 16 paneles distribuidos en 4 filas, ¿qué opción debería comprar?

1. Puedes hacer un esquema del techo, para organizar los datos.




▶ 16 paneles

2. Aplica el Teorema de Pitágoras para calcular la medida de la diagonal ($d$) de cada panel.

Opción 1

$d_1^2 = 1^2 + 2^2$

$d_1^2 = 1 + 4$

$d_1^2 = 5$

$d_1 = \sqrt{5} \approx 2{,}2$

Opción 2

$d_2^2 = 1^2 + 1{,}7^2$

$d_2^2 = 1 + 2{,}89$

$d_2^2 = 3{,}89$

$d_2 = \sqrt{3{,}89} \approx 2$

3. Evalúa cuál opción es la adecuada para Daysi.

La diagonal de la superficie mide 8 m y corresponde a la medida de 4 diagonales del panel, entonces se tiene que:

Opción 1 ▶ 2,2 m • 4 = 8,8 m

Opción 1 ▶ 2 m • 4 = 8 m

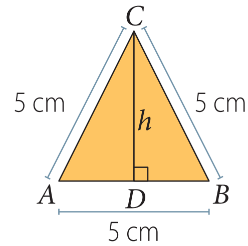
Luego, la **opción 2** es la que le sirve a Daysi, ya que la diagonal del panel mide, aproximadamente 2 m, y al multiplicar por 4 resulta en 8 m, que coincide con la medida del sector del techo donde se instalarán los paneles.

**Herramientas** tecnológicas

Para realizar los cálculos, puedes utilizar una calculadora *online* en el siguiente sitio:
*https://www.geogebra.org/scientific*

## Ejemplo 2

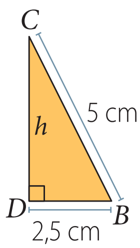
**¿Cuál es la medida de la altura $h$ en el triángulo?**




1. En un triángulo equilátero, la altura ($h$) correspondiente a la base divide a esta en dos segmentos de igual medida. Por lo tanto, se cumple:

$$\overline{AD} = \overline{DB} = 2{,}5 \text{ cm}$$

2. Nota que la altura $h$ divide al triángulo $ABC$ en dos triángulos rectángulos congruentes. En el triángulo rectángulo $DBC$, $h$ representa uno de sus catetos, por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Pitágoras para calcular su medida.

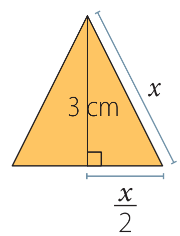



$$\begin{aligned} h^2 + 2{,}5^2 &= 5^2 \\ h^2 + 6{,}25 &= 25 \\ h^2 &= 25 - 6{,}25 \\ h^2 &= 18{,}75 \\ h &= \sqrt{18{,}75} \text{ cm} \approx 4{,}33 \text{ cm} \end{aligned}$$

Utilizamos una calculadora para obtener la raíz cuadrada.

## Ejemplo 3

**Calcula el perímetro de un triángulo equilátero cuya altura mide 3 cm.**




1. Considera que un triángulo equilátero tiene todos sus lados de igual medida y que la altura divide a la base en 2 segmentos iguales, entonces:

2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular el valor de $x$.

$$\begin{aligned} 3^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= x^2 \\ 9 + \frac{x^2}{4} &= x^2 \\ 9 &= x^2 - \frac{x^2}{4} \\ 9 &= \frac{3x^2}{4} \\ 9 \cdot 4 &= 3x^2 \\ \frac{36}{3} &= x^2 \\ \sqrt{12} &= x \\ x &\approx 3{,}5 \end{aligned}$$

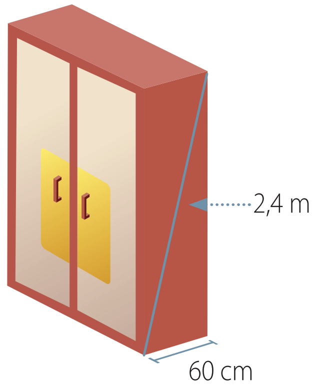
El lado del triángulo mide, aproximadamente, 3,5 cm. Al calcular el perímetro se tiene que:

$$3{,}5 \text{ cm} + 3{,}5 \text{ cm} + 3{,}5 \text{ cm} = 10{,}5 \text{ cm}$$

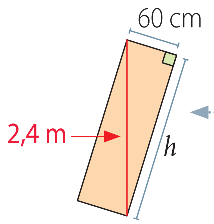
Luego, el perímetro del triángulo es de, aproximadamente, 10,5 cm.

## Ejemplo 4

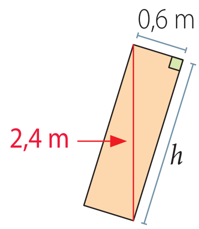
**En una habitación de 2,4 m de altura se quiere ubicar un mueble de 60 cm de profundidad. Si el mueble se debe trasladar inclinado, ¿cuál es la altura máxima que puede tener para no rayar el techo?**




1. En el mueble es posible formar un triángulo rectángulo en el que $h$ representa su altura.




En esta posición la diagonal del mueble coincide con la altura de la habitación.




Se igualan las unidades de medida.

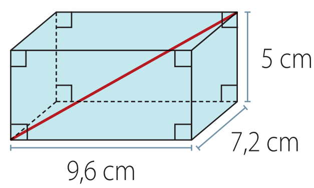
2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la altura ($h$).

$$h^2 + 0{,}6^2 = 2{,}4^2$$
$$h^2 + 0{,}36 = 5{,}76$$
$$h^2 = 5{,}4$$
$$h = \sqrt{5{,}4} \approx 2{,}32 \text{ m}$$

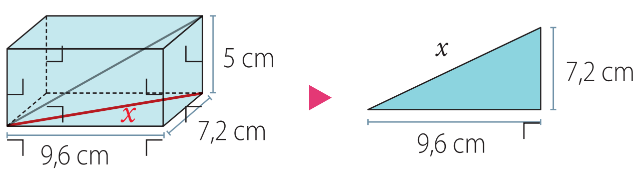
Altura máxima del mueble.

## Ejemplo 5

**Calcula la medida de la diagonal del siguiente prisma recto de base rectangular:**

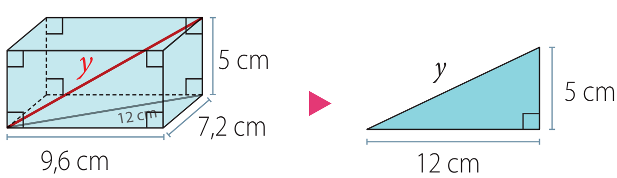



1. Calcula la medida de la diagonal de la base ($x$) aplicando el teorema de Pitágoras.




$$x^2 = 7{,}2^2 + 9{,}6^2$$
$$x^2 = 51{,}84 + 92{,}16$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \sqrt{144}$$
$$x = 12 \text{ cm}$$

2. Calcula la medida de la diagonal del prisma ($y$).




$$y^2 = 5^2 + 12^2$$
$$y^2 = 25 + 144$$
$$y^2 = 169$$
$$y = \sqrt{169}$$
$$y = 13 \text{ cm}$$

Luego, la diagonal del prisma mide 13 cm.

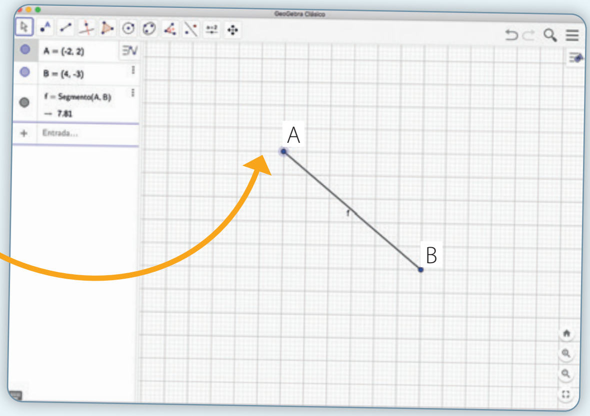
### Aprende

El teorema de Pitágoras se puede aplicar para calcular las medidas en figuras o cuerpos geométricos, y así poder determinar su área o su perímetro.

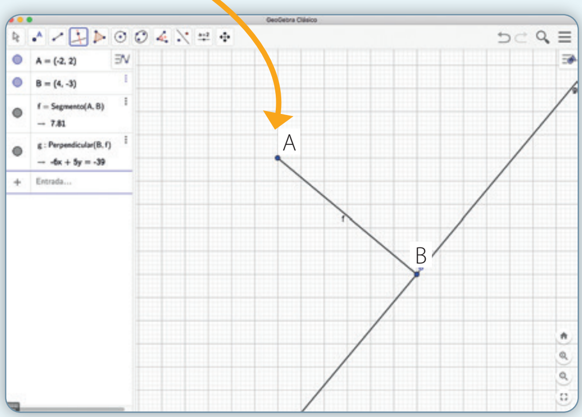
## **Herramientas** tecnológicas

En la siguiente actividad podrás demostrar que en cualquier triángulo rectángulo se cumple que **la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa**. Para ello, utilizaremos el programa GeoGebra.

1. **Construye un segmento**. Selecciona **Segmento**, luego pincha en dos puntos del plano. Habrás creado el segmento $\overline{AB}$.



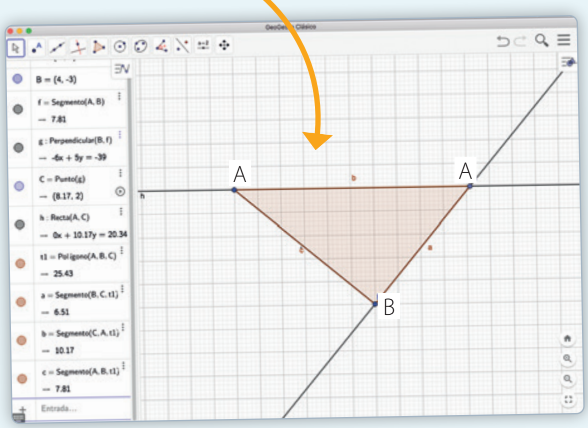

2. **Traza una perpendicular al segmento** $\overline{AB}$. Pincha, luego pincha sobre cualquier punto del segmento $\overline{AB}$ y desplaza la recta hasta el extremo $B$. Habrás trazado la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por $B$.




3. **Sobre la recta crea el punto** $C$. Pincha, y haz clic en cualquier lugar sobre la recta. Habrás creado el punto $C$ sobre la recta.

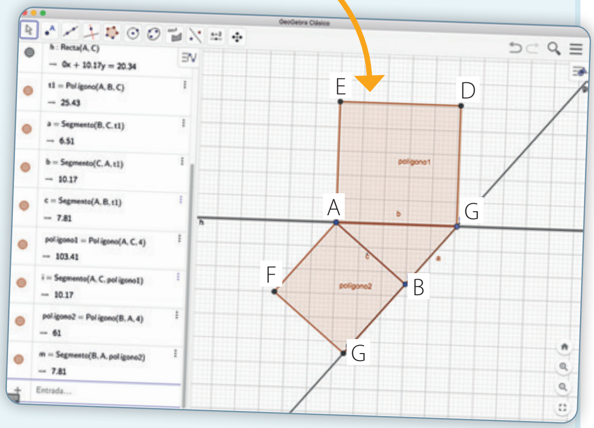
4. **Dibuja el segmento** $\overline{AC}$. Selecciona, luego haz clic sobre $A$ y $C$. Habrás creado el segmento $\overline{AC}$.

5. **Construye el polígono** $ABC$. Selecciona, pincha sobre $A$, $B$, $C$, $A$ y habrás construido el polígono $ABC$.

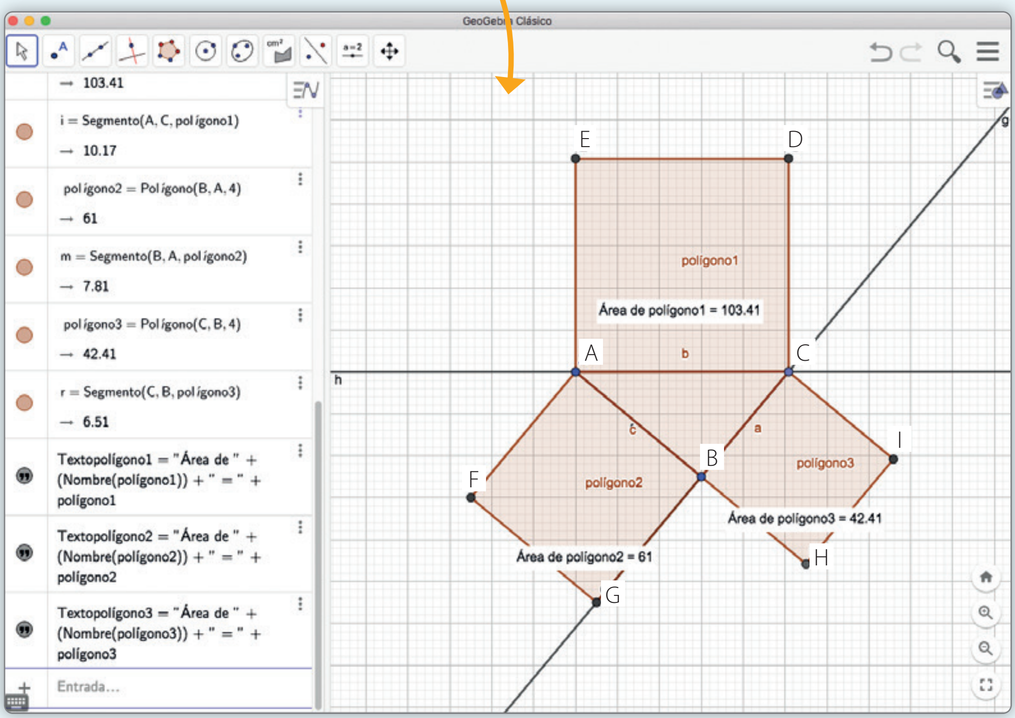



6. **Construye los cuadrados sobre cada lado del triángulo** $ABC$. Selecciona **Polígono regular.** Haz clic sobre $A$ y luego sobre $C$. Aparecerá un cuadro donde debes poner el número de lados del polígono que quieres construir, en este caso 4.

7. **Construye los cuadrados sobre los otros lados del triángulo,** siguiendo las mismas indicaciones del paso 6., pero considerando los otros puntos.



8. **Calcula el área de cada cuadrado.** Selecciona **Área**, . Haz clic sobre cada uno de los cuadrados construidos y obtendrás el área de ellos.




9. Suma las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y compárala con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

10. Repite el procedimiento construyendo un triángulo distinto.

**Nota:** La aplicación Geogebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

BDA U3_ACT_4 y 5

Lección

# 2 Transformaciones isométricas

## Traslación

La **tradición textil mapuche** tiene sus orígenes en el período precolombino. La actividad textil estuvo exclusivamente en manos de las mujeres. Fueron ellas las encargadas de vestir a su pueblo. Tejieron una gran variedad de productos como parte de la vestimenta cotidiana y también de uso ritual.

*Fuente: http://www.memoriachilena.gob.cl/archivos2/pdfs/mc0035074.pdf*

Uno de los diseños encontrados en los trabajos textiles mapuche es el **mawñimin**, formado por figuras dispuestas simétricamente en torno a una de ellas.

El **mawñimin** se construye a partir de la traslación de una figura desde un lugar del plano a otro, conservando su forma y tamaño.

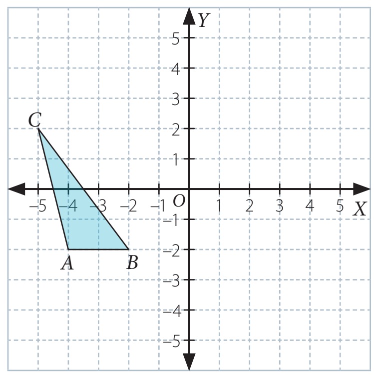
Shutterstock/Raota

Reúnete con un grupo de compañeros y respondan las siguientes preguntas:

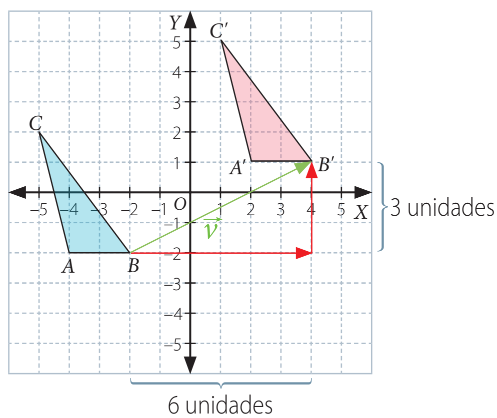
1. ¿Qué figuras geométricas ven en la prenda tejida de la imagen?
2. ¿Cómo creen que las mujeres mapuche logran tejer figuras de igual forma y tamaño?
3. Investiga la relación entre la simetría (transformación isométrica) con el principio de dualidad del pueblo mapuche presente en los tejidos mapuche.

## Ejemplo 1

**Traslada en el plano cartesiano el triángulo $ABC$, que se muestra en la figura, con respecto al vector $\vec{v} = (6, 3)$, y determina las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$.**




1. Como el vector de traslación es $\vec{v} = (6, 3)$, el triángulo $ABC$ se traslada 6 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.

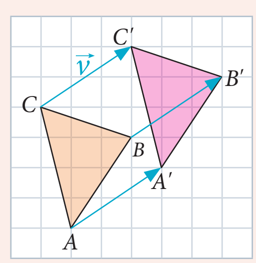



2. Las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$ son $A'(2, 1)$, $B'(4, 1)$ y $C'(1, 5)$.

## Aprende

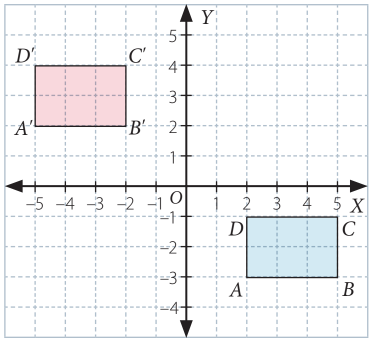
**Isometría**: palabra de origen griego que significa "igual medida" (iso = igual o mismo, metría = medir).

- Una **traslación de una figura geométrica** desplaza todos los puntos de ella en una misma magnitud, dirección y sentido.
- Al trasladar un punto $A$, le corresponderá otro punto $A'$ en el que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, que es el **vector de traslación**.



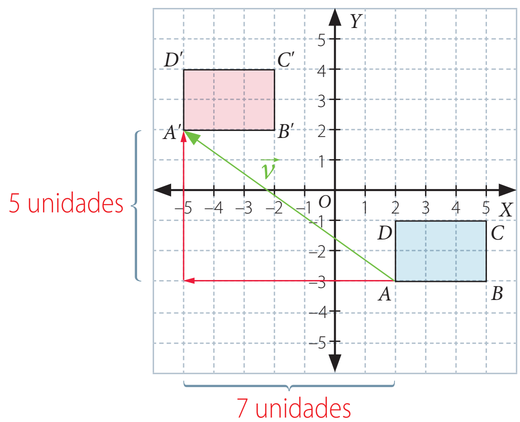
## Ejemplo 2

Determina el vector de traslación respecto al cual se trasladó el rectángulo $ABCD$ para obtener su imagen $A'B'C'D'$.




1. Elige uno de los vértices del rectángulo $ABCD$, en este caso el vértice $A$, y cuenta las unidades que se trasladó hasta el vértice $A'$.

2. Como el vértice $A$ se trasladó 7 unidades a la izquierda y 5 unidades hacia arriba en el plano cartesiano, la primera componente del vector buscado será –7 y la segunda, 5. Es decir, el vector de traslación es $\vec{v} = (-7, 5)$.




3. Puedes comprobar la solución restando las coordenadas de $A'$ con las de $A$.

   Las coordenadas de $A'$ son (–5, 2) y las de $A$ son (2, –3), entonces:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (-5, 2) - (2, -3)\\ &= (-5 - 2, 2 - (-3))\\ &= (-7, 5)\end{aligned}$$

   Lo anterior se cumple con cualquier pareja de vértices correspondientes, es decir, si consideras que las coordenadas de $B'$ son (–2, 2) y las de $B$ son (5, –3) obtienes:

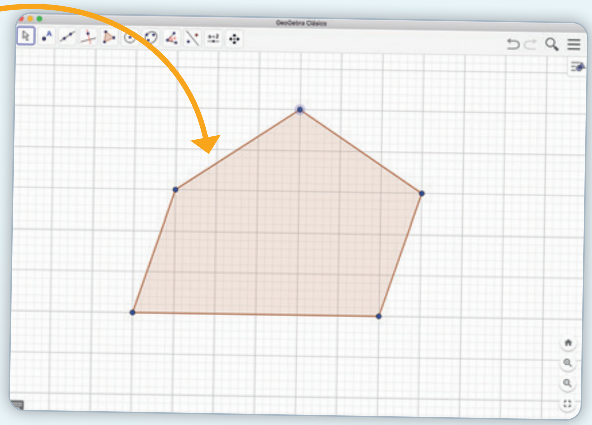
$$\begin{aligned}\vec{v} &= (-2, 2) - (5, -3)\\ &= (-2 - 5, 2 - (-3))\\ &= (-7, 5)\end{aligned}$$

## Herramientas tecnológicas

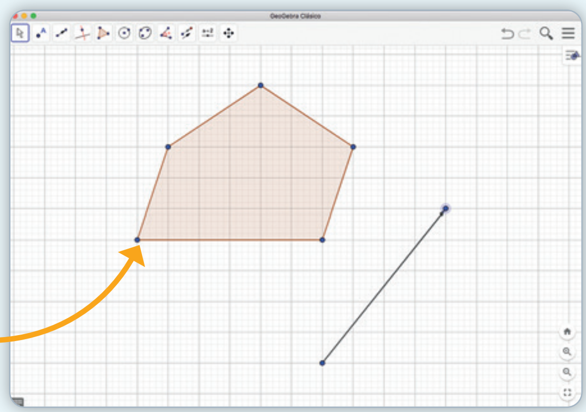
### Traslación de un pentágono

Usando el programa GeoGebra, puedes construir transformaciones isométricas mediante los siguientes pasos:

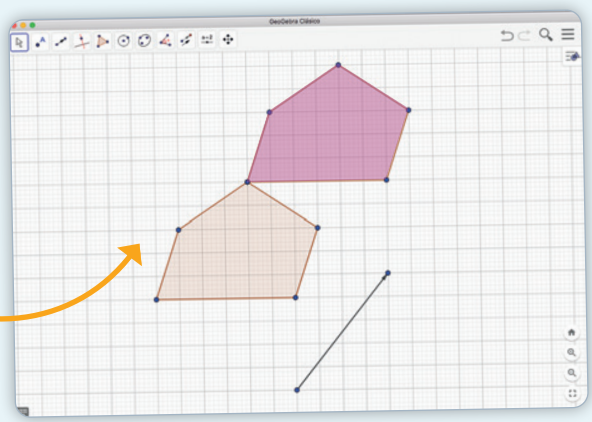
1. Utiliza una hoja nueva, presiona el botón derecho y selecciona **ejes**. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona **cuadrícula**.



2. En las herramientas del *software* selecciona **Polígono** . Luego, en la cuadrícula dibuja un pentágono haciendo clic en distintos puntos. Recuerda que el último clic siempre se debe hacer sobre el primer vértice que generaste.



3. Dibuja un vector presionando la herramienta **Vector** .



4. Para trasladar la figura respecto al vector, selecciona la herramienta **Traslación** . Al usar esta herramienta, haz clic primero sobre el objeto que se trasladará, y luego sobre el vector de traslación.

**Nota:** La aplicación Geogebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

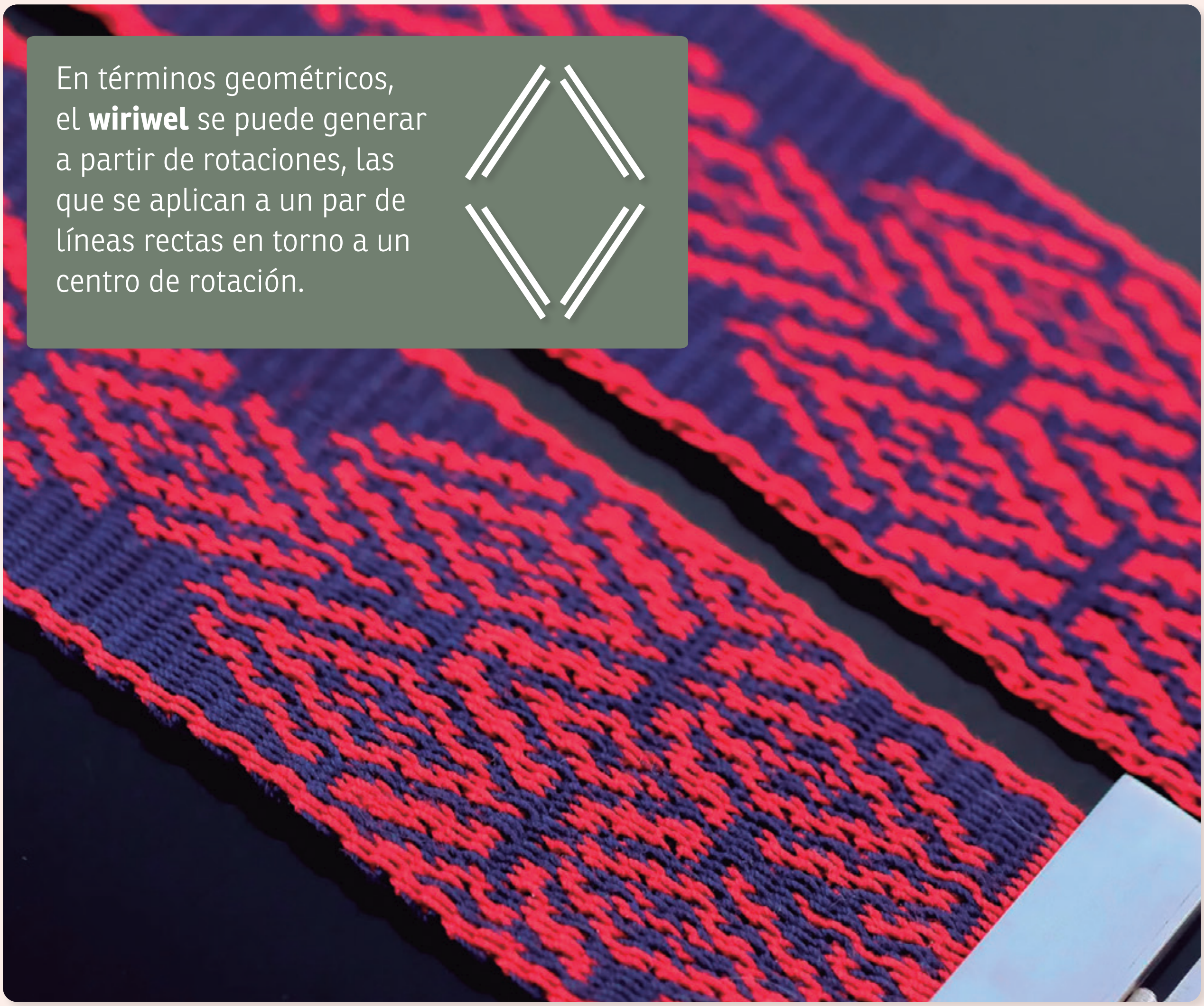
BDA U3_ACT_6, 18 y 19

# Rotación

Otro elemento frecuente de los diseños textiles mapuche es el **wiriwel**, el cual corresponde a líneas oblicuas y paralelas de tejido en cuyo centro casi siempre va otro dibujo. Corresponde a una representación del cosmos.

*Fuente: http://www.memoriachilena.gob.cl/archivos2/pdfs/mc0035074.pdf*

En términos geométricos, el **wiriwel** se puede generar a partir de rotaciones, las que se aplican a un par de líneas rectas en torno a un centro de rotación.



https://kimenestudio.com/producto/collar-fortaleza/

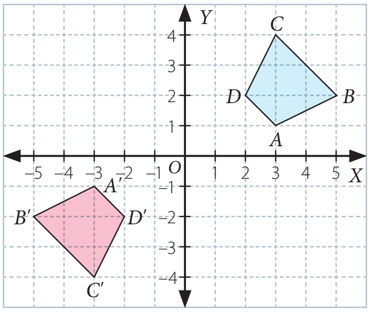
**Responde y comenta con tus compañeros.**

1. ¿Qué crees que buscan representar los mapuche con el cosmos?
2. ¿Dónde crees que se ubica el centro de rotación en la imagen para lograr generar el wiriwel?
3. ¿Qué elementos de la cosmovisión mapuche se conocen hoy en día? Investiga.

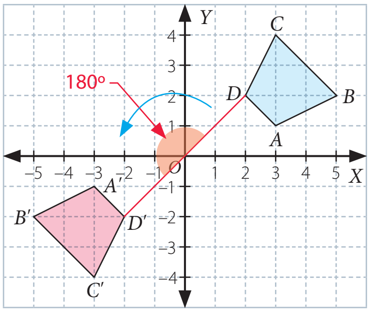
Para aprender más visita:
*https://www.curriculumnacional.cl/portal/Secciones/Lengua-y-Cultura-de-los-Pueblos-Originarios-Ancestrales/89532:Lengua-y-Cultura-de-los-Pueblos-Originarios-Ancestrales#in_recursos*

## Ejemplo 1

Determina el ángulo de rotación respecto del cual se rotó el cuadrilátero $ABCD$ para obtener su imagen $A'B'C'D'$. Considera que $O$ es el centro de rotación.



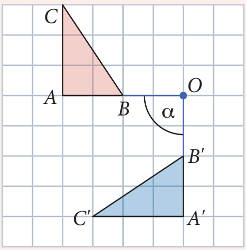
1. Traza un segmento que pase por $O$ y que una uno de los vértices con su imagen, por ejemplo, $D$ y $D'$.
2. Luego, el ángulo de rotación es de 180º.




¿Qué elementos se deben considerar al rotar figuras?

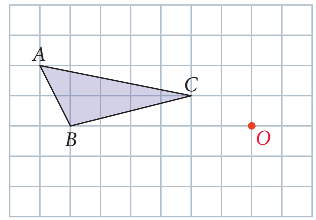
## Aprende

- Para identificar el **ángulo de rotación** de una figura, se une uno de los vértices de la figura original con el de la figura imagen, pasando por el centro de rotación, y luego se mide el ángulo que se forma.
- Una **rotación** es una transformación isométrica en la cual todos los puntos se mueven respecto de un punto fijo llamado **centro de rotación** ($O$) en un determinado ángulo, llamado **ángulo de rotación** ($\alpha$).
- El **ángulo de rotación** puede tener sentido antihorario (positivo) o sentido horario (negativo).

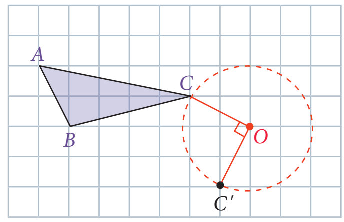


## Ejemplo 2

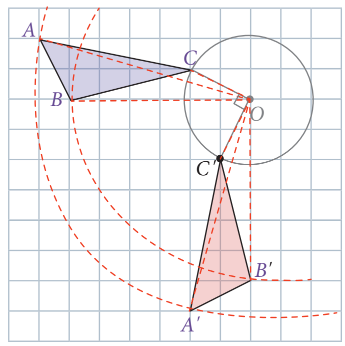
**Utilizando regla y compás, rota el triángulo *ABC*, respecto al punto *O*, en 90° en sentido antihorario.**




1. Dibuja una circunferencia con centro $O$ y radio $\overline{OC}$ y con un transportador determina un ángulo de 90°. Luego, marca en la imagen el punto $C'$ en la circunferencia.

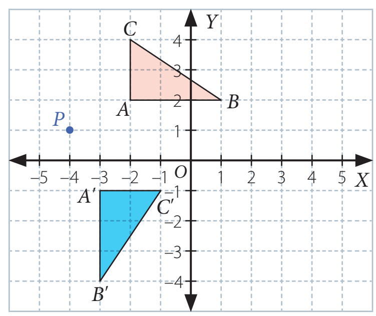



2. Repite el mismo procedimiento para los demás vértices y luego une los puntos. Con esto obtienes la imagen del triángulo $ABC$, es decir, el triángulo $A'B'C'$.

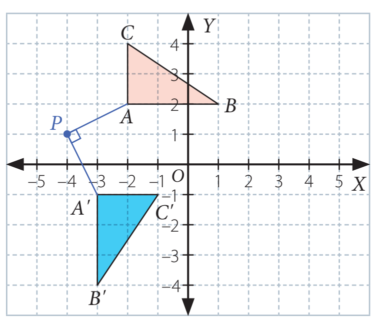



## Ejemplo 3

**Identifica el ángulo de rotación que se le aplicó al triángulo *ABC* para obtener el triángulo *A'B'C'* considerando que *P* es el centro de rotación.**




1. Traza un segmento que una $A$ con $P$ y otro que una $P$ con $A'$.
2. Mide el ángulo que se forma, que en este caso es de 90º en sentido horario.

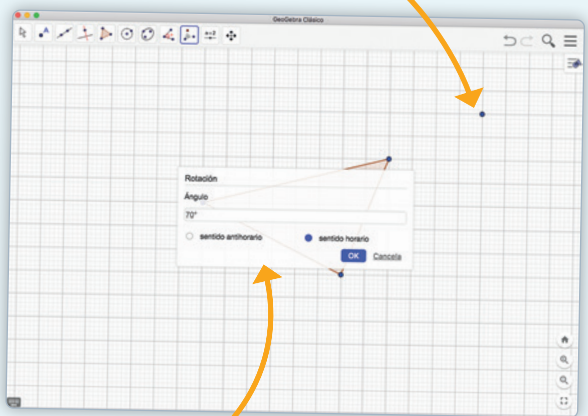


## Herramientas tecnológicas

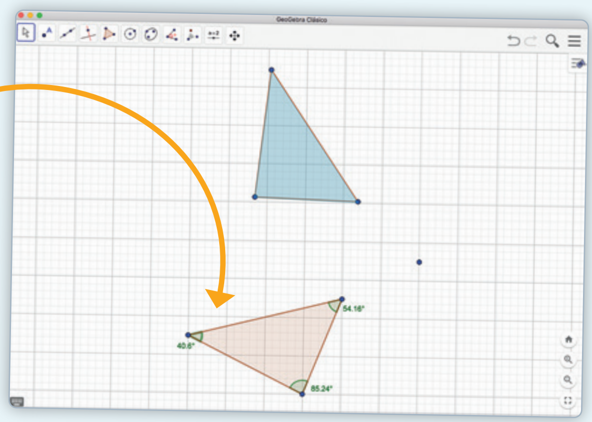
### Rotación de un triángulo

Usando el programa GeoGebra, puedes construir transformaciones isométricas mediante los siguientes pasos:

1. Utiliza una hoja nueva, presiona el botón derecho y selecciona **ejes**. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona **cuadrícula**.
2. En las herramientas del *software* selecciona **Polígono** . Luego, en la cuadrícula dibuja un triángulo haciendo tres clics en distintos puntos; el cuarto clic lo debes hacer sobre el vértice del primer clic del triángulo.
3. Selecciona la herramienta **Punto** . Haz clic en cualquier parte de la cuadrícula para dibujar el centro de rotación.




4. Selecciona **Rotación** . Haz clic sobre el triángulo y, luego, sobre el centro de rotación. Aparecerá una tabla en la cual debes ingresar el ángulo de rotación, puede ser 70º (o el que tú quieras) , y el sentido de rotación, en este caso en sentido horario. Una vez ingresado los datos, presiona **OK**.
5. Selecciona la herramienta **Ángulo** . Haz clic sobre cada vértice correspondiente al ángulo interior del triángulo, en sentido antihorario; aparecerán las medidas de los ángulos interiores, como se muestra en la figura. Repite lo mismo con la figura imagen. Verás que ambas figuras tienen los ángulos de igual medida.



**Nota:** La aplicación Geogebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

BDA U3_ACT_7, 20

# Reflexión

Otro de los diseños frecuentes en el arte textil mapuche es el **wangülen** o estrella, el cual corresponde a dos (o más) triángulos isósceles opuestos por uno de sus vértices, por donde pasa una línea recta. Representa un tipo de espíritu femenino presente en la mitología mapuche. La siguiente imagen muestra la versión más sencilla de este símbolo.

*Fuente: http://www.memoriachilena.gob.cl/archivos2/pdfs/mc0035074.pdf*

En términos geométricos, el **wangülen** se construye a partir de una reflexión respecto de un eje de simetría, en la que se asocia cada punto con otro punto a igual distancia de este eje, llamado imagen.

*Wikimedia Commons/Marco Antonio Correa Flores*

**Responde y comenta con tus compañeros.**

1. ¿Cuál es la historia del espíritu femenino desde el conocimiento mapuche? Investiga.
2. ¿Observas otras simetrías en la figura? Explica.

Para conocer más acerca de la **textilería mapuche**, puedes visitar el siguiente enlace:
*http://www.bibliotecanacionaldigital.gob.cl/visor/BND:47439*

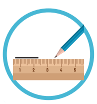
**Ejemplo 1**

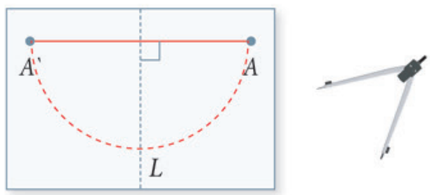
**Realiza una reflexión utilizando una hoja de papel. Para ello, considera los siguientes pasos:**

1. Dobla la hoja por la mitad.

2. Marca un punto desde afuera, de manera que la marca se vea por ambos lados (también puedes perforar la hoja con tu compás).

3. Abre la hoja y marca los puntos en el interior como $A$ y $A$`. Al pliegue de la hoja le llamaremos $L$. Une los puntos $A$ y $A$`.





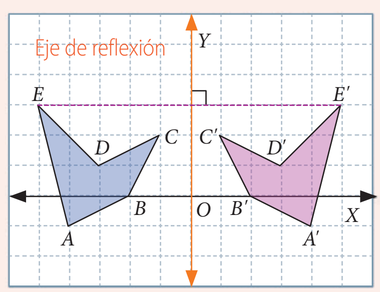

4. Mide la distancia desde cada punto a la recta $L$. ¿Cómo se relacionan dichas medidas?

Como la distancia entre los puntos $A$ y $A$` a la recta $L$ es la misma, entonces son simétricos respecto de la recta $L$.

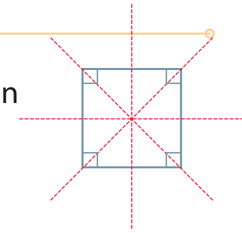
## Aprende

Una **reflexión** es una transformación isométrica en la que a cada punto de una figura se le asocia otro punto, llamado imagen. El punto y su imagen deben estar a igual distancia de una recta llamada eje de reflexión o de simetría, y el segmento que une el punto con su imagen debe ser perpendicular a ella.

Por ejemplo, al pentágono $ABCDE$ se le aplicó una reflexión con respecto al eje $Y$ en el plano cartesiano.



## Ejemplo 2



Una línea de simetría divide a una figura en dos partes simétricas. Existen figuras que cuentan con más de una línea simetría, es decir, es posible "plegarlas" de varias formas de modo que ambas mitades coincidan.

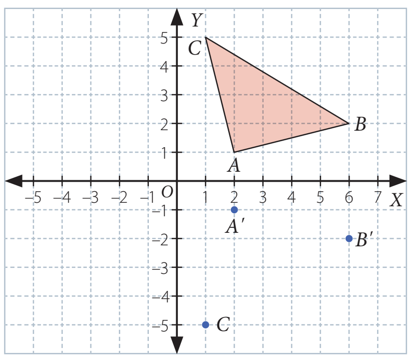
**¿Cuántas líneas de simetría puedes dibujar en un cuadrado?**

Recuerda que un cuadrado tiene todos sus lados y ángulos de igual medida. Luego, en un cuadrado se pueden dibujar 4 líneas de simetría, como se observa en la imagen.

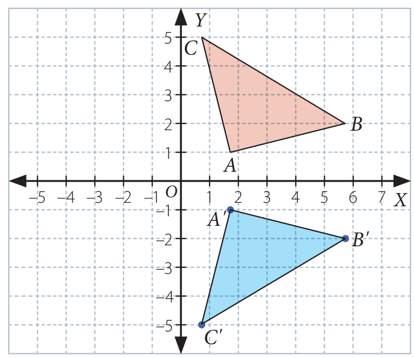
## Ejemplo 3

Realiza una reflexión al triángulo $ABC$, de vértices $A(2, 1)$, $B(6, 2)$ y $C(1, 5)$, con respecto al eje $X$.

1. Representa el triángulo $ABC$ en el plano cartesiano y dibuja los puntos simétricos a sus vértices con respecto al eje $X$.



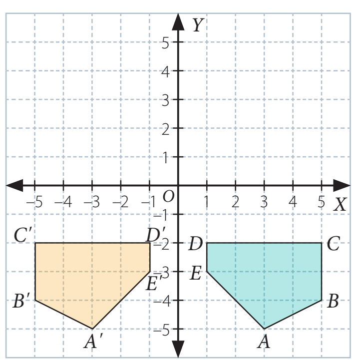

2. Une los puntos y dibuja el triángulo $A'B'C'$, que es la imagen del triángulo $ABC$.



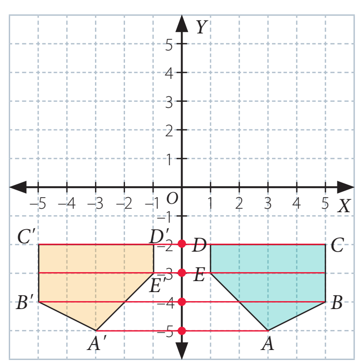

## Ejemplo 4

Determina el eje de reflexión entre las figuras $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$.

1. Traza segmentos que unan los vértices y marca su punto medio.




2. Identifica el eje de simetría. Puedes notar que los puntos medios de los segmentos pertenecen al eje $Y$, entonces, se puede afirmar que el eje de simetría es el eje $Y$.



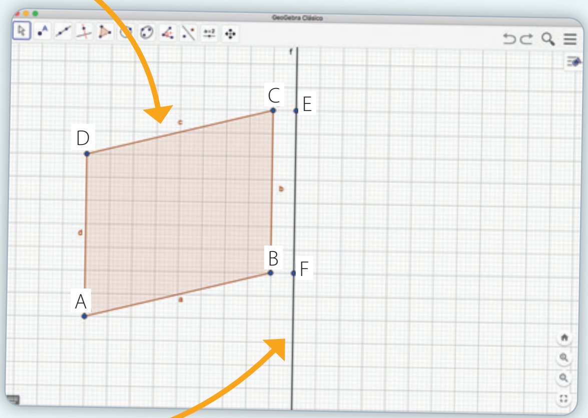
## Herramientas tecnológicas

### Reflexión de un cuadrilátero

Usando el programa GeoGebra, puedes construir transformaciones isométricas mediante los siguientes pasos:

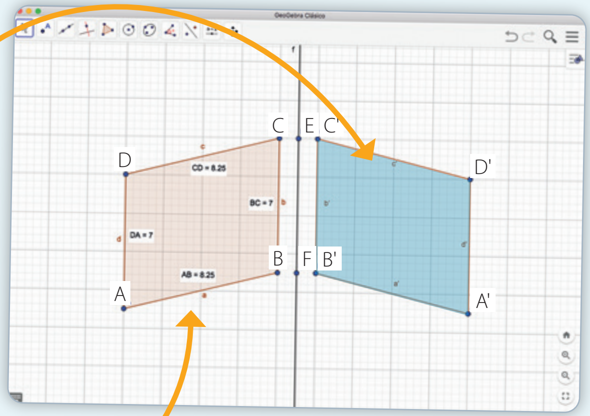
1. Utiliza una hoja nueva, presiona el botón derecho y selecciona **ejes**. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona **cuadrícula**.

2. En las herramientas del *software*, selecciona **Polígono** . Luego, en la cuadrícula dibuja un cuadrilátero haciendo cuatro clics en distintos puntos; el quinto clic lo debes hacer sobre el vértice del primer clic del cuadrilátero.




3. Selecciona la herramienta **Recta** . En la cuadrícula, haz dos clics en distintos puntos para dibujar el eje de simetría, como se muestra en la figura.

4. Selecciona la herramienta **Simetría axial** . Haz clic sobre el cuadrilátero y, luego, sobre la recta y aparecerá la siguiente imagen:




5. Selecciona la herramienta **Distancia o Longitud** . Haz clic sobre cada lado de la figura inicial y, luego, sobre cada lado de la imagen; aparecerán las medidas de todos los lados.

**Nota:** La aplicación Geogebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

BDA U3_ACT_8, 21

# Composición de transformaciones isométricas

El **pueblo Diaguita** tiene una forma de vida sedentaria, en la cual se dedica a la agricultura y a la ganadería. Se destaca por el increíble trabajo de alfarería decorada con figuras geométricas.

En sus diseños se encuentran las transformaciones isométricas: rotaciones, traslaciones y reflexiones, sobre una misma figura, con las que se genera un diseño compuesto, como se ve en la imagen.

*Fuente: http://chileprecolombino.cl/pueblos-originarios/diaguita/*


*Diseño Fase Diaguita-Inca- Dibujo Claudia Campos*

**Responde las siguientes preguntas y comenta con tus compañeros:**

1. ¿Desde qué año datan los primeros elementos de alfarería de la cultura diaguita encontrados en Chile? Investiga.
2. ¿Consideras importante estudiar el diseño del arte de los pueblos originarios? ¿Por qué?
3. ¿Qué transformaciones isométricas observas en el diseño de la imagen?

## Ejemplo 1

**Observa la imagen de la página anterior y responde: ¿qué transformaciones isométricas se le puede aplicar a la figura 1 para obtener la figura 3 pasando por la figura 2?**

1. Observa que a la figura 1 se le aplicó una **rotación** en 180º en sentido horario, con lo que se obtiene la figura 2.

Figura 1

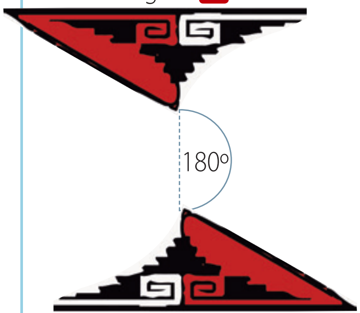



Figura 2

2. Luego, a la figura 2 se le puede aplicar primero una **reflexión** y a la figura resultante se le aplica una **traslación** para obtener la figura 3.

Figura 3

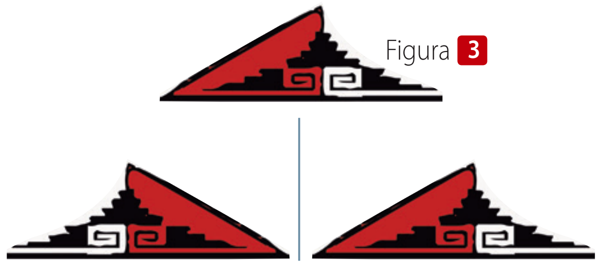
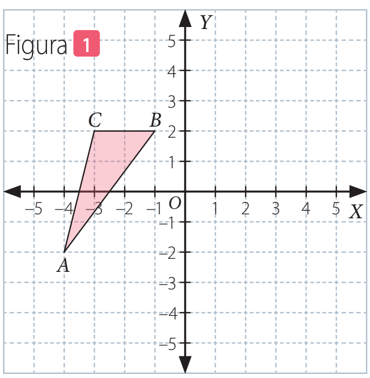


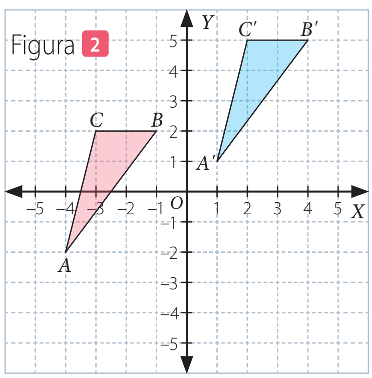
Figura 2

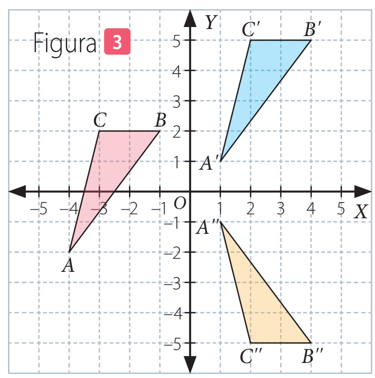
## Ejemplo 2

**Traslada el triángulo $ABC$, de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 2)$ y $C(-3, 2)$, respecto del vector $\vec{v} = (5, 3)$. Luego, refleja su figura imagen respecto del eje $X$.**

1. Representa el triángulo $ABC$ en el plano cartesiano (Figura 1).
2. Traslada el triángulo $ABC$ respecto del vector $\vec{v} = (5, 3)$ (Figura 2).
3. Finalmente, refleja el triángulo $A'B'C'$ respecto del eje $X$. Las coordenadas del triángulo resultante son $A''(1, -1)$, $B''(4, -5)$ y $C''(2, -5)$ (Figura 3).



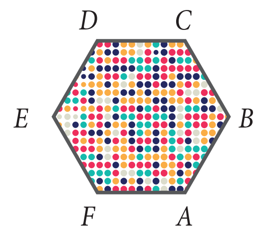

## Aprende

La **composición de transformaciones isométricas** consiste en aplicar una transformación isométrica a una figura y sobre la figura imagen aplicar otra transformación isométrica, y así sucesivamente.

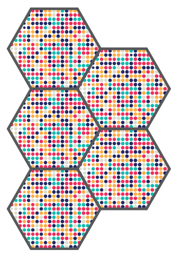
## Ejemplo 3

**Una familia quiere poner baldosas con forma de hexágono regular en su patio de manera que cubran todo el piso. ¿Cómo se puede crear un diseño para el piso?**

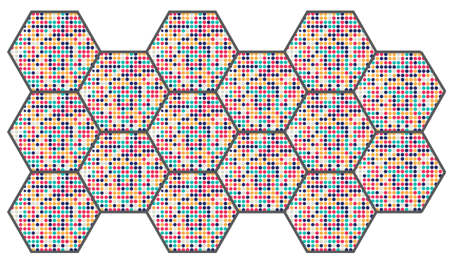
1. Dibuja un hexágono inicial $ABCDEF$ que represente una baldosa.




2. Le puedes aplicar reflexiones respecto de los segmentos $\overline{FA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$. Las reflexiones las puedes construir con regla y compás. Obtienes lo siguiente:



3. Luego, a esta nueva figura le aplicas sucesivas traslaciones hacia la derecha. Puedes trasladar cada uno de los puntos de la figura con regla y compás. Así, sigues aplicando transformaciones isométricas hasta cubrir el piso por completo.

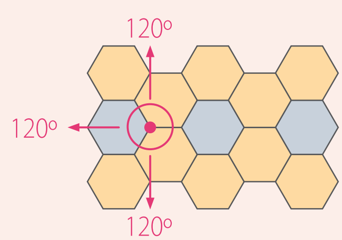


¿De qué otra forma se podría haber realizado la teselación?

### Aprende

Una **teselación** es una regularidad o patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana y que cumple con dos condiciones: que no queden espacios y que no se sobrepongan las figuras.

Las teselaciones se pueden crear usando transformaciones isométricas sobre una o varias figuras. La suma de los ángulos de las figuras que concurren a un vértice es 360º.



**Ejemplo 4**

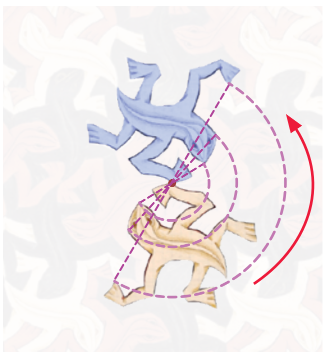
## Conecto con Artes Visuales

El holandés Maurits Cornelis Escher es un artista cuyo trabajo ha interesado a muchos matemáticos porque utiliza patrones de figuras que cubren una superficie plana sin superponer las figuras ni dejar espacios libres entre ellas, es decir, teselaciones.

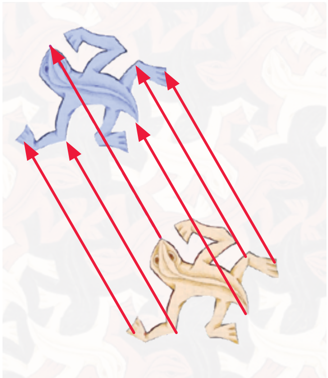
Observa la imagen y responde:
¿Qué transformación isométrica es necesario aplicar a la figura 1 para obtener la figura 2?, ¿y para obtener la figura 3?

Detalle de obra original.

1. Para obtener la figura 2 a partir de la figura 1, puedes aplicar una rotación en 180°.




2. Luego, para obtener la figura 3 a partir de la figura 1, puedes aplicar una traslación.



### Herramientas tecnológicas

Para conocer más acerca de Maurits Cornelis Escher, puedes ingresar al siguiente sitio:
*http://www.mcescher.com/*

BDA U3_ACT_9

# Transformaciones isométricas en el espacio

El arte practicado por el **pueblo Diaguita** fue perfeccionado con la llegada de los inka a la zona. Comunidades diaguita e inka se asentaron en el pueblo de Pomaire que, gracias a la excelente calidad de la tierra, permitió desarrollar este arte en greda y practicar el oficio de la alfarería.

*Fuente: http://chileprecolombino.cl/pueblos-originarios/diaguita/*

Shutterstock/Stop war in Ukraine

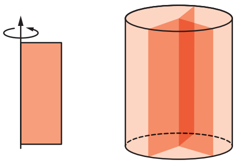
Responde las siguientes preguntas:

**1.** ¿Con qué transformación isométrica puedes relacionar la elaboración de la vasija de la imagen?

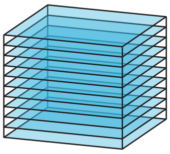
**2.** ¿Qué características tiene la vasija creada?

## Aprende

- Un cuerpo es **generado por rotación** o es un sólido de revolución si se puede obtener mediante la rotación de una curva o de una figura plana en torno a un eje. Se llama **generatriz** a la línea recta que, por su movimiento, forma un sólido geométrico.



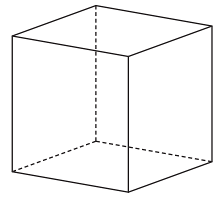
- Un cuerpo es **generado por traslación** si se puede obtener mediante el desplazamiento de una figura plana.



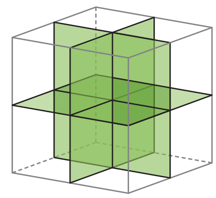
- Un **plano de simetría** divide a un cuerpo geométrico en dos partes iguales. Un cuerpo geométrico puede tener uno o varios planos de simetría.

## Ejemplo 1

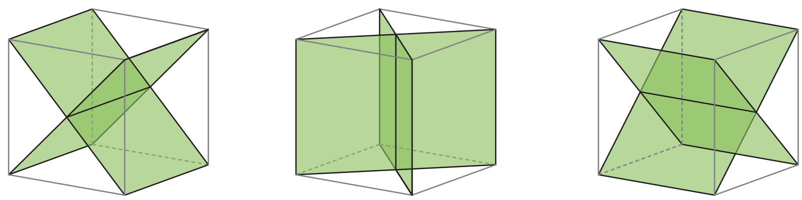
**Dibuja el o los planos de simetría de un cubo.**



1. Dibuja un cubo para poder identificar los planos de simetría que tiene.
2. Un cuerpo puede tener planos de simetría horizontales, verticales o diagonales, por lo que se puede comenzar analizando si el cubo tiene planos de simetría horizontales o verticales.



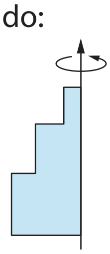
3. El cubo tiene dos planos de simetría verticales y uno horizontal. Luego, identifica los planos de simetría diagonales.



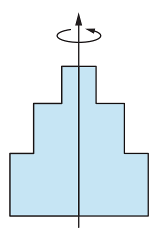
Se puede concluir que el cubo tiene 6 planos de simetría diagonales, por lo que en total el cubo tiene 9 planos de simetría.

## Ejemplo 2

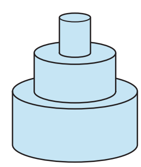
**Dibuja el cuerpo que se genera al rotar la siguiente figura alrededor del eje indicado:**



1. Copia la figura usando el eje como eje de simetría.

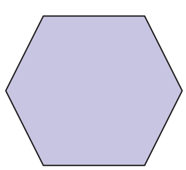


2. Dibuja el cuerpo dándole el volumen correspondiente.

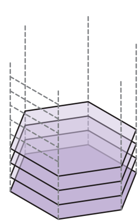


## Ejemplo 3

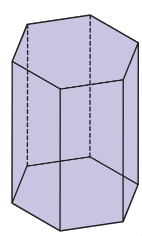
**Dibuja el cuerpo que se genera al trasladar la siguiente figura en dirección perpendicular al plano que contiene esta hoja:**



1. Traslada el hexágono en forma perpendicular al plano para construir el cuerpo geométrico.



2. Finalmente, dibuja el cuerpo geométrico, que en este caso es un prisma recto de base hexagonal.

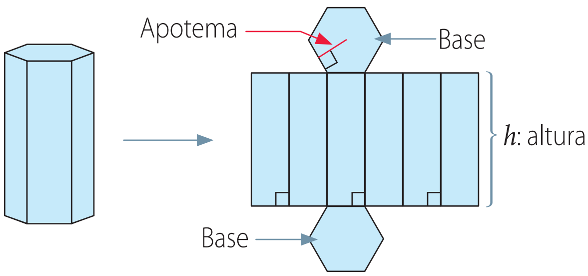


U3_ACT_10

# Área y volumen de prismas y cilindros

## Área de un prisma

Para calcular el área total ($A_T$) de un prisma se suman el área lateral ($A_L$) con el área de las caras basales ($A_B$).



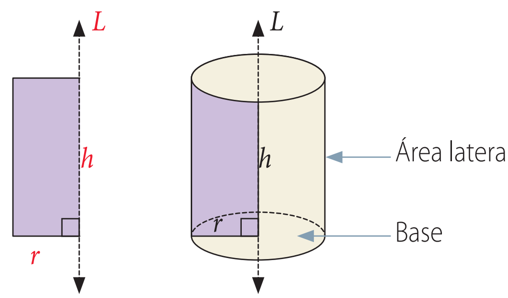

- $A_L = P_B \cdot h$, en que $P_B$ es el perímetro de la base del prisma y $h$ la altura.
- $A_B =$ área del polígono de la base del prisma.

Área total ($A_T$) de un prisma: $A_T = A_L + A_B + A_B = A_L + 2 \cdot A_B$

## Área de un cilindro

- Un **cilindro recto** es un cuerpo redondo o cuerpo de rotación que se genera a partir de un rectángulo que se hace girar considerando uno de sus lados como eje de rotación.

$h$: altura del cilindro $\quad$ $r$: radio de la base $\quad$ $L$: eje de rotación



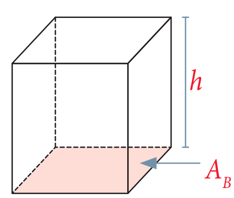

- Para calcular el **área total** ($A_T$) de un cilindro se suman el área lateral ($A_L$) con el área de las caras basales ($A_B$).

$$A_T = A_L + A_B + A_B = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

## Volumen de un prisma

El **volumen ($V$) de un prisma** se puede determinar calculando el producto del área basal ($A_B$) por la medida de su altura ($h$).

$$V = A_B \cdot h$$

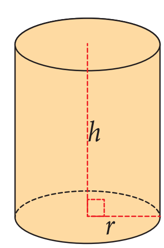



## Volumen de un cilindro

El **volumen** ($V$) de un **cilindro** se asemeja al de un prisma. Para calcularlo se determina el área de una base ($A_B$) y se multiplica por la medida de su altura. Es decir, el volumen ($V$) de un cilindro está dado por:

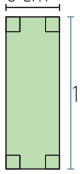
$$V = A_B \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

donde $r$ es el radio de la base y $h$ la altura del cilindro.



¿Cuál es el área total del siguiente prisma recto cuya base es un hexágono regular?

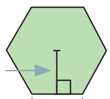
Se dibuja la red geométrica que permite construir el prisma y se calcula el área de una de sus caras laterales y de una de sus caras basales.




$A = (12 \cdot 6)\ \text{cm}^2$

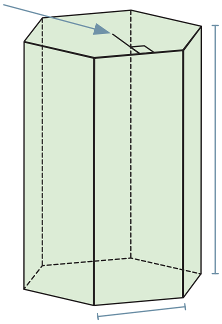
$A = 72\ \text{cm}^2$

Área de una cara lateral




$A = \dfrac{36 \cdot 5}{2}\ \text{cm}^2 = 90\ \text{cm}^2$

Área de una cara basal




Luego, se calcula el área total ($A_T$).

$A_T = A_L + 2A_B$ $\qquad A_T = (72 \cdot 6) + (2 \cdot 90)$ $\qquad A_T = 612\ \text{cm}^2$

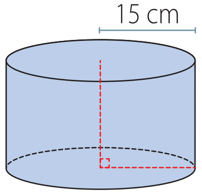
¿Cuál es el área total del siguiente cilindro? Considera $\pi = 3{,}14$.

$A_T = 2\pi r(h + r)$

$A_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15(7{,}6 + 15)$ $\qquad A_T \approx 2\,129\ \text{cm}^2$

$A_T = 94{,}2 \cdot 22{,}6$

$A_T \approx 2\,129$



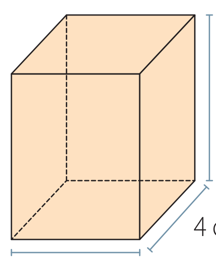

¿Cuál es el volumen del siguiente prisma recto de base rectangular?

$V = A_B \cdot h$

$V = (5 \cdot 4) \cdot 7$ $\qquad V = 140\ \text{cm}^3$

$V = 20 \cdot 7$

$V = 140$

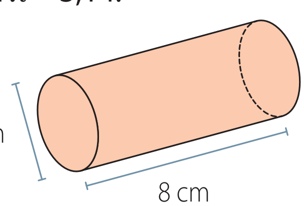



¿Cuál es el volumen del siguiente cilindro? Considera $\pi = 3{,}14$.

$V = \pi r^2 \cdot \text{h}$

$V = 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 \cdot 8$ $\qquad V = 56{,}52\ \text{cm}^3$

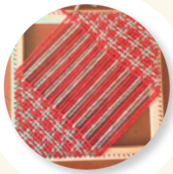
$V = 56{,}52$




BDA U3_ACT_11, 22

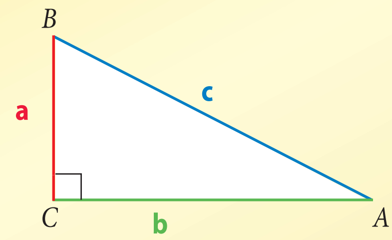
# Síntesis

## Unidad 3: Geometría



### Lección 1 » Teorema de Pitágoras

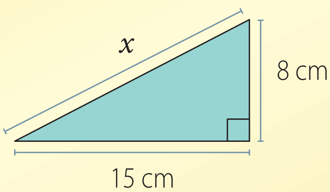
En un triángulo rectángulo, el **teorema de Pitágoras** establece que la suma de la medida de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.




Hipotenusa² = Cateto² + Cateto²

$c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo: **Calcula la medida ($x$) que falta en el triángulo:**




$15^2 + 8^2 = x^2$

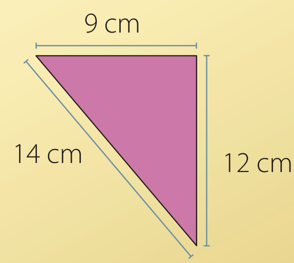
$225 + 64 = x^2$

$\sqrt{289} = x$

$17 = x$

El lado mide 17 cm

Ejemplo: **El siguiente triángulo ¿es rectángulo?**




Para saber si el triángulo es rectángulo, se puede usar el **recíproco del teorema de Pitágoras,** entonces:

¿$14^2 = 9^2 + 12^2$?

¿$196 = 81 + 144$?

$196 \neq 225$

La igualdad no se cumple, por lo que el triángulo no es rectángulo.

¿Cómo podemos utilizar el teorema de Pitágoras en la vida cotidiana?
¿Qué dificultades tuviste para aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas?

## Lección 2 » Transformaciones isométricas

**Traslación**: todos los puntos de una figura se desplazan en una misma magnitud, dirección y sentido. Se puede representar por un vector.

Ejemplo: Dado un triángulo de vértices $A$ (–5, –3); $B$ (2, –1) y $C$ (1, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los vértices resultantes si el triángulo $ABC$ se traslada 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba?

Las nuevas coordenadas serán:

$A$ (–5 + 2, –3 + 3) = $A$ (–3, 0)

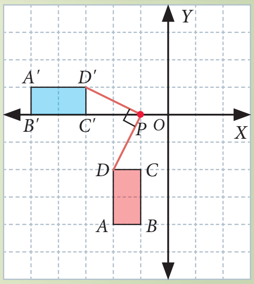
$B$ (2 + 2, –1 + 3) = $B$ (4, 2)

$C$ (1 + 2, 4 + 3) = $C$ (3, 7)

**Rotación**: todos los puntos de una figura se mueven respecto de un punto fijo o centro en un cierto ángulo de rotación.

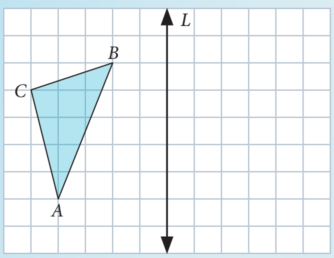
Ejemplo: **¿En qué ángulo se rotó la siguiente figura *ABCD*?**

La figura se rotó en 90º en sentido horario con centro de rotación en el punto $P$.

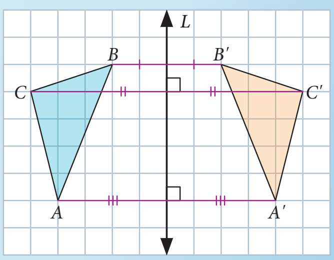



**Reflexión**: a cada punto se le asocia un punto que está a la misma distancia de una recta llamada **eje de reflexión** y el segmento que une el punto con su imagen debe ser perpendicular al eje de reflexión.

Ejemplo: **Determina la figura imagen al reflejar el triángulo *ABC* respecto del eje *L*.**




Al reflejar el triángulo se obtiene lo siguiente:




¿Qué estrategias utilizaste para aplicar transformaciones isométricas?
¿Crees que trabajar en grupo aporta a tu proceso de aprendizaje?, ¿por qué?

BDA U3_ACT_12, 13, 14, 23, 24 y 25

**11 de febrero:**
**Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia**

La Asamblea General de las Naciones Unidas instauró en 2015 esta celebración con el objetivo de generar conciencia y dar visibilidad a las mujeres que forman parte del área de las ciencias.

Istock/PeopleImages

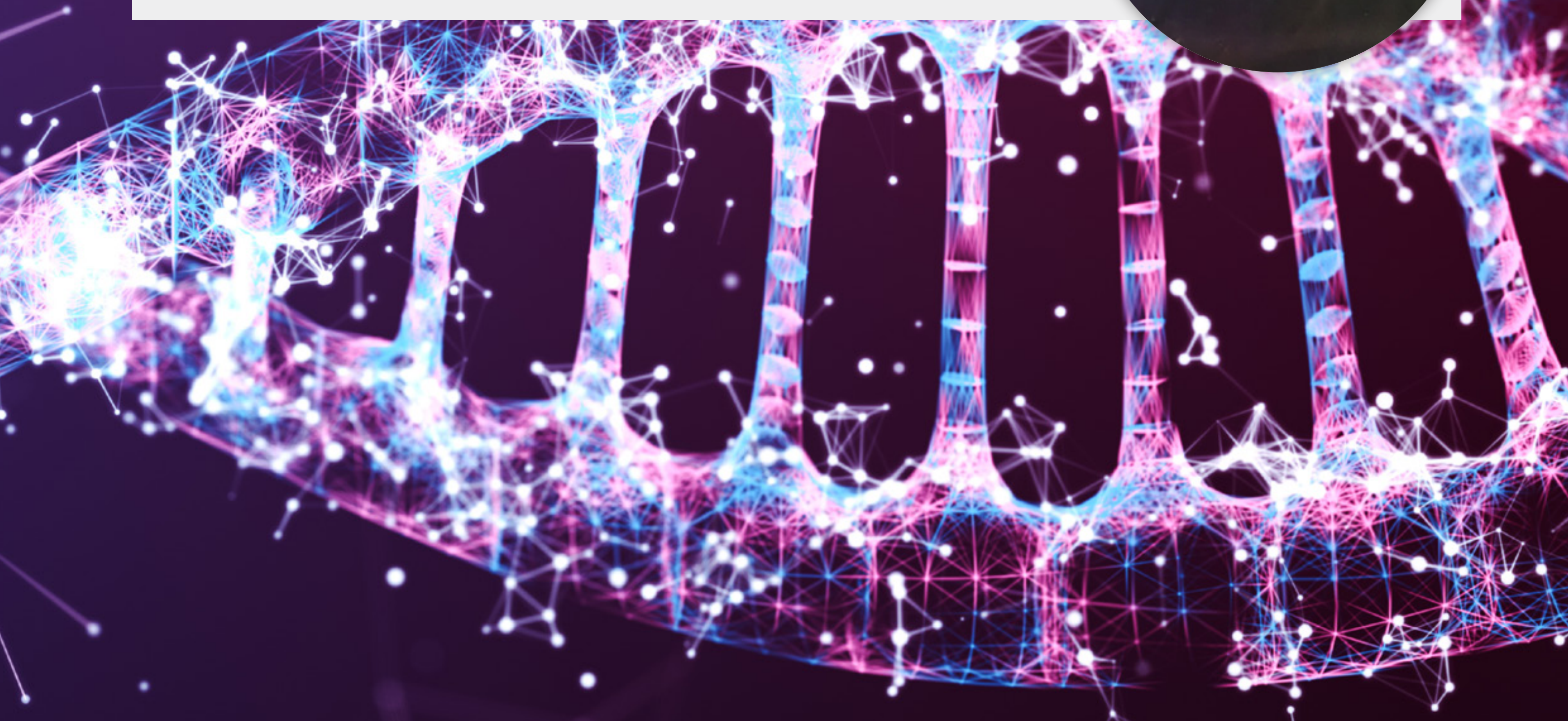
**En esta unidad** estudiarás las medidas de posición y utilizarás diversos gráficos para representar los datos. Además, aplicarás el principio multiplicativo para calcular la probabilidad de un evento.

# Unidad 4 Probabilidad y estadística

## Para reflexionar

Reúnete con un grupo de compañeros y respondan las siguientes preguntas:

- ¿A qué área de la ciencia crees que se dedica la mujer de la imagen? ¿Por qué?
- Investiguen sobre Eloísa Díaz, una mujer chilena destacada en el área de la ciencia.
- ¿Cómo se puede utilizar la probabilidad y estadística en el ámbito de la ciencia?



## Conocimientos previos

Para abordar esta unidad, puedes repasar los siguientes contenidos:

- Espacio muestral

  El espacio muestral ($\Omega$) del experimento aleatorio de lanzar dos monedas es: $\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$

- Cálculo de probabilidades

  En una caja hay fichas numeradas del 1 al 10 y se extrae una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una ficha con el número 4?

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{10}$$

- Medidas de tendencia central

  El promedio de los datos 1, 5, 8, 4, 5, 7, 6, 7, 5, 2 es:

$$\frac{1+5+8+4+5+7+6+7+5+2}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

BDA U4_ACT_1, 2 y 11

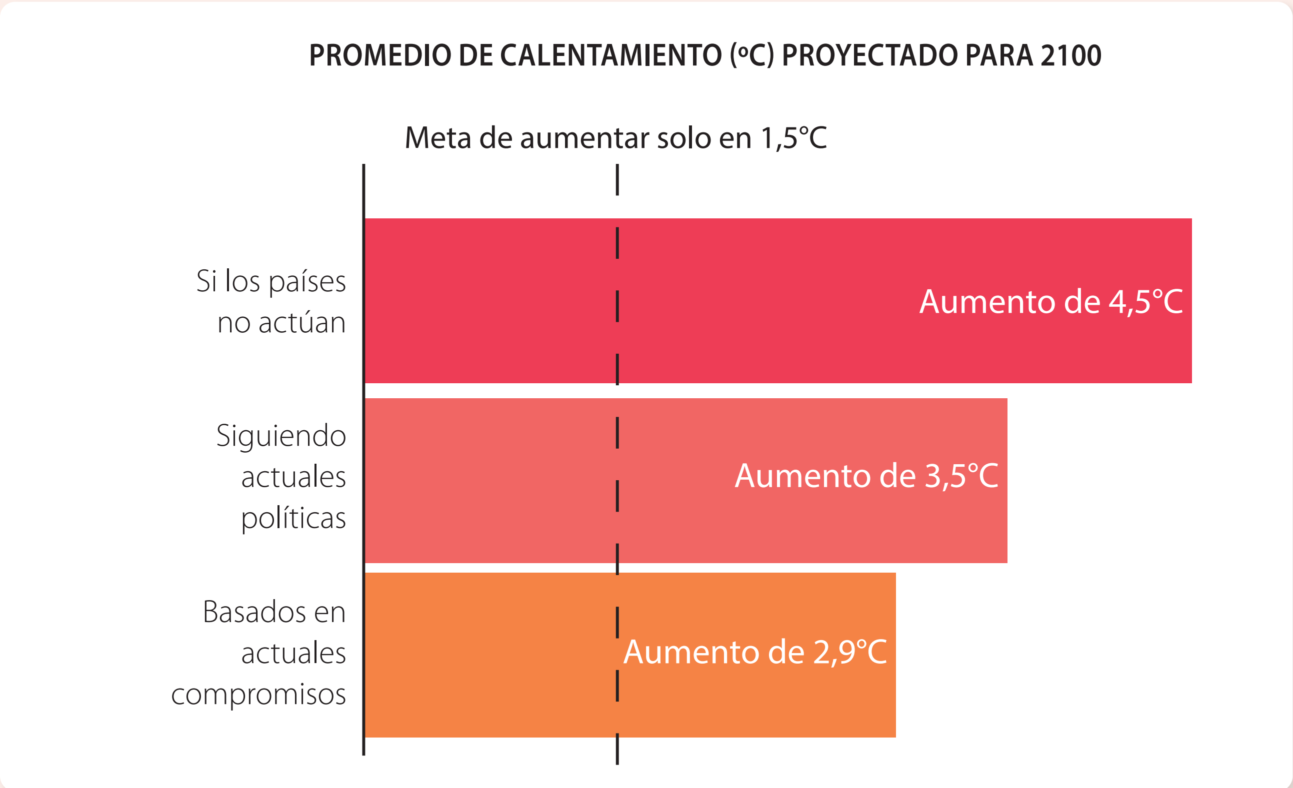
Lección

# 1 Estadística

## Representaciones gráficas

En los últimos años, los científicos dedicados a estudiar el cambio climático han argumentado que la temperatura global no debe aumentar más de 2 ºC para el final del siglo si se quiere evitar un impacto irreversible.

Los países que firmaron el acuerdo de París se comprometieron a limitar el aumento medio de la temperatura global a 2 ºC y seguir con los esfuerzos para no superar los 1,5 ºC.




*Fuente: Climate Action Tracker, actualizado en noviembre de 2017.*

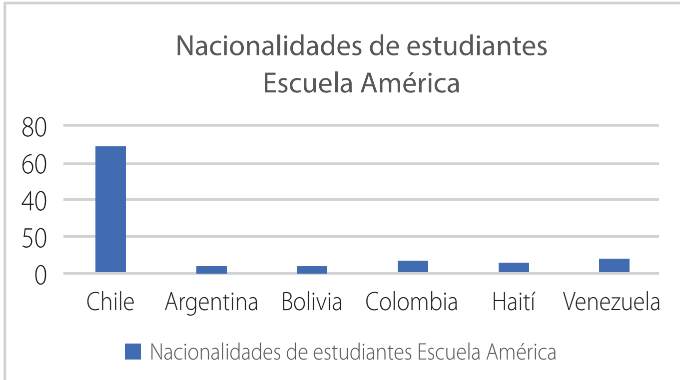
Responde las siguientes pregunta:

1. ¿Qué información nos entrega el gráfico de la imagen respecto del cambio climático?
2. ¿Por qué consideras que es importante comprender la información que se entrega en gráficos?
3. Investiga cuáles son los compromisos adquiridos por los países que firmaron el acuerdo de París.

Ejemplo 1

## Conecto con Historia, Geografía y Ciencias Sociales

En los siguientes gráficos se muestra la distribución de estudiantes chilenos y extranjeros en los octavos básicos de un colegio:


**1.** ¿Cuál de estos dos gráficos nos permite conocer las características culturales de una comunidad educativa? ¿Por qué?

El gráfico que muestra diversidad de culturas es el gráfico de barras, ya que él detalla las diferentes nacionalidades presentes en los octavos básicos del colegio. Por otro lado, el gráfico circular, muestra únicamente que existen estudiantes chilenos y estudiantes extranjeros, sin revelar las diferentes nacionalidades y culturas presentes.

**2.** A partir de los datos expuestos, ¿qué estrategias se podrían realizar para tener una comunidad educativa acogedora?

Algunas propuestas son:

- Generar ferias interculturales semanalmente, donde los estudiantes de diferentes nacionalidades puedan compartir con la comunidad su cultura, tradiciones, comidas típicas e historia.
- Incluir cápsulas de historia de Latinoamérica, donde los estudiantes puedan aprender la historia de países vecinos y su relación con la historia de Chile.
- Compartir información sobre la Ley de Migración que protege los derechos de las niñas, niños y adolescentes migrantes.

"La información sobre la cantidad de niños y adolescentes en Chile se actualizará en el próximo Censo que se realizará entre los meses de marzo a junio de 2024. El objetivo de un Censo es conocer cuántos habitantes hay en el país, la forma en la que estos viven y dónde lo hacen. En el siguiente link hay un video sobre los objetivos del Censo 2024:
*https://www.ine.gob.cl/censo/todo-sobre-el-censo*

CENSO 2024 Población y Vivienda Chile

Hace más de 30 años, Chile se comprometió a hacer todo lo necesario para cumplir con la **Convención sobre los Derechos del Niño**, norma internacional que establece los derechos de niños, niñas y adolescentes. En ella, todos los países que la han ratificado, han acordado que ellos y ellas tienen los mismos derechos, independiente de su situación migratoria y de la situación migratoria de sus padres.

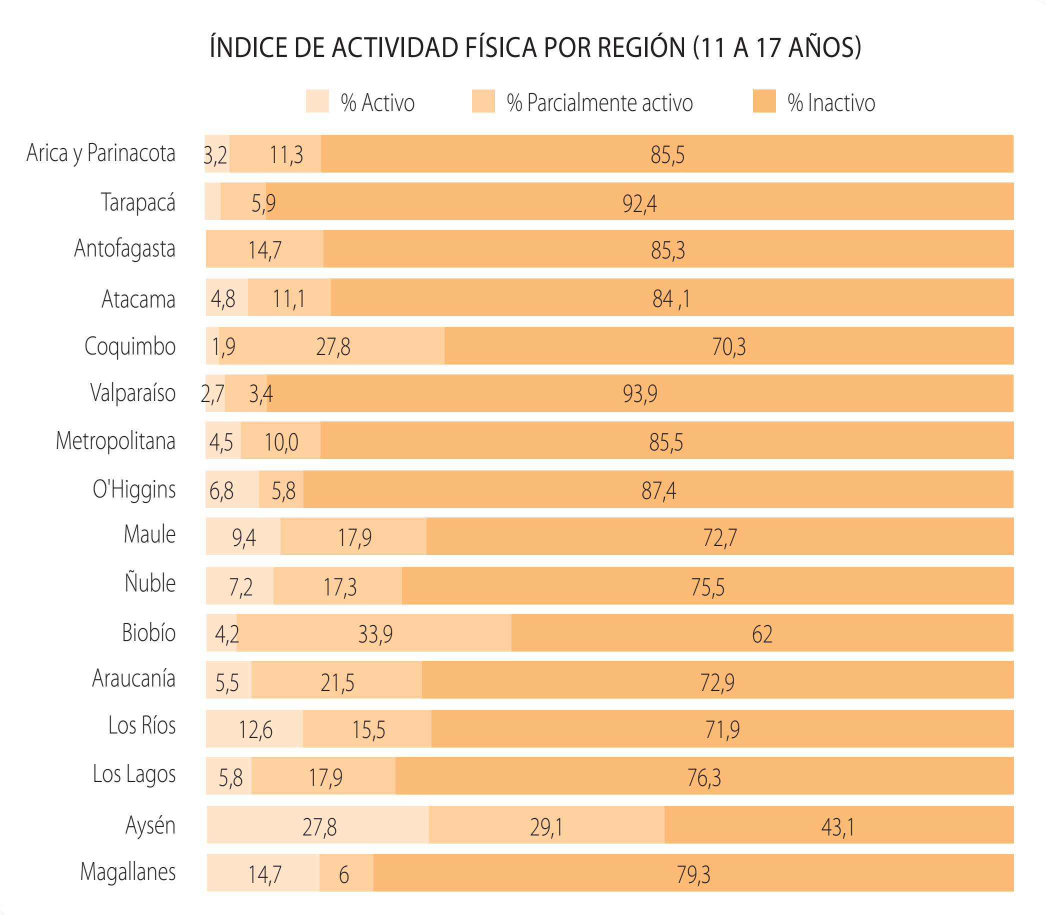
*https://www.defensorianinez.cl/wp-content/uploads/2022/07/Cartilla-Derechos-NNA-Migrantes-versi%C3%B3n-legibilidad.pdf*

Ejemplo 2

## Conecto con Educación Física y Salud

Desde hace mucho tiempo que los indicadores de cuánto deporte practican las personas en Chile son preocupantes. El año 2021 se realizó la *Encuesta Nacional de Hábitos de Actividad Física y Deporte* desarrollada por el Mindep y contó con la participación de más de seis mil personas, de diferentes regiones del país y edades.

En el siguiente gráfico se muestran los resultados acerca del índice de actividad física por región considerando a personas de 11 a 17 años:



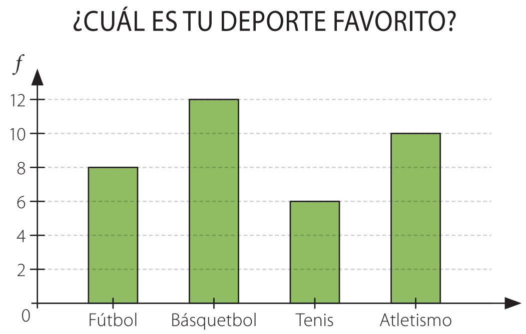

*Fuente: https://biblioteca.digital.gob.cl/bitstream/handle/123456789/3872/45159_informe_ejecutivo_enhaf_2021.pdf?sequence=1&isAllowed=y*

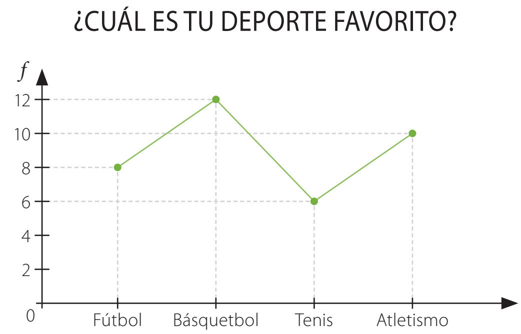
**Escribe algunas conclusiones a partir de la información del gráfico.**

- Se puede observar que los jóvenes de entre 11 y 17 años de la Región de Valparaíso son los más inactivos del país, contando con un 93,9 % de inactividad.
- Otras regiones con una alta inactividad son Tarapacá, Arica y Parinacota, Antofagasta, Atacama, la Región Metropolitana y O'Higgins.
- Por otro lado, la Región de Aysén cuenta con un 27,8 % de población de entre 11 y 17 activa, siendo la región con mayor nivel de actividad física del país.
- Se puede notar que las regiones que se ubican más al sur presentan un mayor índice de actividad física, mientras que las regiones de la zona norte muestran índices de actividad más bajos.

## Ejemplo 3

**Para la creación de los talleres del colegio, se les preguntó a los estudiantes cuál es su deporte favorito. Los datos se representaron en los siguientes gráficos:**




**¿Cuál de los gráficos crees que es más adecuado para representar la información anterior?**

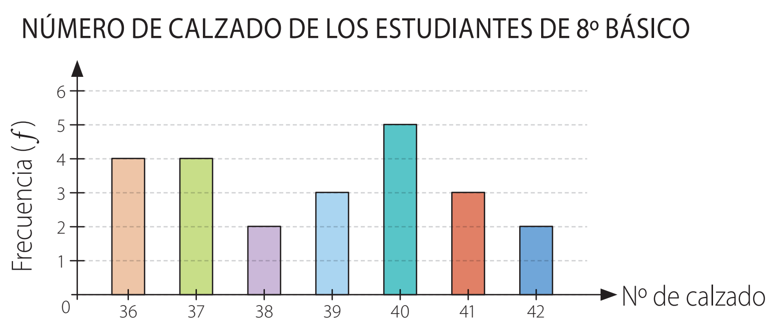
El gráfico de barras es el más adecuado para representar la información porque permite comparar las frecuencias de las distintas variables y no hay una variabilidad en el tiempo para la variable deporte.

## Aprende

- El **gráfico de barras** se utiliza para comparar las frecuencias de variables cualitativas o cuantitativas discretas. Pueden ser de barras simples o múltiples.
- Los **gráficos de líneas** son representaciones útiles para comunicar información referida a valores numéricos que varían en el tiempo.

## Ejemplo 4

**Los números de calzado de los estudiantes de un 8° básico se encuentran representados en el siguiente gráfico de barras. Escribe tres conclusiones a partir de él.**




- Al observar el gráfico, podemos notar que la barra de mayor altura corresponde al número 40. Esto quiere decir que el número de calzado que presenta mayor frecuencia es 40.
- Del mismo modo, los números de calzado que exhiben menor frecuencia son 38 y 42.
- Hay 23 estudiantes en el 8° básico. Esto se obtiene al sumar la frecuencia de cada número de calzado.

## Ejemplo 5

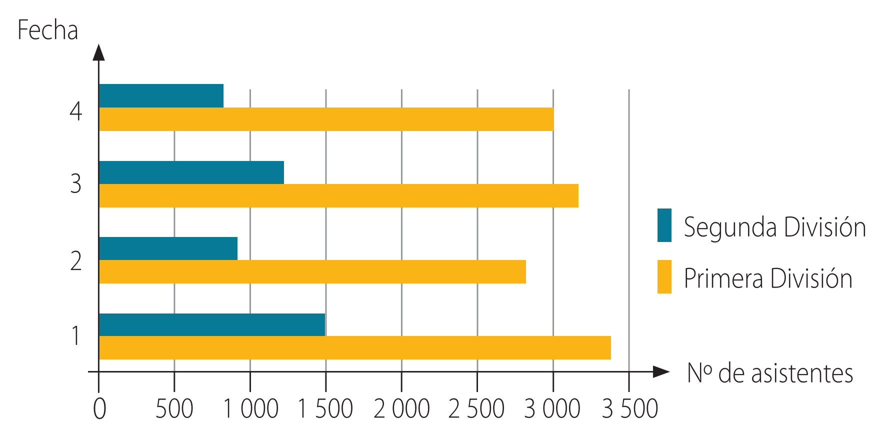
**La siguiente tabla muestra la cantidad de público que asistió a los partidos de 1ª y 2ª División de fútbol en las cuatro fechas que hubo en un mes. ¿Cuál es el gráfico más adecuado para representar la comparación entre las cantidades de público asistente?**

| Cantidad de público asistente en los partidos de fútbol en un mes | | |
|---|---|---|
| Fecha | Público 1ª División | Público 2ª División |
| 1 | 3 400 | 1 500 |
| 2 | 2 800 | 900 |
| 3 | 3 200 | 1 200 |
| 4 | 3 000 | 800 |

1. Para realizar una comparación entre el público asistente a los partidos de Primera y Segunda División, lo más recomendable es elaborar un gráfico de barras dobles, pues muestran comparaciones de datos entre dos conjuntos de datos similares por tramo. Considera que los gráficos de barras pueden ser horizontales o verticales.

2. Al construir el gráfico, se obtiene lo siguiente:

CANTIDAD DE PÚBLICO ASISTENTE EN LOS PARTIDOS DE FÚTBOL EN UN MES



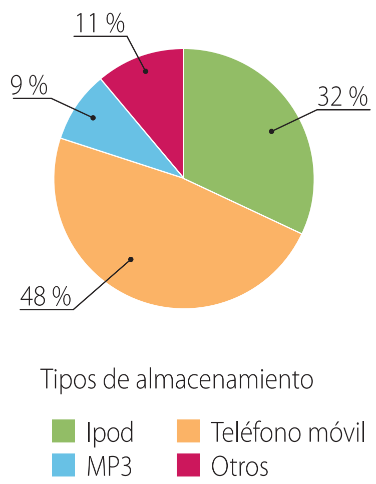

De esta manera, se pueden observar gráficamente las diferencias en la asistencia del público a los partidos de Primera y Segunda División.

Por ejemplo, se observa claramente que el público que asiste a los partidos de Primera División es mucho mayor que los que asisten a Segunda División. La fecha en la que asistieron más hinchas al estadio fue en la fecha 1 y la mayor diferencia de público entre ambas categorías fue en la fecha 4.

**Ejemplo 6**

Se realizó una encuesta a 300 estudiantes de un colegio sobre los dispositivos de almacenamiento de música que más utilizan. La información obtenida se representó en el siguiente gráfico:

DISPOSITIVOS DE ALMACENAMIENTO DE MÚSICA


¿Cuántos estudiantes prefieren almacenar su música en un Ipod o en un MP3?

1. Calcula los porcentajes.

   Ipod ▶ 32 % de 300 = 0,32 • 300 = 96 estudiantes.

   MP3 ▶ 9 % de 300 = 0,09 • 300 = 27 estudiantes.

2. Suma las cantidades obtenidas.

   $$96 + 27 = 123$$

   Luego, 123 estudiantes prefieren almacenar su música en un Ipod o en un MP3.

## Aprende

- En un **gráfico circular**, cada sector representa un valor de la variable expresado como un porcentaje. En general, este tipo de gráficos se utiliza para saber cómo se comporta una variable respecto de un todo.
- Para construir un gráfico circular, se traza una circunferencia, su centro y un radio. Luego, a partir del radio se trazan los ángulos adyacentes, que corresponden a cada uno de los porcentajes encontrados. Cada ángulo ($\alpha$) se puede calcular mediante la expresión:
  $\alpha = \dfrac{f \cdot 360^\circ}{n}$, en la que $n$ es el total de datos y $f$ la frecuencia absoluta de cada categoría o valor de la variable.

## Aprende

- El **histograma** es un gráfico formado por barras contiguas, en las que cada una representa un intervalo de valores de una variable cuantitativa continua. Sirve para expresar información sobre datos que están agrupados en intervalos.
- El **polígono de frecuencias** se obtiene uniendo los puntos correspondientes a la marca de clase de cada intervalo (punto medio del intervalo). Para completar el polígono, se considera un punto en la marca de clase del intervalo que esta al inicio y otro punto en la marca de clase del intervalo final del histograma, ambos con frecuencia 0.

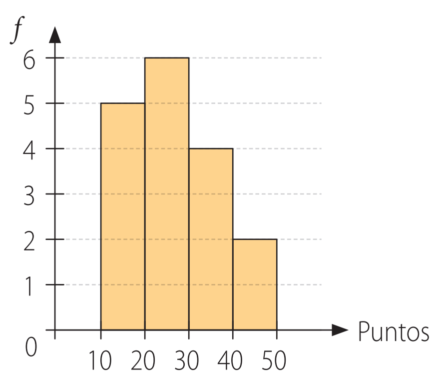
### Ejemplo 7

**En la siguiente tabla se muestran los puntos obtenidos por un grupo de estudiantes en una prueba. Construye el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente a los datos.**

| Puntos obtenidos en una prueba | | |
|---|---|---|
| Puntos | $f$ | Marca de clase |
| [10, 20[ | 5 | 15 |
| [20, 30[ | 6 | 25 |
| [30, 40[ | 4 | 35 |
| [40, 50] | 2 | 45 |

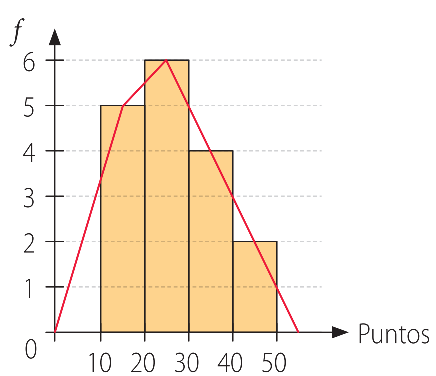
1. En los ejes coordenados marca las frecuencias en el eje vertical y los intervalos en el horizontal. Luego, sobre cada intervalo dibuja barras cuya altura corresponde a la frecuencia.

PUNTOS OBTENIDOS EN UNA PRUEBA



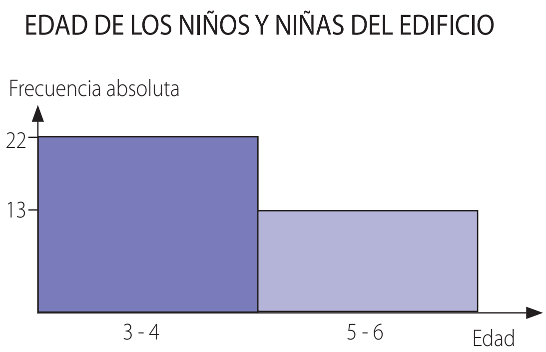

2. Para realizar el polígono de frecuencias une con una línea poligonal las marcas de clase de cada intervalo.

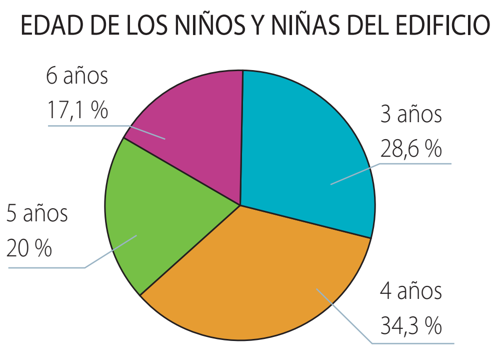
PUNTOS OBTENIDOS EN UNA PRUEBA

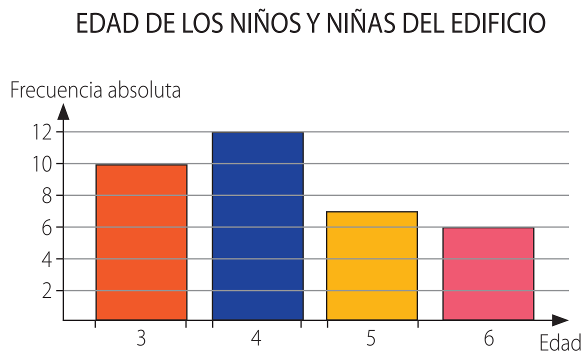


## Ejemplo 8

Daniela pasó el último fin de semana haciendo una tarea que consistía en averiguar las edades de los niños y niñas que viven en su edificio. La información que obtuvo la representó con distintos gráficos.




Si se quiere conocer la cantidad de niños y niñas que encuestó Daniela, ¿cuál gráfico es el más adecuado? ¿Y si se quiere comparar la cantidad de niños y niñas con respecto a su edad?

1. Para conocer la cantidad de niños y niñas que encuestó Daniela, es posible considerar el gráfico de barras y el histograma. El gráfico circular no es adecuado, ya que entrega los porcentajes, pero no la cantidad exacta de cada categoría.

   En este caso, se puede saber que Daniela encuestó a 35 niños y niñas.

2. Para comparar las categorías, sería más adecuado el gráfico circular o el gráfico de barras. En estos casos se puede observar la diferencia entre cada edad, o conocer cuál edad es la más o menos común en el edificio. En el caso del histograma, solo se podrían comparar los intervalos [3, 4] y [5, 6], lo que no entregaría mayor información.

   En la situación, se puede decir que la mayoría de los niños y niñas tienen 4 años, o que $\frac{1}{5}$ del total corresponde a niños y niñas de 5 años.

BDA U4_ACT_3, 12 , 13, 14 y 15

# Medidas de posición

El **salto de altura** es una prueba de atletismo que tiene por objetivo sobrepasar una barra horizontal, denominada listón, colocada a una altura determinada entre dos soportes verticales separados por unos 4 m.

En la imagen se observa a Stefka Kostadinova, atleta búlgara, ya retirada, especialista en salto de altura que fue campeona olímpica, mundial y europea y posee el récord del mundo vigente aún, con 2,09 m de altura en esta competencia.

*Fuente: https://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=kostadinova-stefka*

*https://revistabalcanes.com/wp-content/uploads/2013/10/kostadinova_07.jpg*

**Responde las siguientes preguntas y comenta con tus compañeros:**

1. ¿Por qué piensas que la mejor marca no ha podido ser superada durante tantos años? Investiga sobre Stefka Kostadinova para complementar tu respuesta.

2. ¿Qué sabías acerca del salto de altura? ¿Qué deporte practicas o te gustaría practicar?

## Ejemplo 1

La siguiente tabla muestra las mejores marcas femeninas en el salto de altura. ¿Cuál es la mediana de los datos?

MEJORES MARCAS FEMENINAS EN SALTO DE ALTURA

| Ranking | Marca | Atleta | País | Fecha | Lugar |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,09 | Stefka Kostadinova | Bulgaria | 30 de agosto de 1987 | Roma, Italia |
| 2 | 2,08 | Blanka Vlašić | Croacia | 31 de agosto de 2009 | Zagreb, Croacia |
| 3 | 2,07 | Liudmila Andonova | Bulgaria | 20 de julio de 1984 | Berlín, Alemania |
| | | Anna Chícherova | Rusia | 22 de julio de 2011 | Cheboksary, Rusia |
| 5 | 2,06 | Kajsa Bergqvist | Suecia | 26 de julio de 2003 | Eberstadt, Alemania |
| | | Hestrie Cloete | Sudáfrica | 31 de agosto de 2003 | París, Francia |
| | | Yelena Slesarenko | Rusia | 28 de agosto de 2004 | Atenas, Grecia |
| | | Ariane Friedrich | Alemania | 14 de junio de 2009 | Berlín, Alemania |
| | | Mariya Lasitskene | Unión Soviética | 6 de julio de 2017<br>20 de junio de 2019 | Lausanne, Suiza<br>Ostrava, República Checa |
| 10 | 2,05 | Tamara Býkova | Rusia | 22 de junio de 1984 | Kiev, Unión Soviética |
| | | Heike Henkel | Alemania | 31 de agosto de 1991 | Tokio, Japón |
| | | Inha Babakova | Ucrania | 15 de septiembre de 1995 | Tokio, Japón |
| | | Tia Hellebaut | Bélgica | 23 de agosto de 2008 | Pekín, China |
| | | Chaunté Lowe | Estados Unidos | 26 de junio de 2010 | Des Moines, Estados Unidos |

*Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Salto_de_altura#Femenino*

1 Ordena los datos de menor a mayor para hallar la mediana.

2,05 - 2,05 - 2,05 - 2,05 - 2,05 - 2,06 - 2,06 - 2,06 - 2,06 - 2,06 - 2,07 - 2,07 - 2,08 - 2,09

2 Determina entre qué valores estará la mediana. Como el conjunto tiene 14 datos, la mediana corresponde al promedio de los datos ubicados en la posición 7 y la posición 8.

2,05 - 2,05 - 2,05 - 2,05 - 2,05 - 2,06 - $\boxed{2{,}06 - 2{,}06}$ - 2,06 - 2,06 - 2,07 - 2,07 - 2,08 - 2,09

3 Calcula el promedio de los datos centrales. Como los valores son iguales, el promedio es 2,06.

En conclusión, se puede decir que el 50 % de las mejores marcas está por debajo de los 2,06 m, o bien, que el 50 % de los datos está por encima de los 2,06 m.

Ejemplo 2

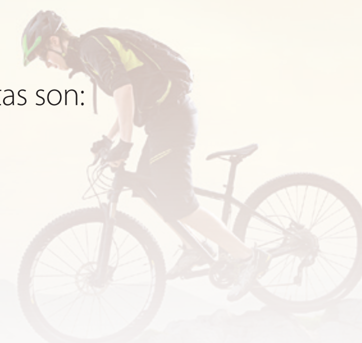
## Conecto con Educación Física y Salud

■ RUTA
Es una especialidad del ciclismo en que el deportista junto con su máquina recorre distancias urbanas y rurales en forma individual y grupal.

■ PISTA
Es una especialidad del ciclismo que se practica en una pista o velódromo que puede tener distintas medidas, 500, 333, 250 o 200 m.

■ BMX
El BMX se originó a comienzos de la década de 1970 en California cuando los jóvenes intentaban imitar a los campeones de motocross con sus bicicletas.

■ BMT
Especialidad del ciclismo que tiene lugar en terrenos montañosos o en aquellos que presentan una orografía similar, con pendientes y rutas sinuosas.



Las estaturas, en centímetros, de los seleccionados de un grupo de ciclistas son:

160, 168, 164, 170, 162, 166, 172, 166,
168, 164, 162, 160, 168, 170, 160, 162

**Determina los valores que dividen al conjunto de datos en 4 grupos con igual cantidad de elementos.**

1. Ordena los datos de menor a mayor.

   160, 160, 160, 162, 162, 162, 164, 164, 166, 166, 168, 168, 168, 170, 170, 172

2. Divide el grupo de datos en 4 partes iguales.

   160, 160, 160, 162 | 162, 162, 164, 164 | 166, 166, 168, 168 | 168, 170, 170, 172

3. Como los valores pedidos se encuentran entre dos datos, calculas el promedio de ellos en cada caso.

   Entonces los valores pedidos son: 162, 165 y 168.

## Aprende

Una de las **medidas de posición** son los **cuartiles** ($Q_k$, con $k = 1, 2, 3$), que corresponden a tres valores que dividen una distribución de datos en cuatro partes iguales.

| Primer cuartil ($Q_1$) | Segundo cuartil ($Q_2$) | Tercer cuartil ($Q_3$) |
|---|---|---|
| Es el valor que separa el 25 % de los datos de la distribución. | Es el valor que separa el 50 % de los datos de la distribución. | Es el valor que separa el 75 % de los datos de la distribución. |
| 25 % | 50 % | 75 % |
| $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ |

Para calcular el cuartil $Q_k$, se deben ordenar los $n$ datos en forma creciente y calcular $\frac{n \cdot k}{4}$.

- Si resulta un número entero, $Q_k$ es igual al promedio entre el dato que se ubica en esa posición y el dato siguiente.
- Si resulta un número decimal, $Q_k$ es igual al dato que ocupa la posición $\left[\frac{n \cdot k}{4}\right] + 1$.
- Considera que la parte entera de un número $x$ ($[x]$) equivale al entero más grande menor o igual a $x$. Por ejemplo: $[2,1] = 2$; $[3,8] = 3$.

### Ejemplo 3

**Los siguientes datos representan los puntajes correspondientes a la clasificatoria para una competición:**

100 - 121 - 134 - 123 - 142 - 118 - 123 - 142 - 126 - 127 - 131 - 98 - 116

**Si para participar en la competición se debe estar sobre el 50 % de los mejores puntajes de todos los que rindieron la prueba, ¿cuál es el puntaje de corte?**

1. Ordena los datos de forma creciente.

   98 - 100 - 116 - 118 - 121 - 123 - 123 - 126 - 127 - 131 - 134 - 142 – 142

2. Identifica el puntaje que divide a los datos en dos partes iguales.

   $$Q_2 = \frac{13 \cdot 2}{4} = 6,5$$

   Como resulta un número decimal, calculas $[6,5] + 1$, que resulta $6 + 1 = 7$.

   98 - 100 - 116 - 118 - 121 - 123 - $\boxed{123}$ - 126 - 127 - 131 - 134 - 142 – 142

3. El dato encerrado es el valor de $Q_2$, el cual separa el 50 % de los datos de la distribución. Además, este valor equivale a calcular la mediana.

   Luego, para participar en la competición, se debe obtener un puntaje superior a 123.

## Ejemplo 4

Los datos que se presentan a continuación corresponden a los resultados de una encuesta sobre la cantidad de horas diarias que un grupo de personas utiliza internet.

3 - 2 - 2 - 4 - 1 - 2 - 3 - 2 - 3 - 2 - 1 - 0 - 1 - 2 - 1
2 - 1 - 3 - 1 - 0 - 3 - 4 - 3 - 4 - 0 - 2 - 0 - 2 - 4 - 0

¿Cuál es el tercer cuartil? ¿Qué representa?

1. Construye una tabla para organizar los datos.

| Cantidad de horas que un grupo de personas usa internet | | |
|---|---|---|
| Cantidad de horas | f | F |
| 0 | 5 | 5 |
| 1 | 6 | 11 |
| 2 | 9 | 20 |
| 3 | 6 | 26 |
| 4 | 4 | 30 |

2. Calcula el tercer cuartil ($Q_3$). Recuerda que se puede utilizar la expresión $\frac{n \cdot k}{4}$, en la que $n$ es la cantidad total de datos.

$$Q_3 = 30 \cdot \frac{3}{4} = 22{,}5 \;\blacktriangleright\; [22{,}5] + 1 = 23$$

3. Identifica en la tabla el dato que ocupa la posición 23.

| Cantidad de horas que un grupo de personas usa internet | | |
|---|---|---|
| Cantidad de horas | f | F |
| 0 | 5 | 5 |
| 1 | 6 | 11 |
| 2 | 9 | 20 |
| 3 | 6 | 26 |
| 4 | 4 | 30 |

Luego, el tercer cuartil es 3, por lo que se puede concluir que el 75 % de las personas encuestadas utiliza internet 3 horas o menos diariamente.

## Aprende

Los **percentiles** ($P_k$, con $k = 1, 2, 3, \ldots, 99$) corresponden a los 99 valores de una distribución que la dividen en 100 partes iguales. La diferencia entre dos percentiles consecutivos corresponde al 1 % de la distribución.

Para calcular el percentil $P_k$, se deben ordenar los $n$ datos en forma creciente y calcular $\frac{n \cdot k}{100}$.

- Si resulta un número entero, $P_k$ es igual al promedio entre el dato que se ubica en esa posición y el dato siguiente.
- Si resulta un número decimal, $P_k$ es igual al dato que ocupa la posición $\left[\frac{n \cdot k}{100}\right] + 1$.

## Ejemplo 5

**Se quiere seleccionar a un grupo de estudiantes para competir en las olimpiadas de atletismo. Las marcas (en metros) obtenidas por los estudiantes en una prueba son las siguientes:**

52,4 - 56,3 - 57,5 - 65,3 - 65,3 - 66,5 - 66,8 - 67,9 - 68,7
69,3 - 70,2 - 71,4 - 72,4 - 74,7 - 74,9 - 75,5 - 75,6

**Si se selecciona el 90 % de las mejores marcas, ¿cuántos estudiantes no fueron considerados?**

1. Se debe calcular $P_{10}$, ya que los estudiantes no seleccionados equivalen al 10 % y deben ser los de menores marcas.

$$P_{10} = \frac{17 \cdot 10}{100} = \frac{170}{100} = 1{,}7$$

Como 1,7 es un número decimal, se calcula [1,7] + 1 = 1 + 1 = 2.

2. Como los datos ya están ordenados de forma creciente, identifica aquel dato que ocupa la posición 2.

| Posición | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dato | 52,4 | 56,3 | 57,5 | 65,3 | 65,3 | 66,5 | 66,8 | 67,9 | 68,7 | 69,3 | 70,2 | 71,4 | 72,4 | 74,7 | 74,9 | 75,5 | 75,6 |

3. Luego, el valor de $P_{10}$ corresponde a 56,3, por lo tanto, 2 estudiantes no fueron seleccionados.

## Ejemplo 6

**A partir de la información de la tabla, determina el intervalo donde se ubica el percentil 20.**

| Estatura de un grupo de estudiantes | | |
|---|---|---|
| Estatura (m) | f | F |
| [1,30; 1,40[ | 2 | 2 |
| [1,40; 1,50[ | 5 | 7 |
| [1,50; 1,60[ | 8 | 15 |
| [1,60; 1,70[ | 11 | 26 |
| [1,70; 1,80] | 4 | 30 |

1. El percentil 20 es aquel valor bajo el cual se encuentran el 20 % de los datos. Entonces, se tiene que:

$$20\ \%\ \text{de}\ 30 \rightarrow 0{,}2 \cdot 30 = 6$$

2. Identifica el primer intervalo, cuya frecuencia acumulada ($F$) iguala o supera este valor.

Puedes observar que el percentil 20 se encuentra en el intervalo [1,40; 1,50[ m.

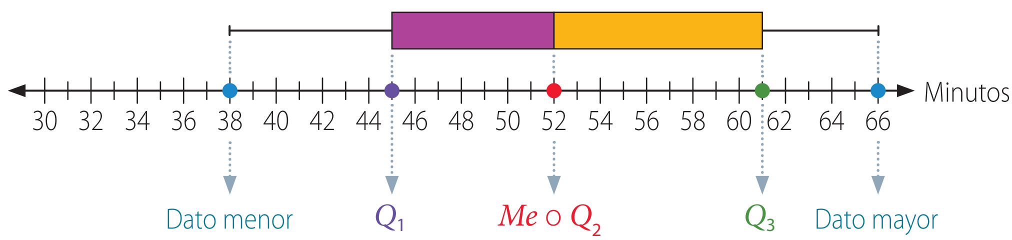
## Aprende

Un **diagrama de cajón** permite visualizar algunas características de la población a partir de las medidas de tendencia central y de posición.

Al observar un diagrama de cajón es posible obtener conclusiones respecto de la distribución de la variable en estudio. Si uno de los cajones tiene mayor área, significa que los datos que se ubican entre determinados cuartiles están más dispersos.

### Ejemplo 7

**Los minutos que tardaron los estudiantes en responder un examen están representados en el siguiente diagrama de cajón:**



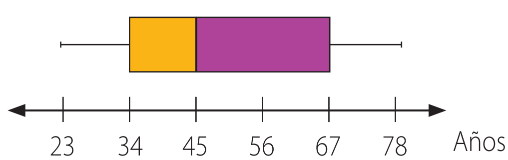

**¿Al cabo de cuántos minutos el 50 % de los estudiantes contestaron el examen? ¿Cuántos minutos tardaron en responder el examen todos los estudiantes?**

1. La mediana separa el 50 % de los datos, por lo tanto, a los 52 min la mitad de los estudiantes terminó el examen.
2. Para determinar el tiempo que tardaron en responder el examen todos los estudiantes basta observar el dato mayor de la distribución de datos. Es decir, tardaron 66 minutos en responder el examen.

### Ejemplo 8

**Las edades, en años, de un grupo de personas están representadas en el siguiente diagrama de cajón. Describe la distribución de datos.**

EDAD DE UN GRUPO DE PERSONAS



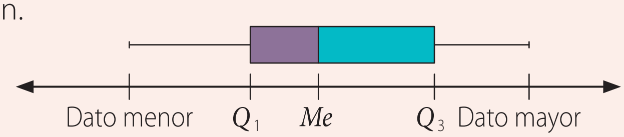

El cajón morado tiene mayor área que el cajón amarillo, entonces, las edades ubicadas entre $Q_2$ y $Q_3$ están más dispersas que las situadas entre $Q_1$ y $Q_2$.

## Aprende

Para construir un **diagrama de cajón** se traza una recta graduada a partir de los datos y se construye un rectángulo (cajón) cuyos extremos deben estar ubicados sobre $Q_1$ y $Q_3$.

Así, la medida del largo de la caja es $Q_3 - Q_1 = Ric$, en que $Ric$ corresponde al recorrido intercuartil o rango intercuartil, es decir, a la variabilidad de los datos con respecto a la mediana ($Me$).

Dentro del cajón se traza una línea vertical en el lugar de la mediana ($Me$); de esta manera, se divide el conjunto de datos en dos partes porcentualmente iguales. Luego, se trazan dos líneas, a ambos lados del cajón, desde sus extremos hasta los valores del dato menor y del mayor de la distribución.




## Ejemplo 9

**Las notas obtenidas por los estudiantes de dos 8° básicos en una evaluación son las siguientes:**

| | |
|---|---|
| Notas 8° A | 6,5 - 5,2 - 7,0 - 4,8 - 3,5 - 5,8 - 6,6 - 3,7 - 4,5 - 5,2 - 6,3 - 7,0 - 5,5 - 6,5<br>4,9 - 6,8 - 5,6 - 5,5 - 5,8 - 6,0 - 5,5 - 4,8 - 4,2 - 5,9 - 7,0 - 6,4 - 4,0 - 4,0 |
| Notas 8° B | 5,4 - 5,4 - 7,0 - 6,8 - 3,4 - 4,8 - 6,2 - 3,8 - 5,5 - 6,2 - 6,6 - 6,0 - 5,0 - 6,4<br>3,8 - 3,8 - 6,6 - 5,7 - 5,5 - 7,0 - 6,5 - 5,8 - 3,2 - 5,5 - 6,6 - 6,8 - 7,0 - 3,2 |

**Construye un diagrama de cajón para cada distribución de datos.**

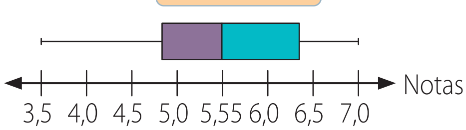
1. Determina los valores necesarios para construir el diagrama de cajón correspondiente a cada curso:

| 8° A | |
|---|---|
| Dato menor | 3,5 |
| Dato mayor | 7,0 |
| Primer cuartil | 4,8 |
| Mediana | 5,55 |
| Tercer cuartil | 6,45 |
| Recorrido intercuartil | 1,65 |

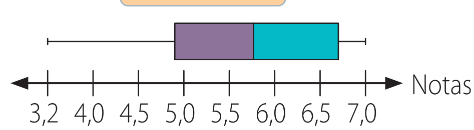
| 8° B | |
|---|---|
| Dato menor | 3,2 |
| Dato mayor | 7,0 |
| Primer cuartil | 4,9 |
| Mediana | 5,75 |
| Tercer cuartil | 6,6 |
| Recorrido intercuartil | 1,7 |

2. Construye los diagramas de cajón.

Notas 8° A




Notas 8° B




### Herramientas tecnológicas

Para realizar los cálculos, puedes utilizar una calculadora *online* en el siguiente sitio:
*https://www.geogebra.org/scientific*

## Herramientas tecnológicas

**Sigue las instrucciones para determinar las medidas de posición de un conjunto de datos.**

1. En una hoja de cálculo escribe "Edades" en la celda **A2**, y en la misma columna **A** anota las edades de 13 de tus compañeros y compañeras. Luego, escribe "Cuartiles" y "Percentiles" en las celdas **F1** e **I1**, respectivamente.

2. En la celda **C3** escribe moda; en la celda **C4** escribe media, y en la celda **C5** escribe mediana.

3. En la celda **F3** escribe **q1**; en la celda **F4** escribe **q2**, y en la celda **F5** escribe **q3**.

4. En la celda **I3** escribe **p1**; en la celda **I4** escribe **p10**; en la celda **I5** escribe **p25**; en la celda **I6** escribe **p50**; en la celda **I7** escribe **p75**; y en la celda **I8** escribe **p90**.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | Cuartiles | | | Percentiles | |
| 2 | Edades | | | | | | | | | |
| 3 | 13 | | moda | | | q1 | | | p1 | |
| 4 | 13 | | media | | | q2 | | | p10 | |
| 5 | 14 | | mediana | | | q3 | | | p25 | |
| 6 | 13 | | | | | | | | p50 | |
| 7 | 14 | | | | | | | | p75 | |
| 8 | 14 | | | | | | | | p90 | |
| 9 | 13 | | | | | | | | | |
| 10 | 14 | | | | | | | | | |
| 11 | 13 | | | | | | | | | |
| 12 | 13 | | | | | | | | | |
| 13 | 14 | | | | | | | | | |
| 14 | 15 | | | | | | | | | |
| 15 | 15 | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | |

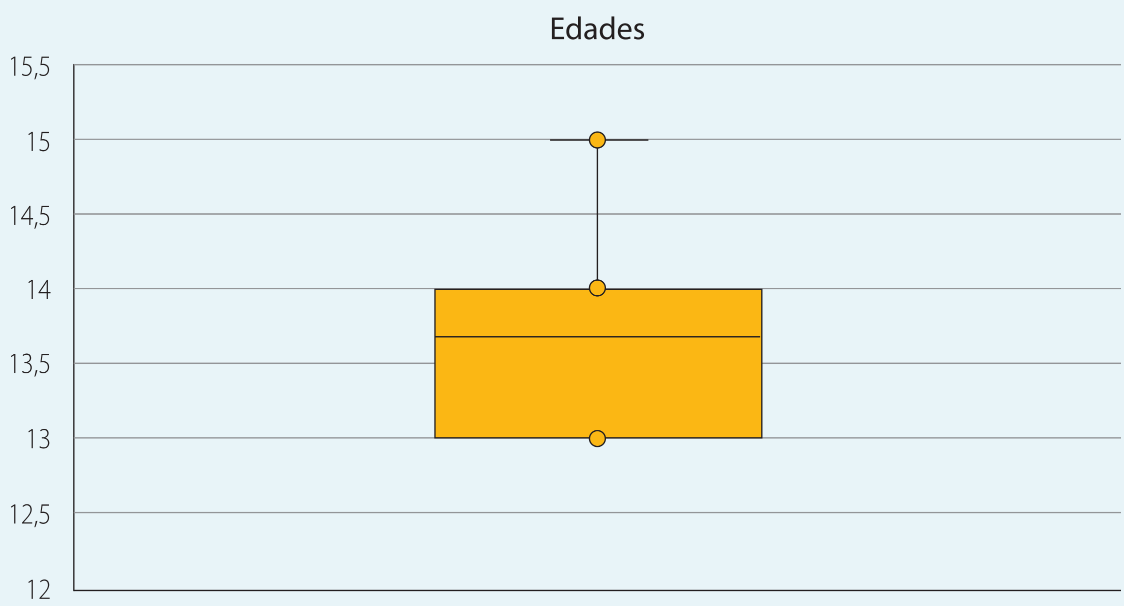
5. En las celdas correspondientes escribe las siguientes fórmulas para calcular cada valor.

| Celda | Fórmula | ¿Qué hace? |
|---|---|---|
| D3 | =MODA(A3:A15) | Calcula la moda |
| D4 | =PROMEDIO(A3:A15) | Calcula le media |
| D5 | =MEDIANA(A3:A15) | Calcula la mediana |
| G3 | =CUARTIL(A3:A15;1) | Calcula el cuartil 1 |
| G4 | =CUARTIL(A3:A15;2) | Calcula el cuartil 2 |
| G5 | =CUARTIL(A3:A15;3) | Calcula el cuartil 3 |
| J3 | =PERCENTIL(A3:A15;0,01) | Calcula el percentil 1 |
| J4 | =PERCENTIL(A3:A15;0,1) | Calcula el percentil 10 |
| J5 | =PERCENTIL(A3:A15;0,25) | Calcula el percentil 25 |
| J6 | =PERCENTIL(A3:A15;0,5) | Calcula el percentil 50 |
| J7 | =PERCENTIL(A3:A15;0,75) | Calcula el percentil 75 |
| J8 | =PERCENTIL(A3:A15;0,9) | Calcula el percentil 90 |

**6.** En este caso se obtiene lo siguiente:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | Cuartiles | | | Percentiles | | |
| 2 | Edades | | | | | | | | | | |
| 3 | 13 | | moda | | | q1 | | | p1 | 13 | |
| 4 | 13 | | media | | | q2 | | | p10 | 13 | |
| 5 | 14 | | mediana | | | q3 | | | p25 | 13 | |
| 6 | 13 | | | | | | | | p50 | 14 | |
| 7 | 14 | | | | | | | | p75 | 14 | |
| 8 | 14 | | | | | | | | p90 | 14,8 | |
| 9 | 13 | | | | | | | | | | |
| 10 | 14 | | | | | | | | | | |
| 11 | 13 | | | | | | | | | | |
| 12 | 13 | | | | | | | | | | |
| 13 | 14 | | | | | | | | | | |
| 14 | 15 | | | | | | | | | | |
| 15 | 15 | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | |

**7.** También puedes construir en la hoja de cálculo el diagrama de cajón que representa la situación. En este caso, el diagrama de cajón fue construido de forma vertical.




¿Crees que el uso de tecnologías ayuda en tu proceso de aprendizaje? Comenta con tus compañeros.

BDA U4_ACT_4, 5, 16 y 17

Lección

# 2 Probabilidad

## Principio multiplicativo

**Rapa Nui** es una isla de Chile perteneciente a la región de Valparaíso.

Es uno de los principales destinos turísticos del país debido a su naturaleza y por sus enigmáticas e imponentes estatuas, llamadas mōai.

Para la tradición rapa nui existe un infinito mundo de seres y fuerzas sobrenaturales, lo que hace pensar que los habitantes de la isla siempre estaban en constante conexión con las fuerzas del universo. Eso explica la creencia de un dios de la tierra, del viento o el hecho que una roca tenga su propio espíritu. En ese contexto, es posible comprender el carácter sagrado que tiene el elemento tierra, que para la cultura rapa nui es sinónimo de kāiŋa (territorio, matriz, útero).

*Fuente: http://chileprecolombino.cl/pueblos-originarios/rapa-nui/arte/*

"Uno de los elementos que caracteriza al pueblo Rapa Nui, se relaciona con la actividad escultórica. Los relatos y la tradición oral indican que la actividad escultórica se inició en el Rano Raraku o volcán Raraku, territorio en el cual los escultores se organizaron para construir este legado cultural reconocido en el mundo entero.

*Gettyimages/Volanthevist*

**Investiga sobre el pueblo Rapa Nui y responde las siguientes preguntas:**

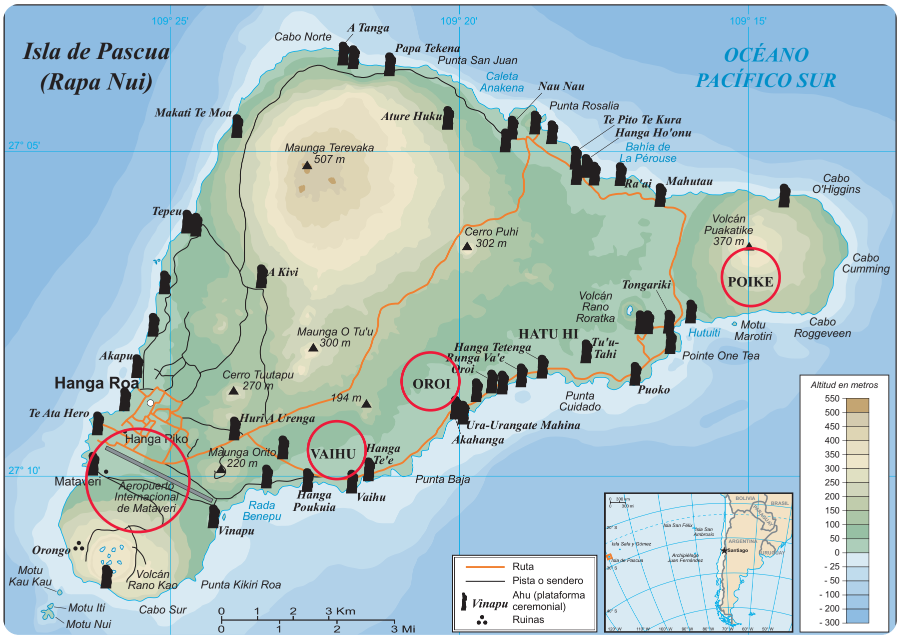
**1.** ¿Cómo llegó el pueblo a la isla?

**2.** ¿Qué son los mōai y cuántos hay en la isla?

**3.** ¿Por qué crees que hay mōai que están enterrados? Comenta con tu curso.

## Ejemplo 1

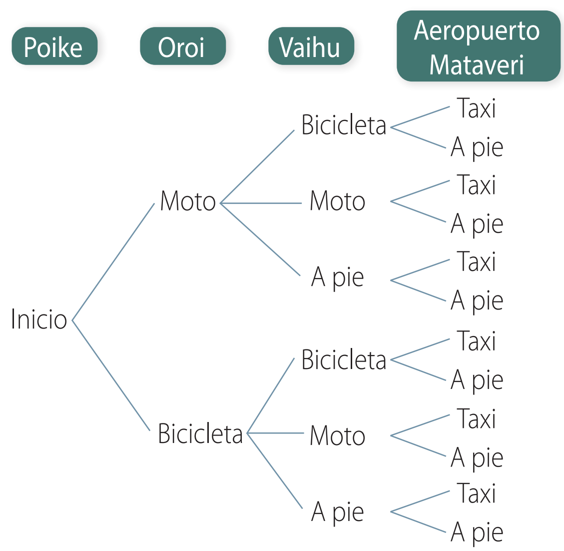
La siguiente imagen corresponde al mapa topográfico de Rapa Nui. En cada esquina se ubica un volcán inactivo. Al norte se encuentra el Maunga Terevaka, que es el punto más alto de la isla; por el sudeste se ubica la península del Poike, con el volcán Puakatiki, y al sudoeste se encuentra el Rano Kau, en cuyo interior existen diversas lagunas.




Wikimedia Commons/Eric Gaba, traducido por Osmar Valdebenito

Supón que para llegar de Poike a Oroi una persona tiene la opción de viajar en moto o bicicleta; luego, de Oroi a Vaihu lo puede hacer en bicicleta, moto o a pie, y de Vaihu al aeropuerto de Mataveri puede viajar en taxi o a pie. ¿De cuántas maneras puede realizar su viaje si pasa por todos los destinos en el orden indicado?

1. Representa todas las posibles combinaciones de viaje. Para ello, puedes construir un diagrama de árbol.



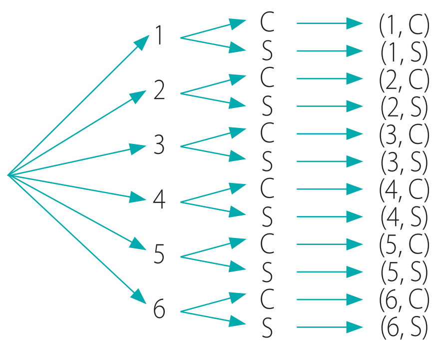

2. Al observar el diagrama, puedes notar que hay 12 opciones para realizar el viaje.

## Aprende

El **diagrama de árbol** permite representar los resultados posibles de un experimento aleatorio. Cada ramificación del diagrama corresponde a un elemento del espacio muestral y cada camino, a un posible resultado del experimento.

### Ejemplo 2

**Se realiza el experimento aleatorio de lanzar un dado de seis caras (1, 2, 3, 4, 5 o 6) y una moneda (C o S). Representa los resultados con un diagrama de árbol y determina cuántos son los resultados posibles.**

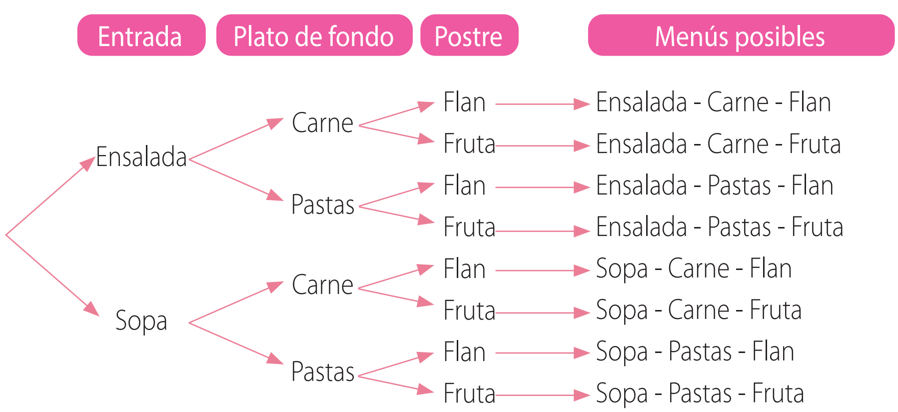



En el experimento de lanzar una moneda y un dado hay 12 resultados posibles, los cuales corresponden al espacio muestral.

### Ejemplo 3

**En el menú del colegio se ofrecen diferentes opciones. Hay 2 platos de entrada (ensalada o sopa), 2 platos de fondo (carne al jugo o pastas) y 2 postres (flan o fruta). ¿Cuántas combinaciones del menú se pueden hacer con estas opciones?**

1. Representa las combinaciones en un diagrama de árbol.




2. Entonces, se pueden formar 8 menús diferentes.

¿Crees que es útil representar datos en un diagrama de árbol?, ¿por qué?

## Aprende

- El **principio multiplicativo** es una técnica de conteo en la que si un conjunto está compuesto por $n_1$ elementos, otro conjunto por $n_2$ elementos, y así sucesivamente con $k$ conjuntos diferentes, entonces, la cantidad de maneras de combinar los elementos de los conjuntos es:

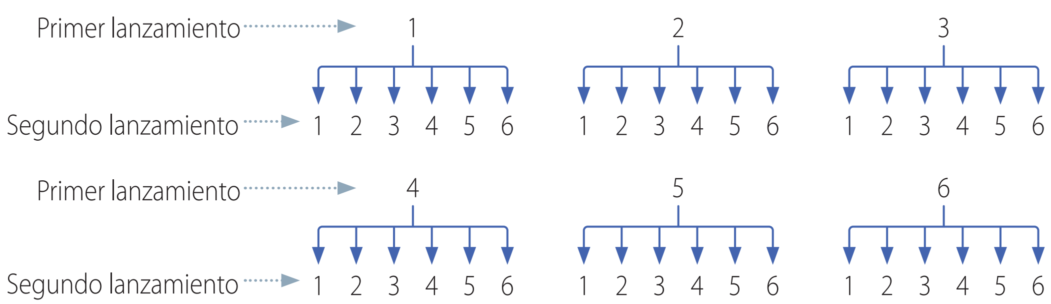
$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

- La cardinalidad de un conjunto $A$ ($\#A$) corresponde a la cantidad de elementos contenidos en él.

## Ejemplo 4

**Al lanzar un dado de seis caras dos veces, ¿cuál es la cantidad de resultados posibles?**

1. Para determinar la cantidad de resultados posibles, puedes utilizar un diagrama de árbol, en el cual se escriben de forma ramificada los elementos de cada lanzamiento.




Puedes observar que hay 36 resultados posibles y que cada camino corresponde a una combinación posible, por ejemplo, (1, 1) o (2, 3).

2. También es posible determinar la cantidad de resultados posibles utilizando una tabla.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

3. Asimismo, también es posible utilizar el principio multiplicativo para resolver. Luego, la cantidad de combinaciones son 36, ya que en cada lanzamiento hay 6 posibles resultados (1, 2, 3, 4, 5 y 6) y son 2 lanzamientos, es decir, $6 \cdot 6 = 36$.

## Ejemplo 5

**Alejandro tiene 3 camisetas (roja, verde y azul) y 2 pantalones (negro, café). ¿De cuántas formas distintas puede escoger una camiseta con un pantalón?**

1. Represente las posibles combinaciones que puede elegir Alejandro.


2. Para calcular de cuántas formas distintas puede escoger una camiseta con un pantalón, utiliza el principio multiplicativo:

$$\underbrace{\boxed{3}}_{\text{Cantidad de camisetas}} \cdot \underbrace{\boxed{2}}_{\text{Cantidad de pantalones}} = \boxed{6} \rightarrow \text{Posibles combinaciones}$$

## Ejemplo 6

**Al remodelar una casa, se puede escoger entre las siguientes opciones: el piso puede ser de madera, cerámica o alfombra. El techo puede tener o no vigas a la vista. Las paredes pueden ser de color blanco o amarillo. ¿Cuántas opciones hay para remodelar la casa si se elige una opción en cada categoría?**

1. Determina la cantidad de elementos de cada conjunto.

| | |
|---|---|
| A : Piso | #A = 3 |
| B : Techo | #B = 2 |
| C : Paredes | #C = 2 |

2. La cantidad de formas que hay para remodelar la casa está dada por:

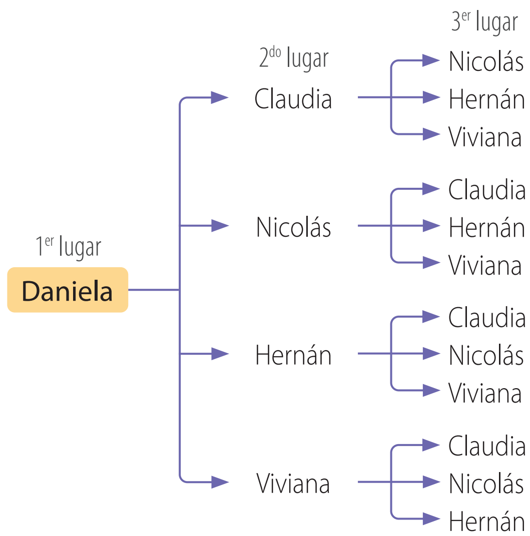
$$\underbrace{\boxed{3}}_{\text{3 opciones para el piso}} \cdot \underbrace{\boxed{2}}_{\text{2 opciones para el techo}} \cdot \underbrace{\boxed{2}}_{\text{2 opciones para las paredes}} = \boxed{12} \rightarrow \text{Cantidad de formas distintas para remodelar la casa.}$$

## Ejemplo 7

**En un festival se otorgan premios a los tres primeros lugares. Quedaron seleccionadas 5 personas: Claudia, Nicolás, Hernán, Viviana y Daniela. Si los jueces otorgaron el primer lugar a Daniela, ¿de cuántas formas se podrían entregar los premios?**

1. Las combinaciones las puedes ver en un diagrama de árbol.

   Observa que en cada rama se considera a los participantes que no se ubican en la rama anterior, ya que una misma persona no puede obtener más de un lugar simultáneamente.




2. La cantidad de formas en que se pueden entregar los premios está dada por:

$$1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$$

## Ejemplo 8

**Por seguridad, Antonia cambia mensualmente la clave de su cuenta de ahorros. Para esto, utiliza todas las combinaciones de cuatro números que puede realizar con los dígitos del 1 al 4 de modo que en cada clave no se repite ninguno. En estas condiciones, ¿cuánto tiempo pasa Antonia sin repetir ninguna clave?**

1. Considera que cada clave debe ser de 4 números y que los dígitos no se pueden repetir.
2. Aplica el principio multiplicativo para determinar la cantidad de claves posibles. Ten en cuenta que como los dígitos no se pueden repetir, la cantidad de opciones va disminuyendo, es decir, hay 4 opciones para el primer dígito, 3 para el segundo, 2 para el tercero y 1 opción para el cuarto dígito.

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

3. Entonces, pasan 24 meses en los que Antonia no repite ninguna clave.

BDA U4_ACT_6, 18

# Cálculo de probabilidades

Antes de iniciar un partido de **vóleibol**, el primer árbitro realiza un sorteo en presencia de los capitanes de ambos equipos.

Para ello, generalmente utiliza una moneda que es lanzada al aire. El ganador del sorteo es quien decide el derecho a sacar o recibir el saque o el lado del campo.

*Fuente: https://paravolleypanam.com/wp-content/uploads/2020/01/Official-Sitting-Volleyball-Rules-2017-2020-Spanish.pdf*

El vóleibol sentado se ha convertido en uno de los principales deportes de equipo del programa paralímpico. Una de las reglas es que, en todo momento, una parte del torso del atleta debe estar en contacto con el suelo y se permiten bloqueos de servicio y ataques.


Para conocer más acerca de este deporte, puedes visitar el siguiente sitio: *https://www.worldparavolley.org/*

*Gettyimages/Picture alliance*

Responde las siguientes preguntas:

**1.** En un partido de vóleibol, ¿cuál es la probabilidad que tiene un equipo de hacer el saque inicial del juego?

**2.** ¿Qué otro deporte utiliza una moneda para determinar qué equipo inicia el juego? Averigua y luego comenta con tu curso.

**3.** Indaga acerca de deportistas destacados en este deporte y comenta con tu curso.

## Aprende

Se dice que dos sucesos son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Si en un experimento aleatorio todos los resultados posibles son equiprobables y el espacio muestral es finito, entonces, se puede calcular la probabilidad de ocurrencia mediante la regla de Laplace.

La **regla de Laplace** establece que la probabilidad de ocurrencia de un suceso $A$ es el cociente entre la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos posibles ($\Omega$).

$$P(A) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

### Ejemplo 1

**¿Cuál es la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 al lanzar un dado de seis caras?**

1. Determina el espacio muestral ($\Omega$) y el suceso $A$: obtener un múltiplo de 3.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \#\Omega = 6$$
$$A = \{3, 6\} \qquad \#A = 2$$

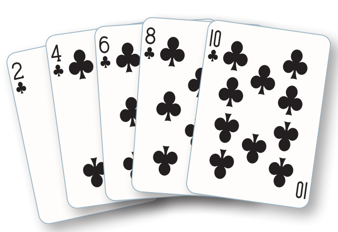
2. Calcula la probabilidad de $A$: obtener un múltiplo de 3.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

### Ejemplo 2

**Se seleccionan todas las cartas de trébol de una baraja y se extrae una de ellas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta con un número par?**

1. Observa que en total hay 13 cartas y de ellas hay 5 con un número par.



2. Luego, la probabilidad de $A$: extraer una carta con un número par está dada por:

$$P(A) = \frac{5}{13}$$

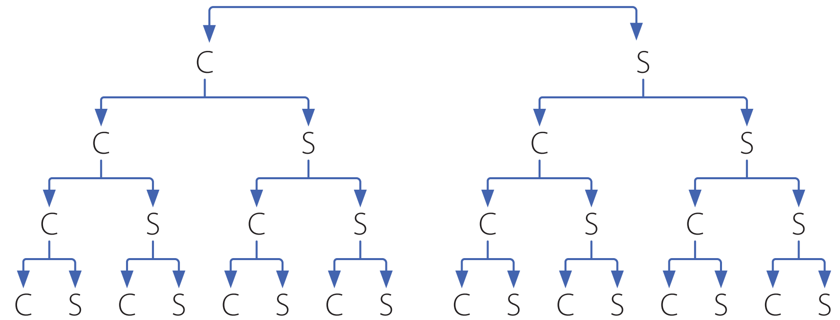
## Aprende

La probabilidad de un suceso se puede expresar como una fracción, como un número decimal o como un porcentaje. Por ejemplo, la probabilidad de obtener una cara al lanzar una moneda es de 0,5 o de $\frac{1}{2}$ o de un 50 %.

## Ejemplo 3

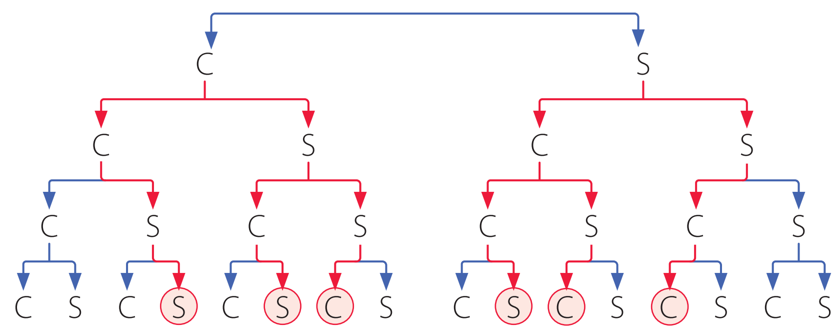
**En el experimento aleatorio de lanzar cuatro monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener solo dos caras?**

1. Determina el espacio muestral del experimento. Para eso, puedes construir un diagrama de árbol.




Observa que la cantidad de elementos es 16, es decir, hay 16 casos posibles.

2. Si el suceso $A$ consiste en obtener solo dos caras, entonces, la cantidad de elementos de $A$ es 6. En el diagrama se puede ver de la siguiente manera:




3. Finalmente, calcula la probabilidad usando la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

4. La probabilidad de obtener solo dos caras al lanzar 4 monedas es de $\frac{3}{8}$, de 0,375 o de un 37,5 %.

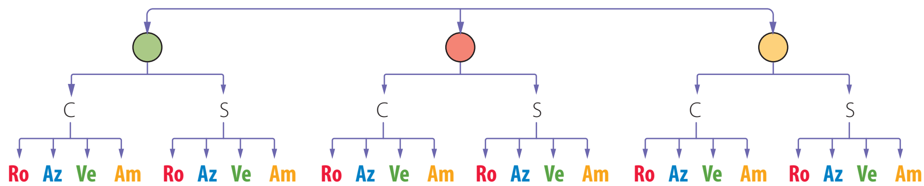
## Ejemplo 4

Un experimento aleatorio consiste en extraer al azar una bolita de una caja, luego lanzar una moneda y finalmente girar una ruleta.



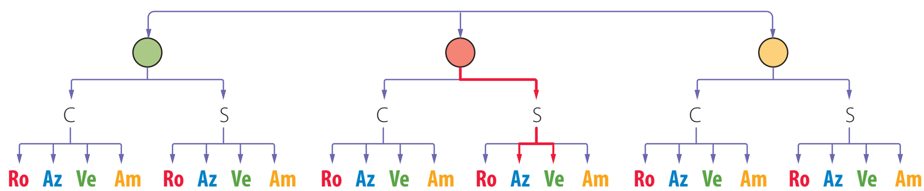
¿Cuál es la probabilidad de obtener una bolita roja, un sello en la moneda y el color verde o azul en la ruleta?

1. Representa la situación con un diagrama de árbol.




Puedes observar que la cantidad de combinaciones posibles es 24.

2. Luego, considera el suceso $A$: obtener una bolita roja, un sello en la moneda y el color verde o azul en la ruleta.




3. Finalmente, calcula la probabilidad.

$$P(A) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Entonces, la probabilidad de obtener una bolita roja, un sello en la moneda y el color verde o azul en la ruleta es de $\frac{1}{12}$.

¿En qué otras situaciones puedes aplicar estos contenidos?

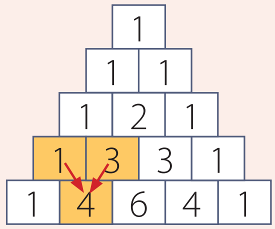
**Herramientas** tecnológicas

Para reforzar la equivalencia entre fracciones, decimales y porcentajes, puedes utilizar el siguiente recurso: *https://www.geogebra.org/m/pagKgma9#material/tvWNZpuS*

## Aprende

El **triángulo de Pascal** es un triángulo de números enteros, infinito y simétrico de derecha a izquierda y viceversa.

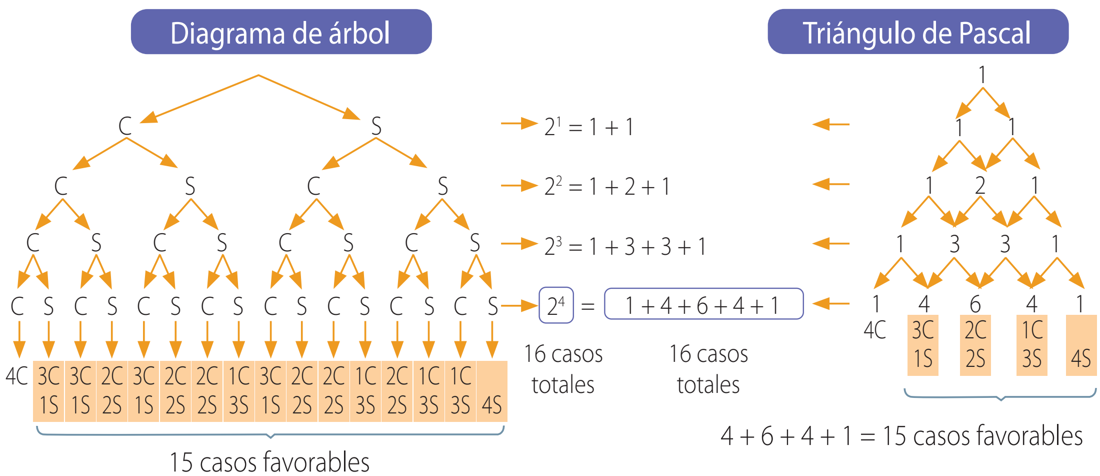
Para construirlo, cada número en el triángulo es la suma de los dos que están situados por encima de él.




## Ejemplo 5

**Se lanzarán 4 monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello?**

1. Utiliza un diagrama de árbol para representar la situación y relaciónalo con el triángulo de Pascal.



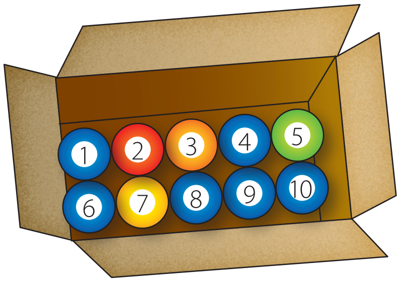

2. Los casos favorables al suceso $A$: obtener al menos un sello, son 15 y la cantidad de casos posibles es 16.

$$P(A) = \frac{15}{16}$$

Luego, la probabilidad de que al lanzar 4 monedas al aire el resultado contenga al menos un sello es $\frac{15}{16}$.

## Ejemplo 6

**En una caja se tienen 10 bolitas iguales numeradas del 1 al 10, como las que se muestran en la imagen.**




**¿Cuál es la probabilidad de que al extraer al azar una bolita, esta sea de color azul y esté numerada con un valor mayor que 4?**

1. Para responder debes identificar cuáles son los casos en que al extraer una bolita se cumpla con las condiciones pedidas.

   Puedes definir los sucesos $A$ y $B$ de la siguiente forma:

   $A$: obtener una bolita numerada con un valor mayor que 4.

   $B$: obtener una bolita de color azul.

2. Luego, puedes analizar cuáles son los casos favorables a ambos sucesos:

   Los casos favorables al suceso $A$ son: {5, 6, 7, 8, 9, 10}.

   Debes notar que la bolita con el número 4 no está incluida en este conjunto, ya que no cumple con la condición.

   Los casos favorables al suceso $B$ son: {1, 4, 6, 8, 9, 10}.

3. Al utilizar los conjuntos anteriores, puedes determinar cuál es la cantidad de bolitas que cumplen con la condición pedida.

   $$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
   $$B = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

   Las bolitas que cumplen con ambas condiciones son {6, 8, 9, 10}.

4. Sea el suceso $C$: extraer una bolita con un número mayor que 4 y de color azul.

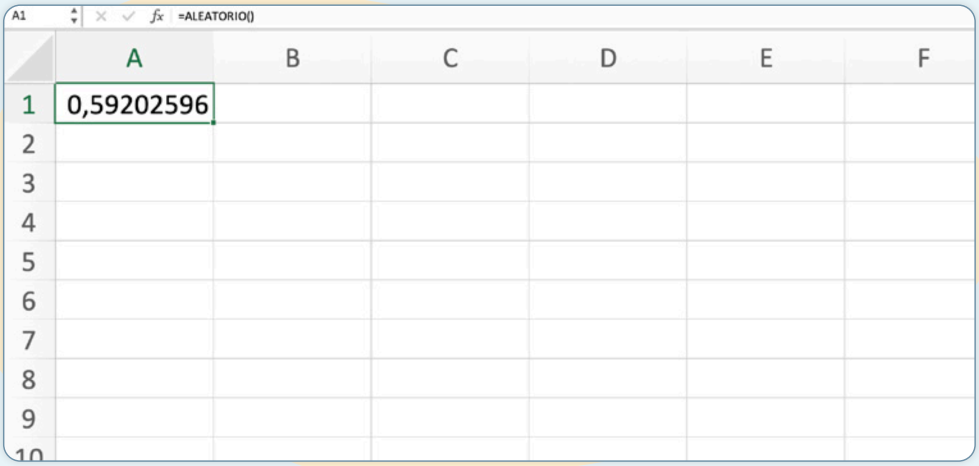
   $$P(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

   Entonces, la probabilidad de extraer una bolita con un número mayor que 4 y de color azul es de $\frac{2}{5}$, o de 0,4, o de 40 %.

## Herramientas tecnológicas

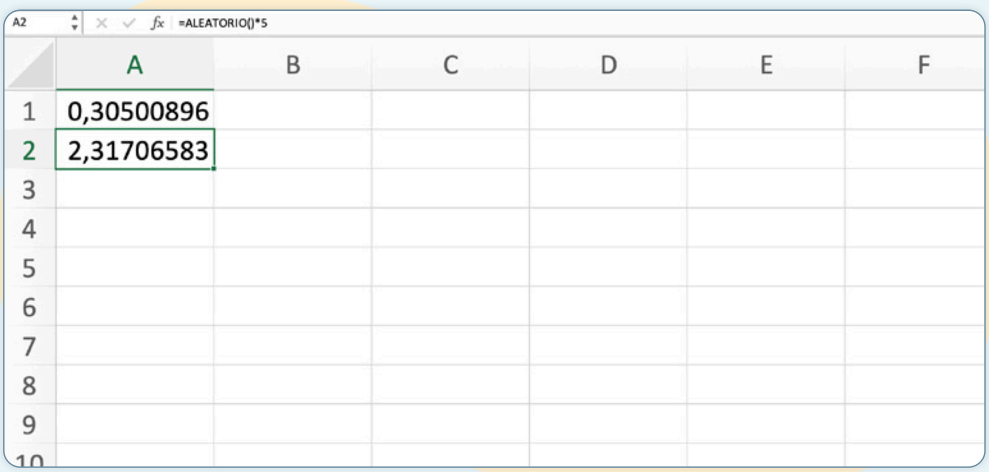
**En esta actividad deberás usar una planilla de cálculo para simular el lanzamiento de un dado. Sigue las instrucciones que se presentan a continuación.**

**1.** En una hoja de cálculo escribe en la celda **A1** la función **=ALEATORIO()**.
Esta función creará un número decimal aleatorio entre 0 y 1. Cada vez que hagas un cambio en la hoja de cálculo, se generará un nuevo número.




**2.** Se quiere obtener un número entre 1 y 6, que son las posibilidades de un dado.

Escribe en la celda **A2** la función **=ALEATORIO()*5**. Al escribir esta función, el número que se cree estará multiplicado por 5, por lo que el número generado es un decimal entre 0 y 5.



3. Para quitar la parte decimal, escribe en otra celda la función: =REDONDEAR(ALEATORIO() *5; 0).

El primer argumento de la función es el número que se quiere redondear (el número generado aleatoriamente) y el segundo argumento, el número de decimales al que se quiere que se redondee ese número (0 decimales).

Se obtendrán números enteros desde el 0 al 5.

A3 =REDONDEAR(ALEATORIO() *5; 0)

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00845358 | | | | |
| 2 | 4,22910856 | | | | |
| 3 | 1 | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |

4. Para que los posibles números sean desde el 1 al 6, basta escribir en la celda **A4** la función **=REDONDEAR(ALEATORIO()*5; 0) + 1**. Esta función le suma 1 a cada número generado aleatoriamente.

5. Copia esta función desde la celda **B1** hasta la celda **B20**.

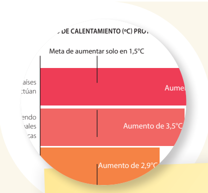
B8 =REDONDEAR(ALEATORIO()*5; 0) + 1

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,90965025 | 5 | | | | |
| 2 | 2,24356695 | 1 | | | | |
| 3 | 4 | 4 | | | | |
| 4 | 4 | 2 | | | | |
| 5 | | 3 | | | | |
| 6 | | 3 | | | | |
| 7 | | 5 | | | | |
| 8 | | 4 | | | | |
| 9 | | 2 | | | | |
| 10 | | 5 | | | | |

BDA U4_ACT_7, 8, 9, 10, 19, 20, 21, 22

# Síntesis

## Unidad 4: Probabilidad y estadística




### Lección 1 » Estadística

**Representaciones gráficas**

- **Gráficos de barras**: se utilizan para comparar las frecuencias de variables cualitativas o cuantitativas discretas.
- **Histogramas**: son gráficos formados por barras contiguas, en que cada una representa un intervalo de valores de una variable cuantitativa continua. Sirve para expresar información sobre datos que están agrupados en intervalos.
- **Gráficos de líneas**: permiten representar variables cuantitativas que varían en el tiempo.
- **Gráficos circulares**: se emplean para mostrar información que se expresa en porcentajes o razones respecto de un total, que se representa por el círculo completo.

**¿Qué gráfico podría ser el más adecuado para representar las siguientes variables?**

- Temperaturas registradas cada 1 hora durante un día en una ciudad.

  Gráfico de líneas para poder ver tendencias de la temperatura en un día.

- Resultados de las elecciones de presidente de curso.

  Gráfico de barras debido a que son variables cualitativas.

- Estatura de un grupo de estudiantes de la Región de Arica y Parinacota.

  Un histograma dado que las estaturas se pueden representar por intervalos.

**Medidas de posición**

Las medidas de posición dividen una distribución ordenada en grupos con la misma cantidad de datos.

Para calcular el cuartil $Q_k$ se deben ordenar los n datos en forma creciente y calcular $\frac{n \cdot k}{4}$.

- Si resulta un número entero, $Q_k$ es igual al promedio entre el dato que se ubica en esa posición y el dato siguiente.
- Si resulta un número decimal, $Q_k$ es igual al dato que ocupa la **posición** $\left[\frac{n \cdot k}{4}\right] + 1$.

- Lo que has aprendido sobre estadística, ¿con qué conocimientos previos lo puedes relacionar?
- ¿Cómo aporta a tu aprendizaje respetar las opiniones de tus compañeros y compañeras?

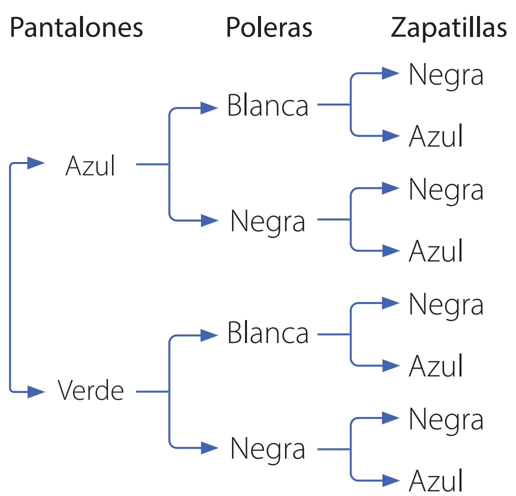
## Lección 2 » Probabilidad

### Principio multiplicativo

El **principio multiplicativo** es una técnica de conteo en la que si un conjunto está compuesto por $n_1$ elementos, otro conjunto por $n_2$ elementos, y así sucesivamente con $k$ conjuntos diferentes, entonces, la cantidad de maneras de combinar los elementos de los conjuntos es:

$$n_1 \bullet n_2 \bullet \dots \bullet n_k$$

**Se tienen 2 pantalones (azul, verde), 2 poleras (blanca, negra) y 2 pares de zapatillas (negra, azul). ¿Cuántas tenidas de ropa se pueden formar?**




$2 \bullet 2 \bullet 2 = 8$

Se pueden formar 8 tenidas diferentes.

### Cálculo de probabilidades

La **regla de Laplace** establece que la probabilidad de ocurrencia de un suceso $A$ es el cociente entre la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos posibles ($\Omega$).

$$P(A) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Por ejemplo, en la situación anterior, la probabilidad de que se elija el pantalón azul, la polera negra y las zapatillas azules es de $\frac{1}{8}$, ya que hay 1 caso favorable de 8 casos posibles.

- ¿Qué conocías acerca del cálculo de probabilidades? ¿Qué sabes ahora?
- ¿Crees que debes repasar algún contenido?, ¿por qué?

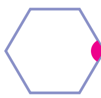
BDA U4_ACT_23, 24 y 25

# GLOSARIO

## A

**Abscisa:** valor que se representa en el eje horizontal o eje $X$ en el plano cartesiano.

**Ángulo interior:** es el formado por dos lados contiguos de un polígono y se encuentra dentro de este.




**Área:** medida de una superficie.

## B

**Base de una potencia:** corresponde al factor que se repite en una potencia.

## C

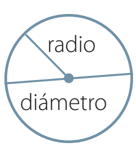
**Círculo:** región o área del plano delimitada por una circunferencia.

**Coeficiente numérico:** constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

**Cuadrado:** cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores miden 90° y sus lados tienen la misma medida.

## D

**Diámetro:** Segmento que une dos puntos de una circunferencia y que pasa por el centro de esta.




## E

**Ecuación:** igualdad entre expresiones algebraicas que solo se cumple para algunos valores de la incógnita.

**Evento:** subconjunto del espacio muestral.

**Experimento aleatorio:** experimento en el que no se tiene certeza de lo que pasará. Por lo tanto, no se puede predecir su resultado.

**Expresión algebraica:** términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción.

**Exponente:** término de una potencia que indica cuántas veces multiplica la base por sí misma.

## F

**Factor literal:** parte no numérica de un término algebraico.

Coeficiente numérico

$12x^2y$ ← Factor literal

**Frecuencia absoluta:** número de veces que se repite un determinado valor en la variable estadística que se estudia.

## I

**Incógnita:** cada una de las variables que aparecen en una ecuación o inecuación que son desconocidas.

**Inecuación:** desigualdad en la que aparecen una o más incógnitas.

## L

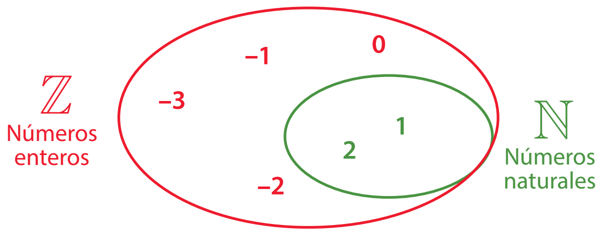
**Longitud:** distancia entre dos puntos.

## M

**Mediana ($Me$):** valor que ocupa el lugar central en una distribución de datos.

## N

**Números enteros ($\mathbb{Z}$):** conjunto numérico formado por los números naturales ($\mathbb{N}$), el cero y los inversos aditivos de los números naturales.




$\mathbb{Z} = \{^{-\infty}, ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., ^{+\infty}\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., ^{+\infty}\}$

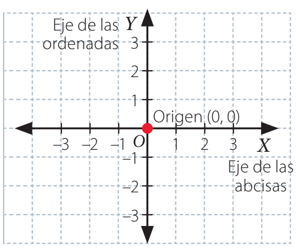
**Número decimal:** número formado por una parte entera y una parte decimal separada por una coma decimal.

**Número mixto:** número representado por un número entero y por una fracción.

## O

**Ordenada:** valor que se representa en el eje vertical (eje $Y$) en el plano cartesiano.

**Origen:** punto en el que se intersecan los ejes del plano cartesiano. Se representa con el punto (0, 0).




## P

**Perímetro:** longitud del borde de una figura. En un polígono se calcula como la suma de las medidas de sus lados.

**Pi ($\pi$):** número irracional que corresponde a la razón entre el perímetro y el diámetro de un círculo.

**Plano cartesiano:** es el plano euclidiano provisto de un sistema de coordenadas en el que se distinguen dos ejes perpendiculares que determinan cada punto en el plano.

**Porcentaje:** razón cuyo consecuente es 100. Se representa por el símbolo %.

**Potencia:** expresión usada para indicar la multiplicación de un factor por sí mismo una determinada cantidad de veces.

**Probabilidad:** posibilidad de ocurrencia de un evento. Toma valores entre 0 y 1, pero también se puede escribir como porcentaje.

**Proporción:** igualdad de dos razones.

## R

**Radio:** segmento de recta que une el centro de una circunferencia con un punto de ella.

**Razón:** comparación de dos números mediante el cociente entre ellos.

**Rectángulo:** paralelógramo en el que sus ángulos interiores miden 90° y sus lados opuestos tienen la misma medida.

**Regla de Laplace:** forma de calcular la probabilidad de un evento, determinando el cociente entre los casos favorables y los casos posibles, en un experimento aleatorio, cuando sus resultados son equiprobables.

## T

**Término algebraico:** cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

## V

**Vector:** segmento orientado determinado por su origen y su extremo. Se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido.

# BIBLIOGRAFÍA


- Busch, B. y Watson, E. (2023). *La ciencia del aprendizaje: 77 estudios que todo docente debe conocer.* México: Trillas.
- Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T., Cea, F., Randolph, V., & Medel, L. (2015). *La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente*. Revista Estudios de Política Educativa, 1(1), 64-105.
- Gardner, H. (2017). *Inteligencias múltiples*. (2da ed. ampliada y revisada). Paidós.
- MINEDUC. (2015). *Bases curriculares. 7° básico a 2° medio. Unidad de Curriculum y Evaluación (UCE*). Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC (2017). *Orientaciones para la apropiación de las Bases Curriculares 7°básico a 2°medio*. Santiago: Autor.
- MINEDUC (2023). *Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación Integral de Aprendizajes*. Educación Básica y Media por asignatura. MINEDUC.
- MINEDUC (2023). *Actualización de la Priorización Curricular para la Reactivación Integral de Aprendizajes.* Orientaciones Generales. MINEDUC.
- MINEDUC (2023). *Objetivos de Aprendizaje Priorizados: Visualización en los Textos Escolares de Matemática.* MINEDUC.
- MINEDUC (2023). *Orientaciones didácticas: Matemática*. MINEDUC.
- MINEDUC. (2023). *Plan de Reactivación Educativa*. Santiago: Mineduc.
- Quigley, A. (2022). *El docente tutor: desarrolla hábitos exitosos para la enseñanza*. México: Trillas.
- Sharples, M. (2022) *Pedagogía práctica: nuevas formas de enseñar y aprende.* México: Trillas.
- Tovar, M. (2020). *Habilidades socioemocionales: por qué, para qué y cómo*. México: Trillas.

# WEBGRAFÍA


- *https://www.mineduc.cl*
- *https://www.curriculumnacional.cl/portal/*
- *https://www.geogebra.org/graphing*
- *http://www.wolframalpha.com/*
- *http://www.sii.cl*
- *http://www.minsal.cl*
- *https://www.conicyt.cl/*
- *https://www.energia.gob.cl/*
- *https://www.mindep.cl/home*
- *https://www.mtt.gob.cl*
- *http://www.bcentral.cl*
- *https://www.sernac.cl*
- *https://www.ine.gob.cl/*
- *https://www.unep.org/es*
- *https://cambioclimatico.mma.gob.cl/*
- *http://chileprecolombino.cl/pueblos-originarios/*
- *http://www.csn.uchile.cl/*
- *https://sochipe.cl/v3/index.php*
- *http://intef.es/*
- *https://escenarioshidricos.cl/*
- *http://www.bibliotecanacionaldigital.gob.cl/visor/BND:47439*
- *https://www.conadi.gob.cl/storage/docs/Diccionario_mapudungun.pdf*
- *http://www.mcescher.com/*
- *https://www.misueldo.cl/calcular-sueldo-liquido/*

El Texto del Estudiante **Matemática 8° Básico** es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana.

| | |
|---|---|
| **Dirección Editorial:** | Cristian Gúmera Valenzuela |
| **Coordinación editorial:** | Patricio Loyola Martínez |
| **Edición:** | Dafne Vanjorek Suljgoi |
| **Asistencia de edición:** | Rafael Arancibia Rojas |
| **Autoría:** | Claudia Torres Jeldes - Mónica Caroca Toro |
| **Corrección de estilo:** | Alejandro Cisternas Ulloa |
| **Consultoría pedagógica:** | Marjorie Ruiz Basterrica |
| **Asesoría en pueblos originarios:** | Priscila Duath Sepúlveda - Melisa Pacajes Pacajes<br>Pedro Prado Verdejo |
| **Documentación:** | Cristian Bustos Chavarría |
| **Coordinación gráfica:** | Sergio Pérez Jara |
| **Diseño y diagramación:** | Mariela Pineda Gálvez |
| **Fotografías:** | Wikimedia Commons<br>Shutterstock<br>Gettyimages |
| **Producción:** | Rosana Padilla Cencever |


En este libro se usan de manera inclusiva términos como "los niños", "los padres", "los hijos", "los apoderados", "profesores" y otros que se refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos que formen parte del conjunto. Este uso evita, además, la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

Las lecturas que hemos seleccionado e incorporado en este texto de estudio han sido escogidas por su calidad lingüística y didáctica. La lectura de las mismas y las actividades que se realizan facilitan el aprendizaje de los alumnos y alumnas. Agradecemos a todos los autores por su colaboración.



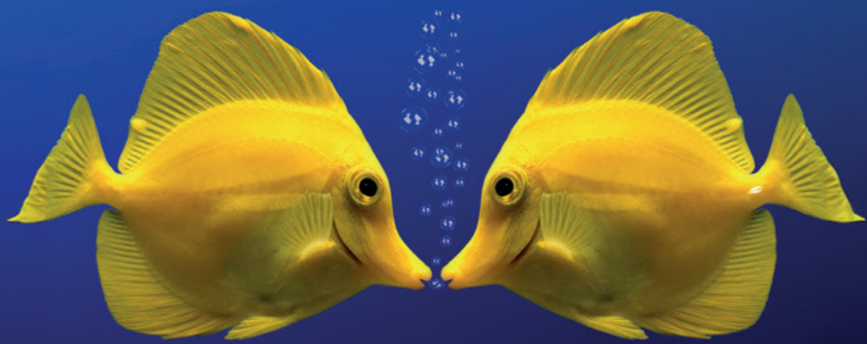
Impreso en Chile por A Impresores S.A.

ISBN: 978-956-15-3946-4 / Inscripción Nº: 2023-A-12802

Se terminó de imprimir esta 1ª edición de 256.319 ejemplares en el mes de diciembre del año 2023.



En este texto se incluye un pendrive con el Banco Digital de Actividades (BDA) y con la Guía Didáctica del Docente (GDD).





Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

SANTILLANA

Codigo PEC

9 789561 539464