

CUADERNO DE ACTIVIDADES

Tomo 2

# MATEMÁTICA 3°·4°

medio

Patricio Norambuena Morales  
Gladys Osorio Railef

María Patricia Romante Flores  
Juan Díaz Vergara



EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN. PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN.





**CUADERNO DE ACTIVIDADES**

# **MATEMÁTICA 3° · 4°** medio

**Patricio Norambuena Morale**

Licenciado en Educación Matemática y Computación

**Gladys Osorio Railef**

Licenciada en Educación de Física y Matemática

Profesora de Estado en Física y Matemática

**María Patricia Romante Flores**

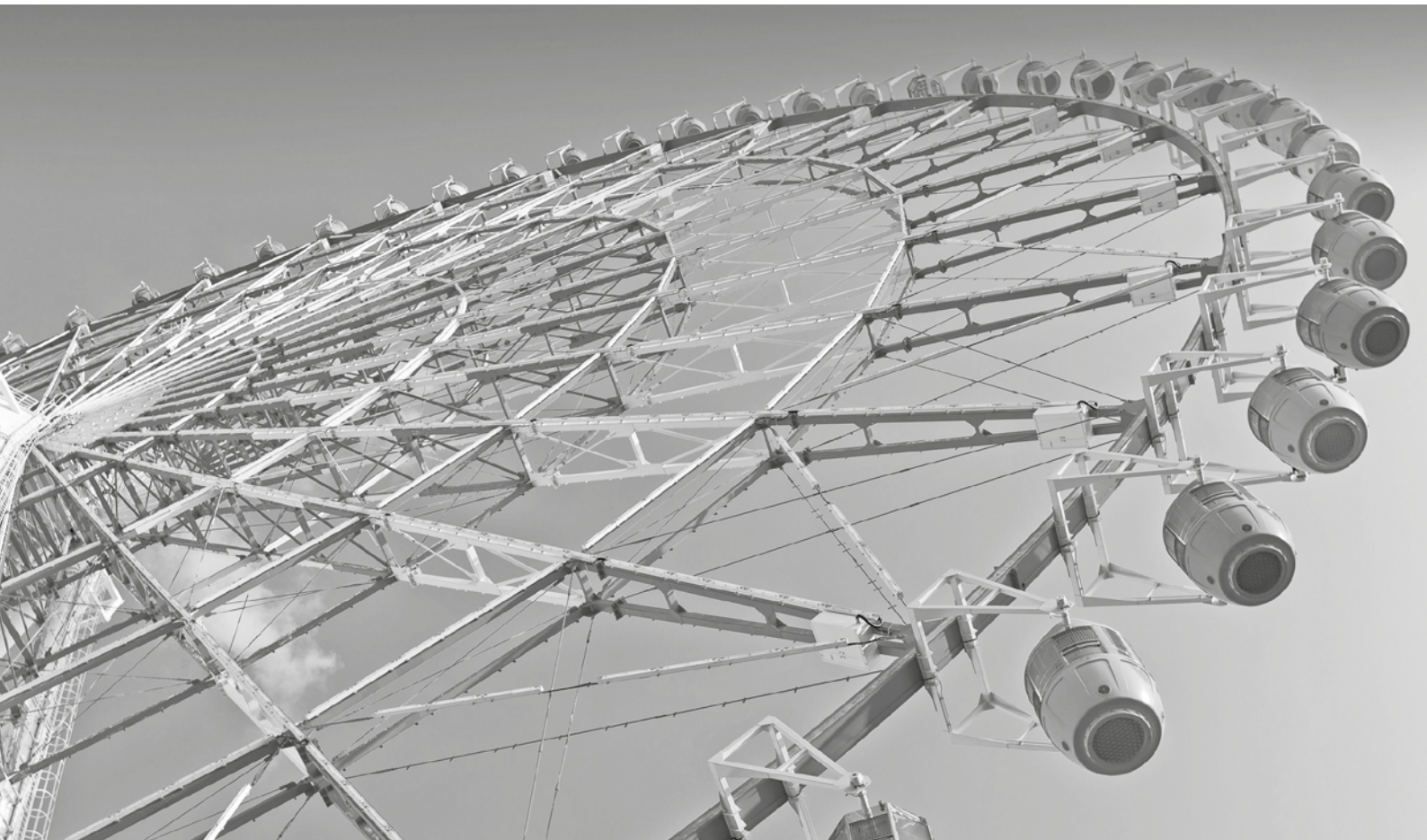
Licenciada en Educación de Física y Matemática

Profesora de Estado en Física y Matemática

**Juan Díaz Vergara**

Licenciado en Educación de Física y Matemática

Profesor de Estado en Física y Matemática



En el desarrollo del Cuaderno de Actividades de Matemática 3° y 4° medio SM, participó el siguiente equipo:

**Dirección editorial**

Arlette Sandoval Espinoza

**Coordinación área Matemática**

Carla Frigerio Cortés

**Edición**

Patricio Norambuena Morales

Gladys Osorio Railef

María Patricia Romante Flores

**Ayudante de edición**

Lisset Donoso Vera

**Autoría**

Patricio Norambuena Morales

Gladys Osorio Railef

María Patricia Romante Flores

Juan Díaz Vergara

**Consultoría**

Johanna Camacho González

**Corrección de estilo y prueba**

Víctor Navas Flores

**Desarrollo de solucionario**

Tomás Bralic Muñoz

Katherine Morales Valderrama

Yaritzza Dinamarca

**Dirección de arte y diseño**

Carmen Gloria Robles Sepúlveda

**Coordinación de diseño**

Gabriela de la Fuente Garfias

**Iconografía**

Vinka Guzmán Tacla

**Diseño y diagramación**

Mauricio Fresard Lemmermann

Williams Gálvez Baettig

**Fotografías**

Banco de imágenes SM

Istockphoto

Shutterstock

**Jefatura de planificación**

Andrea Carrasco Zavala

**Gestión de derechos**

María Loreto Ríos Melo

Este cuaderno corresponde al tercer y cuarto año de Educación Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 193/2019, del Ministerio de Educación de Chile.

© 2019 – SM S.A. – Coyancura 2283 piso 2 – Providencia

ISBN: 978-956-363-724-3 / Depósito legal: 309653

Tercer año de uso facultativo.

Cantidad de uso autorizada: 177.689

Cantidad de ejemplares impresos: 247.900

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

En este cuaderno se utilizan de manera inclusiva términos como "los niños", "los padres", "los hijos", "los apoderados", "profesores" y otros que refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

En este cuaderno se utilizaron las siguientes familias tipográficas: Aspira nar y Unit Slab Pro.

1

**LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES FINANCIERAS Y ECONÓMICAS ..... 4**

**Lección 1:** Toma de decisiones aplicando porcentajes ..... 4

    Porcentajes en el comercio ..... 4

    Presupuestos y planificación ..... 7

    Remuneraciones y descuentos legales ..... 11

    Antes de continuar ..... 13

**Lección 2:** Toma de decisiones aplicando tasas de interés compuesto ..... 14

    Ahorro e inversiones ..... 14

    Créditos ..... 16

    Antes de continuar ..... 18

Unidad

2

**MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR Y PREDECIR ..... 19**

**Lección 3:** Construcción de modelos con la función potencia ..... 19

    Crecimiento y decrecimiento potencial ..... 19

    Función potencia de exponente positivo ..... 21

    Función potencia de exponente negativo ..... 23

    Antes de continuar ..... 25

**Lección 4:** Construcción de modelos con las funciones seno y coseno ..... 26

    La circunferencia unitaria ..... 26

    Funciones seno y coseno ..... 28

    Amplitud y periodo de las funciones seno y coseno ..... 29

    Antes de continuar ..... 31

Unidad

3

**LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA ..... 32**

**Lección 5:** Toma de decisiones analizando la distribución binomial ..... 32

    Valor esperado y varianza de una variable aleatoria ..... 32

    Distribución binomial ..... 33

    Antes de continuar ..... 35

**Lección 6:** Toma de decisiones analizando la distribución normal ..... 36

    Variable aleatoria continua ..... 36

    Distribución normal ..... 37

    Distribución normal estándar ..... 40

    Estimación de la media de una población ..... 42

    Aproximación normal a la binomial ..... 43

    Antes de continuar ..... 44

Unidad

4

**GEOMETRÍA CON COORDENADAS ..... 45**

**Lección 7:** Resolución de problemas con rectas en el plano ..... 45

    Distancia entre puntos en el plano cartesiano ..... 45

    Rectas en el plano ..... 46

    Distancia de un punto a una recta ..... 48

    Antes de continuar ..... 50

**Lección 8:** Resolución de problemas con circunferencias en el plano cartesiano ..... 51

    Ecuación de la circunferencia ..... 51

    Posición relativa a las circunferencias ..... 53

    Antes de continuar ..... 55

Solucionario ..... 56

Rúbricas de actividades ..... 63

Lección 1

Toma de decisiones aplicando porcentajes

Porcentajes en el comercio

1. Identifica qué producto es económicamente más conveniente en cada caso. Anota la unidad de comparación utilizada y justifica tu respuesta.

a. Oferta supermercado A



Oferta supermercado B



b. Oferta supermercado A



Oferta supermercado B



2. Leonardo necesita imprimir un informe de Ciencias Naturales. Para ello, tiene las siguientes opciones:

**Bazar  
"Soluciones"**

Precio por página: \$120  
Por cada 5 páginas 15 %  
de descuento.

**Bazar  
"Don José"**

Precio por página: \$150  
Por cada 3 páginas 25 %  
de descuento.

Si necesita imprimir 8 páginas, ¿en qué bazar le conviene hacerlo?

3. En Chile, actualmente los libros se encuentran sujetos al 19% de IVA.

a. ¿Cuál sería el precio sin IVA de un libro que cuesta \$24 990?

b. ¿Cuál es el precio final de un libro cuyo valor neto es \$17 500?

c. Si el impuesto al libro se redujera al 5%, ¿en qué porcentaje disminuiría el precio actual de los libros?

## Lección 1

4. Yanira cambió 5 000 USD a un valor de compra de 1 USD a \$ 683, y obtuvo \$3312550. ¿Cuál fue la comisión (en porcentaje) que le cobraron?

5. En parejas:

- a. Investiguen acerca de las enfermedades más comunes que afectan a los chilenos y seleccionen una de ellas.

Enfermedad: \_\_\_\_\_

- b. Seleccionen dos medicamentos de marcas o formatos distintos que se utilizan para tratar dicha enfermedad e investiguen sus precios. Acuerden una unidad para determinar el medicamento más económico, por ejemplo: “precio por comprimido” o “precio por mililitro”. Completen la tabla resumen con los medicamentos seleccionados y sus precios por unidad:

Unidad de comparación: \_\_\_\_\_

**Links recomendados:**  
**Ministerio de Salud:**  
• [tufarmacia.minsal.cl](http://tufarmacia.minsal.cl)  
• Fono Salud  
**Sitios webs de farmacias**

Medicamento	Precio

Diferencia porcentual entre el precio por unidad: \_\_\_\_\_

- c. ¿Qué otras características además del precio pueden afectar a la decisión de qué medicamento comprar?

## Presupuestos y planificación

1. Un local de comida gasta mensualmente lo siguiente:

Gastos mensuales	
Agua	\$200 000
Luz	\$150 000
Arriendo de local	\$570 000
Salarios del personal	\$3 750 000
Seguros	\$205 000
Otros	\$137 000

- a. Determina el gasto anual de la empresa.

- b. Si con el 45 % del ingreso mensual de la empresa se pagan los salarios del personal, ¿cuál fue aproximadamente el ingreso mensual de la empresa?

- c. Si se quisiera aumentar los sueldos del personal en 15 %, ¿en cuánto disminuiría la ganancia?



## Lección 1

2. Carlos e Inés desean revisar sus finanzas para comprar una casa y evaluar un posible cambio laboral de Carlos. Sus ingresos y gastos mensuales son:

Ingresos	Gastos
Ingresos fijos: <ul style="list-style-type: none"><li>• Inés: \$390 000 sueldo líquido.</li><li>• Carlos: \$300 000 sueldo líquido.</li></ul>	Servicios básicos: \$47 000 <ul style="list-style-type: none"><li>• Arriendo: \$380 000</li><li>• Alimentación: \$150 000</li></ul>
Ingresos variables: <ul style="list-style-type: none"><li>• Carlos: \$370 000 trabajos independientes desde la casa.</li><li>• Inés: \$490 000 en promedio por bonos de ventas.</li></ul>	Transporte al trabajo: <ul style="list-style-type: none"><li>• Inés: \$40 000</li><li>• Carlos: \$40 000</li></ul> Otros: \$120 000

- a. Una de las opciones que están evaluando consiste en un crédito hipotecario con cuotas mensuales de \$450 000 para una casa cercana al trabajo de Inés, con lo que anula su gasto en transporte pero aumentaría el de Carlos por el mismo concepto en 40%. ¿En qué porcentajes variarían los ingresos y los gastos?

- b. Otra opción que están considerando es que Carlos deje su trabajo actual para dedicarse a trabajar de forma independiente desde su casa, aumentando su ingreso variable en 50% y anulando su gasto en transporte. ¿En qué porcentajes variarían sus ingresos y sus gastos?

- c. Si decidieran llevar a cabo tanto el cambio de casa como el cambio laboral, ¿en qué porcentajes variarían los ingresos y los gastos?

d. ¿Qué decisión le recomendarían tomar a Carlos e Inés?

3. Completa la siguiente tabla con la variación porcentual de distintos productos.

Producto	Mes 1 (\$)	Mes 2 (\$)	Variación (\$)	Variación porcentual
Huevo (docena)	\$2 500	\$3 000		
Jamón (1 kg)	\$10 000		+ \$2 000	
Queso (1 kg)	\$6 500	\$6 250		
Pan (1 kg)	\$1 400		- \$50	
Café instantáneo (250 g)				-3%
Total	\$26 000			Promedio:

a. ¿Cuál de todos los productos influyó más en la variación final?, ¿cuál menos?

b. Se construye un IPC especial para medir la variación de estos productos, de modo que el café y el pan tengan una ponderación del 0,35 del total y el huevo, el jamón y el queso, un 0,1 del total. ¿Cuál será la variación del IPC?

# Lección 1

## Actividad de aplicación Modificaciones del IPC

**¿Qué haremos?** Analizar los cambios en la demanda de algunos bienes y sus efectos en el IPC.

### Planifiquemos

**Paso 1:** En grupos de 3 personas, investiguen los cambios históricos de la canasta básica y el IPC.

**Paso 2:** A partir de los productos actuales, ¿cómo creen que variarán porcentualmente los precios de las categorías de la canasta actual en los próximos 5 años? ¿A qué crees que se deberá?

### Discutamos

**Paso 3:** Realicen una lista de al menos tres productos o servicios que ustedes consideran que deben agregar y tres que deban quitar en la próxima actualización de la canasta básica.

Agregar	Quitar

**Paso 4:** ¿Por qué agregaron y quitaron esos productos? Fundamenten su respuesta.

### Concluyamos

**Paso 5:** Elaboren una presentación junto a un párrafo en el que se presenten sus conclusiones respecto de las siguientes preguntas:

- ¿En qué porcentaje creen que variará el precio de los productos seleccionados a lo largo del tiempo?
- ¿Cómo se reflejará la importancia del producto en la variación porcentual?
- ¿Aumentarán o se reducirán los precios de dichos productos en dos años?, ¿y en cinco?

## Remuneraciones y descuentos legales

1. Ana María trabaja a honorarios prestando servicios de mantención de automóviles en una empresa.

A fin de mes debo emitir una boleta de honorarios por un monto bruto de \$857 000.



¿Cuál es el monto líquido que recibirá?

2. Calcula los valores pedidos. Considera una retención del 10 %.
  - a. El valor líquido que se obtendrá de una boleta de honorarios emitida por un monto bruto de \$250 000.

- b. El monto bruto por el que se debe efectuar una boleta si el monto líquido es \$55 556.

- c. Los montos líquido y bruto si lo retenido por impuestos fue \$5300.

## Lección 1

3. Completa los montos faltantes en el detalle de la remuneración de un trabajador con contrato indefinido.

Constructora Oliva S. A.  
**Agosto 2023**  
Rut: 11111111-1  
San Francisco 088

**LIQUIDACIÓN DE REMUNERACIONES**

Detalle	v.o	Haberes	Descuentos
<b>HABERES AFECTOS</b>			
Sueldo base	\$505 000	\$505 000	
Gratificaciones		\$100 000	
<b>DESCUENTOS LEGALES</b>			
12 % Cotización AFP sobre renta imponible			_____
7 % FONASA			_____
Seguro de cesantía (0,6% sobre renta imponible)			_____
Exento de impuesto			_____
<b>Totales</b>		_____	_____

**Líquido a pagar:** \_\_\_\_\_

4. Resuelve los siguientes problemas considerando los descuentos legales del 10% de AFP, 1,5% de comisión de AFP y 7% de salud y sin impuesto de segunda categoría.
- a. Lucía es una trabajadora dependiente con contrato indefinido. Si su sueldo base es \$570 000 y su gratificación es de \$93 000, ¿cuál es el monto de cada descuento legal?

- b. Isaac emite todos los meses una boleta de honorarios para una empresa por un total de \$450 000 y se le retiene por impuesto el 10%. Si le ofrecen un puesto en esta empresa con un sueldo bruto de \$450 000 y gratificaciones de \$75 000, ¿le conviene cambiar de contrato?, ¿por qué?



## Antes de continuar

## Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Patricio quiere salir de vacaciones por 5 días y 4 noches. Si tiene 2 opciones y decide ir al destino más económico, ¿por cuál optará?

**La Serena**

Aéreo **\$ 35490**  
+ 19% IVA

Hotel **\$ 521600**



**Pucón**

Aéreo **\$ 42790**  
+ 19% IVA

Hotel **\$ 453990**



2. Un banco cambia dólares americanos a otras divisas con una comisión de 2,5%. Para las siguientes transacciones, calcula el monto de la comisión en dólares y lo que recibe el cliente.

- a. 2500 USD a libras esterlinas (£) si con 1 USD se compran 0,79 £.

Comisión: \_\_\_\_\_

Lo que recibe el cliente: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- b. 3000 USD a euros (€) si con 1 USD se compran 0,88 €.

Comisión: \_\_\_\_\_

Lo que recibe el cliente: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3. Elabora un presupuesto familiar a partir de un ingreso de \$350 000 y otro de \$1 000 000, para una familia de cuatro integrantes. Considera, para ello, alimentación, vestuario, transporte, educación y vivienda. ¿Qué necesidades priorizaste en cada caso y sobre la base de qué decisiones?

\$350 000	\$1 000 000
¿Qué necesidades prioricé y sobre la base de qué decisiones?	

## Ahorro e inversiones

1. Observa la situación. Luego, responde.



- a. ¿Qué tipo de interés debiese elegir para obtener mayor ganancia al cabo de 3 meses: simple o compuesto?, ¿por qué? Fundamenta tu respuesta.

Mes	Monto	Mes	Monto
1		1	
2		2	
3		3	

Respuesta:

---



---



---

- b. ¿Cuál fue el interés equivalente en cada caso luego de 3 meses?

2. Una inversión promete duplicar tu dinero. Determina el interés compuesto mensual asociado a:
- a. Si la duplicación sucede luego de un año.

- b. Si la duplicación sucede en un semestre.

3. Analiza las siguientes opciones de depósitos a plazo y responde:

**Banco  
A**

Interés de un 4,5 % por depósitos a plazo de 90 días.

**Banco  
C**

Interés de un 1,5 % por depósitos a plazo de 30 días.

**Banco  
B**

Interés de un 2,5 % por depósitos a plazo de 60 días.

**Banco  
D**

Interés de un 0,7 % por depósitos a plazo de 15 días.

¿Cuál es la opción más conveniente si se pretende depositar por un máximo de 90 días?

## Créditos

1. Analiza la siguiente situación:

Valentina y Andrés deciden abrir su cafetería y tienen las siguientes opciones de máquinas de café que ofrecen la misma calidad:

**Fellini 2**



**Coste: \$2 150 000**  
Mantenimiento:  
\$120 000 anual

**Marchant 5**



**Coste: \$2 039 500**  
Mantenimiento:  
\$100 000 semestral

- a. ¿Cuánto es el gasto total luego de un año en cada máquina?

- b. Valentina considera que su cafetería es una inversión que tendrá un 20% de rentabilidad por mes, mientras que Andrés cree que será del 15%. Actualiza al día de hoy los costos iniciales y de mantención durante un año bajo cada rentabilidad y determina cuál inversión corresponde a un menor gasto total.

Valentina:

Andrés:

## Actividad de aplicación Seguros para celulares

### ¿Qué haremos?

Comprender cómo funcionan los seguros.

### Investiguemos

**Paso 1:** Organícense en grupos de 3 o 4 integrantes. Seleccionen un modelo de celular y determinen el precio promedio.

Modelo: \_\_\_\_\_

Precio promedio: \_\_\_\_\_

**Paso 2:** Investiguen el significado de los siguientes términos en el contexto de un seguro: “siniestro”, “prima”, “póliza”, “cobertura”, “deducible” e “indemnización”. Busquen y seleccionen una oferta de seguros para celulares, anoten todos los conceptos que investigaron anteriormente que se encuentren presentes además de los gastos.

Gastos totales: \_\_\_\_\_

### Evaluemos

**Paso 3:** Si consideramos que el celular se devalúa en un 5% mensual, ¿después de cuántos meses el valor cubierto por la aseguradora por un siniestro es mayor al valor del celular?

**Paso 4:** En un párrafo pequeño, respondan: ¿Por qué creen que es importante asegurar cosas de difícil reposición como una casa o un auto?

---



---



---



---



---

### Presentemos

**Paso 5:** Presenten sus conclusiones de forma creativa mediante un afiche que incluya:

- ¿Qué celular escogieron? ¿cuánto vale cada uno en promedio?
- ¿Qué aseguradora escogieron? ¿qué cubre y en cuánto?
- ¿Consideran que es conveniente contratar un seguro o costearían un celular nuevo?



Realiza las siguientes actividades para que conozcas cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Analiza la situación y realiza las actividades.

Imagina que ganas el premio de una lotería de \$500 000 000. Incapaz de darte esa cantidad exorbitante de dinero, la lotería te ofrece dos formas de canjear el premio:

- Pagos de forma anual de \$50 100 000 por los próximos 10 años.
- Pagos de forma anual de \$25 050 000 por los próximos 20 años.

a. ¿Cuánto se pagará en total para cada caso? ¿Cuál es el interés anual asociado?

b. ¿Qué opción es mejor?, ¿bajo qué criterios?

2. ¿Qué criterios utilizarías para justificar que la opción 2 es una mejor oferta que la opción 1?

Opción 1		Opción 2	
Monto líquido:	\$500 000,00	Monto líquido:	\$500 000,00
Monto bruto:	\$503 000,00	Monto bruto:	\$504 500,00
Número de cuotas:	3,00	Número de cuotas:	6,00
Valor cuota:	\$174 457,00	Valor cuota:	\$90 218,00
Tasa de interés:	2,04%	Tasa de interés:	2,05%
CAE	28,17%	CAE	27,80%
Costo total:	\$532 371,00	Costo total:	\$541 308,00

Lección 3 Construcción de modelos con la función potencia

### Crecimiento y decrecimiento potencial

1. Evalúa si las proposiciones son verdaderas o falsas. Escribe V o F según corresponda y justifica las falsas.
- a. \_\_\_\_\_ El recorrido de cualquier función potencia es el conjunto de los números reales.

Justificación: \_\_\_\_\_

- b. \_\_\_\_\_ El gráfico de la función potencia  $f(x) = 6x^4$  tiene un eje de simetría.

Justificación: \_\_\_\_\_

- c. \_\_\_\_\_ Si  $f(x) = x^8$  y  $g(x) = x^{20}$  con  $x \in ]0, 1[$ , entonces  $f(x) > g(x)$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

- d. \_\_\_\_\_ Si  $f(x) = 3x^n$  y  $f(3) = 81$ , entonces  $f$  es una función impar.

Justificación: \_\_\_\_\_

2. Calcula el valor de cada expresión. Para ello, considera las funciones:

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3$$

- a.  $f(3) + f(-3) =$

- b.  $f(10) - f(-10) =$

- c.  $g(3) - g(-3) =$

- d.  $g(10) + g(-10) =$

## Lección 3

3. Considerando las funciones de la actividad anterior, responde.

a. ¿Qué relación existe entre  $f(x)$  y  $f(-x)$ ?, ¿y entre  $g(x)$  y  $g(-x)$ ?

b. ¿Para qué valor o valores de  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que  $f(x) = g(x)$ ?

4. Analiza las siguientes tablas e identifica la paridad y crecimiento de la función. Luego, encuentra alguna función potencia que modele su comportamiento y dibuja su gráfica.

a.

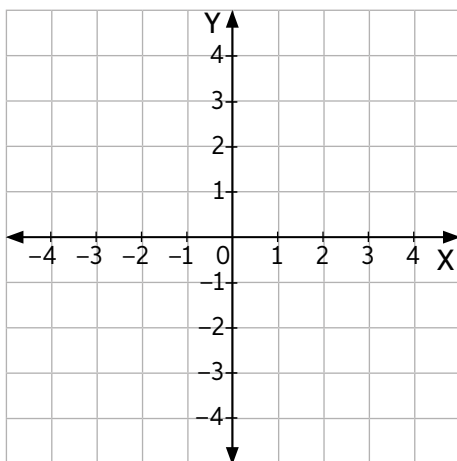


Tabla A	
x	y
-3	-3,375
-2	-1
-1	-0,125
0	0
1	0,125

Función: \_\_\_\_\_

b.

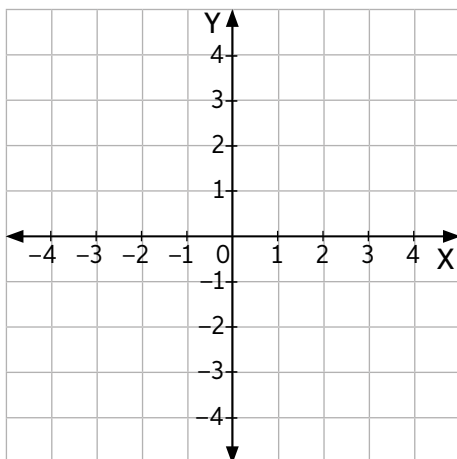


Tabla B	
x	y
-3	1
-2	1,5
-1	3
1	-3
2	-1,5

Función: \_\_\_\_\_

## Función potencia de exponente positivo

1. Usa las siguientes palabras para completar las oraciones:

Origen

 $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 

Simétrico

 $\mathbb{R}$ 

Creciente

 $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ 

Decreciente

La función potencia con exponente  $n$  **positivo par**:

- con coeficiente **a positivo**, es \_\_\_\_\_ con respecto al eje Y. Su recorrido es \_\_\_\_\_.
- con coeficiente **a negativo**, es \_\_\_\_\_ con respecto al eje Y.

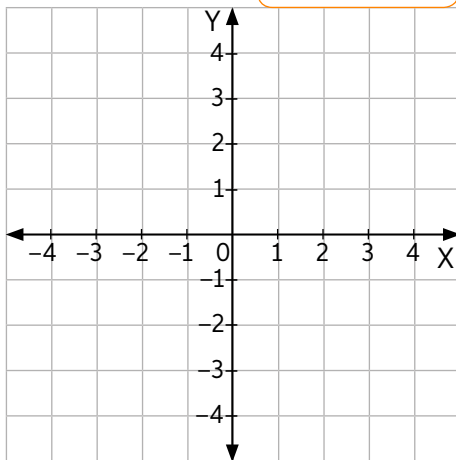
La función potencia con exponente  $n$  **positivo impar**:

- con coeficiente **a positivo**, es simétrica con respecto al \_\_\_\_\_. Su recorrido es \_\_\_\_\_.
- con coeficiente **a negativo**, es siempre \_\_\_\_\_ y su recorrido es \_\_\_\_\_.

2. Grafica y determina la expresión algebraica de una función potencia de exponente positivo que cumpla las siguientes características:

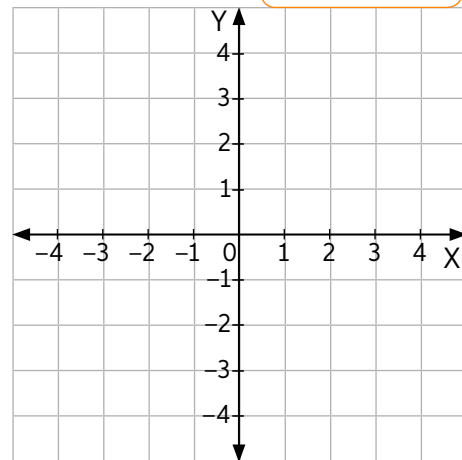
- a.  $a > 0$  y  $n$  par

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



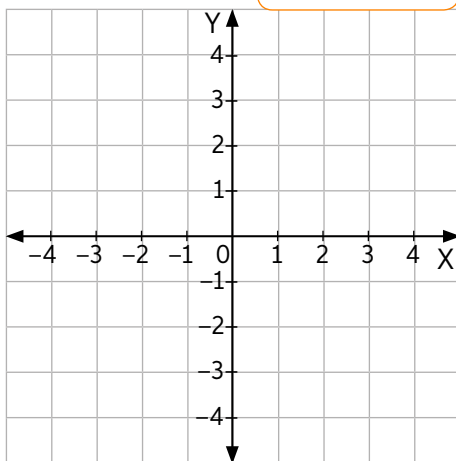
- c.  $a < 0$  y  $n$  par

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



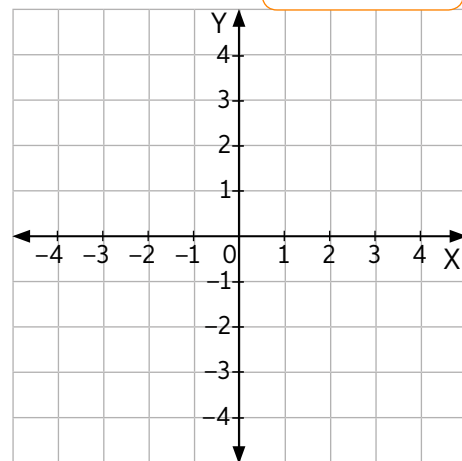
- b.  $a > 0$  y  $n$  impar

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



- d.  $a < 0$  y  $n$  impar

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



### Lección 3

3. Analiza la siguiente tabla. Luego, realiza las actividades.

A	B
-10	-1 001
-9	-720
-5	-120
-2	-8
-1	-1

a. Identifica el crecimiento de la variable  $B$  en función de  $A$ .

b. ¿Cuáles debiesen ser los signos de  $a$  y  $n$  de la función potencia que modela los datos de la tabla?

c. Utilizando la calculadora, determina cuál es el mejor valor de  $n$  y  $a$ .

Función: \_\_\_\_\_

d. Compara los datos de la tabla con los obtenidos por el modelo: ¿constituye una buena aproximación?



## Función potencia de exponente negativo

1. Usa las siguientes palabras para completar las oraciones:

Origen

 $\mathbb{R}^+$ 

Simétrico

 $\mathbb{R}^-$ 

Creciente

 $\mathbb{R} - \{0\}$ 

Decreciente

La función potencia con exponente  $n$  **negativo par**:

- con coeficiente **a positivo**, es \_\_\_\_\_ con respecto al eje Y. Su recorrido es \_\_\_\_\_.
- con coeficiente **a negativo**, es \_\_\_\_\_ con respecto al eje Y. Su recorrido es \_\_\_\_\_.

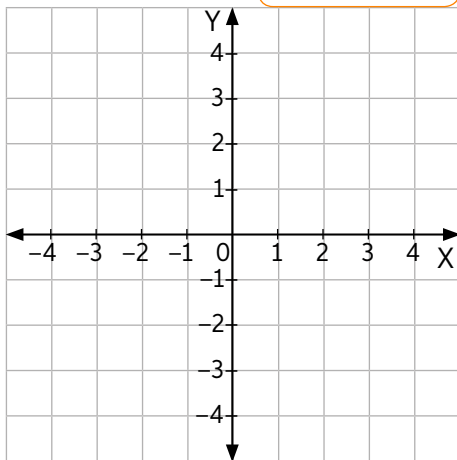
La función potencia con exponente  $n$  **negativo impar**:

- con coeficiente **a positivo**, es simétrica con respecto al \_\_\_\_\_. Su recorrido es \_\_\_\_\_.
- con coeficiente **a negativo**, es siempre \_\_\_\_\_. Su recorrido es \_\_\_\_\_.

2. Grafica y determina la expresión algebraica de una función potencia de exponente negativo que cumpla las siguientes características.

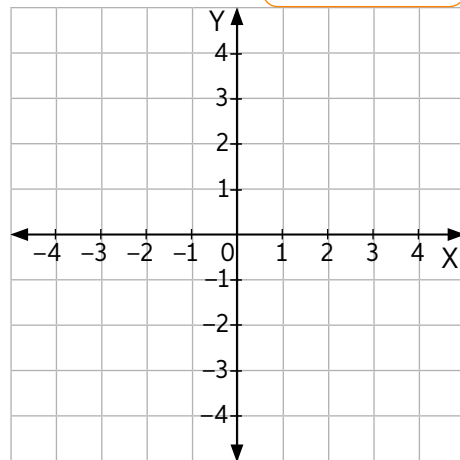
- a.  $a > 0$  y  $n$  par

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$



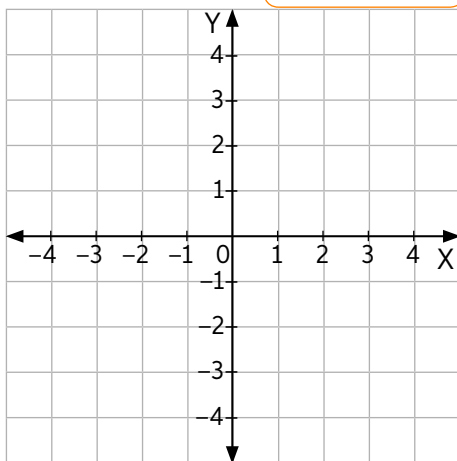
- c.  $a < 0$  y  $n$  par

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$



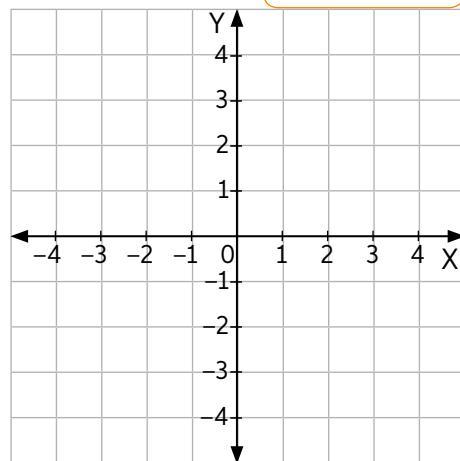
- b.  $a > 0$  y  $n$  impar

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$



- d.  $a < 0$  y  $n$  impar

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$



### Lección 3

3. Analiza la siguiente tabla. Luego, realiza las actividades.

A	B
1	50
2	12
5	2
10	0,5
20	0,2

a. Identifica el crecimiento de la variable  $B$  en función de  $A$ .

b. ¿Cuáles debiesen ser los signos de  $a$  y  $n$  de la función potencia que modela los datos de la tabla?

c. Utilizando la calculadora, determina cuál es el mejor valor de  $n$  y  $a$ .

Función: \_\_\_\_\_

d. Compara los datos de la tabla con los obtenidos por el modelo: ¿constituye una buena aproximación?

Realiza las siguientes actividades para que revises cómo va tu proceso de aprendizaje.

1. Mediante una función potencia, modela las siguientes tablas. Luego, responde.

Tabla A	
x	y
-4	192
-2	24
0	0
1	-3
2	-24
4	-192

Tabla B	
x	y
-4	-0,125
-2	-0,5
-1	-2
1	2
2	0,5
4	0,125

- a. ¿Cómo es el crecimiento y la paridad de las funciones?

- b. ¿Cuál es el signo de  $a$  y  $n$  para las funciones anteriores?

- c. Determina los coeficientes  $a$  y  $n$  de las funciones potencia que modelan los datos de la tabla.

- d. Grafica las funciones.

Tabla A

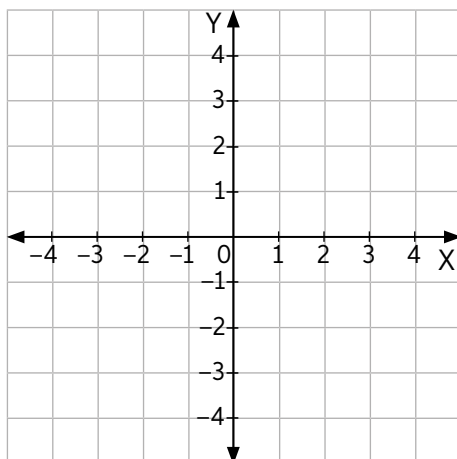
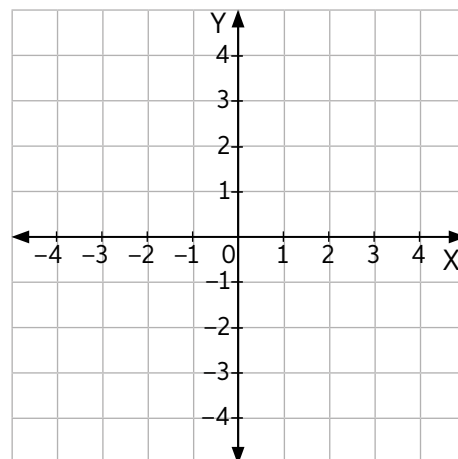


Tabla B



## La circunferencia unitaria

1. Rellena los espacios con los conceptos disponibles en el recuadro. Ten presente que hay más conceptos disponibles de los que necesitas:

$-\frac{\pi}{6}$	Centro	$x^2 + y^2 = 1$	$100^\circ$	$-\frac{\pi}{3}$	$x^2 + y^2 = -1$
Cateto adyacente	$180^\circ$	Hipotenusa	Cateto opuesto	Ángulo	Radio

- La ecuación de una circunferencia unitaria es \_\_\_\_\_.
  - $-30^\circ$  equivale a \_\_\_\_\_ radianes.
  - $\pi$  radianes equivale a \_\_\_\_\_.
  - La hipotenusa equivale al \_\_\_\_\_ de la circunferencia unitaria.
  - $\text{sen}(\alpha)$  equivale a \_\_\_\_\_ dividido en \_\_\_\_\_.
2. Transforma los siguientes ángulos en grados sexagesimales a radianes.

a.  $20^\circ$

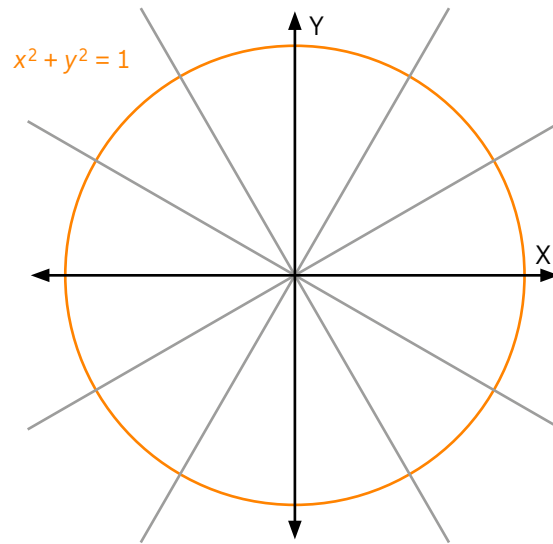
b.  $260^\circ$

c.  $-45^\circ$

d.  $520^\circ$

e.  $1^\circ$

3. Determina las coordenadas del punto en la circunferencia unitaria asociada a cada ángulo. Márcalo sobre la circunferencia.



a.  $\frac{5\pi}{6}$

x: \_\_\_\_\_ y: \_\_\_\_\_

b.  $\frac{\pi}{3}$

x: \_\_\_\_\_ y: \_\_\_\_\_

c.  $\frac{\pi}{9}$

x: \_\_\_\_\_ y: \_\_\_\_\_

d.  $-\frac{3\pi}{2}$

x: \_\_\_\_\_ y: \_\_\_\_\_

e.  $\frac{7\pi}{2}$

x: \_\_\_\_\_ y: \_\_\_\_\_

f.  $-\frac{19\pi}{3}$

x: \_\_\_\_\_ y: \_\_\_\_\_

## Funciones seno y coseno

1. Analiza las siguientes afirmaciones. Escribe V o F según corresponda y justifica las falsas.

a. \_\_\_\_\_ La función  $f(x) = \cos(x)$  es positiva en el intervalo  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

b. \_\_\_\_\_ La función  $g(x) = \sin(x)$  es positiva en el intervalo  $[0, \pi]$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

c. \_\_\_\_\_ La función seno es par.

Justificación: \_\_\_\_\_

2. Convierte las siguientes funciones coseno a funciones seno.

a.  $f(x) = \cos(x + \pi)$

b.  $f(x) = \cos(x - \pi)$

c.  $f(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$

3. Esboza la gráfica de la función  $f(x) = \sin(x) + 2$ .

## Amplitud y periodo de las funciones seno y coseno

1. Determina los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones:

a.  $f(x) = 3 \cos(x)$

Máximo: \_\_\_\_\_ Mínimo: \_\_\_\_\_

b.  $f(x) = \frac{1}{3} \cos(x)$

Máximo: \_\_\_\_\_ Mínimo: \_\_\_\_\_

c.  $f(x) = \cos(2x)$

Máximo: \_\_\_\_\_ Mínimo: \_\_\_\_\_

2. Determina el periodo y amplitud de las siguientes funciones:

a.  $f(x) = \text{sen}(3x)$

Periodo: \_\_\_\_\_ Amplitud: \_\_\_\_\_

b.  $g(x) = \text{sen}(-6x)$

Periodo: \_\_\_\_\_ Amplitud: \_\_\_\_\_

c.  $h(x) = \frac{2}{3} \text{sen}(2x)$

Periodo: \_\_\_\_\_ Amplitud: \_\_\_\_\_

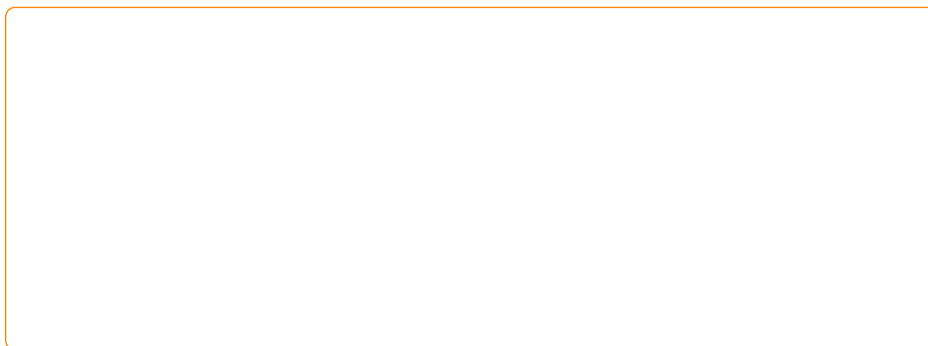
## Lección 4

3. Grafica e identifica el periodo y la amplitud de las siguientes funciones:

a.  $f(x) = 3\text{sen}(x) - 1$



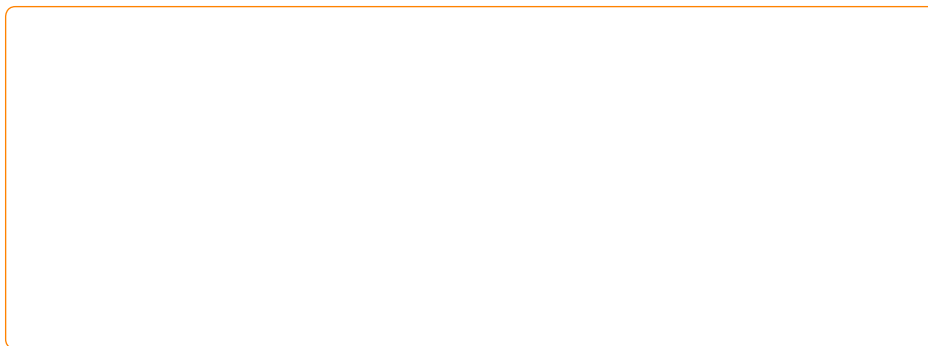
b.  $g(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{4}\right) - 1$



c.  $h(x) = 3\text{sen}(x + \pi)$



d.  $i(x) = 2\text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$





1. Analiza las siguientes afirmaciones. Escribe V o F según corresponda y justifica las falsas.
- a. \_\_\_\_\_ La circunferencia unitaria es una circunferencia de  $r = 1$ , que permite establecer relaciones entre seno y coseno de un determinado ángulo.  
Justificación: \_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_\_ Las funciones seno y coseno tienen periodo de  $\pi$ .  
Justificación: \_\_\_\_\_
- c. \_\_\_\_\_ En la función seno, el dominio es  $\mathbb{R}$  y el recorrido es  $[-1, 1]$ .  
Justificación: \_\_\_\_\_
2. Analiza el siguiente modelo. Para ello, completa la tabla y realiza las actividades.

Datos	
A	B
0	1
2	0,5
4	0,5
6	1

Modelo	
x	$f(x) = \text{sen}(3x) + 1$
0	
2	
4	
6	

- a. Grafica los puntos y los valores de la función:

- b. ¿Constituye un buen modelo? Justifica tu respuesta.

---



---

Lección 5 Toma de decisiones analizando la distribución binomial

## Valor esperado y varianza de una variable aleatoria

1. Analiza la siguiente situación. Luego, resuelve.

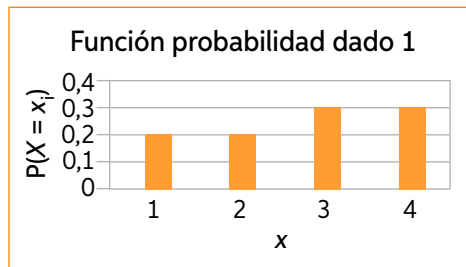
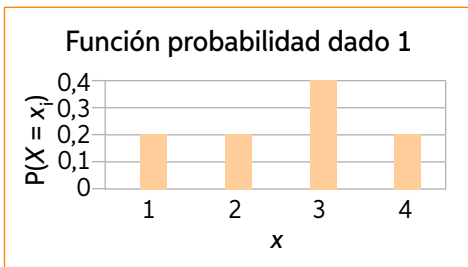
En un juego de azar, se tiene que la probabilidad de ganar \$100 es 0,4; la de ganar \$500 es 0,2; la de ganar \$1000 es 0,1 y la de perder \$1000 es 0,3.

- a. ¿Cuáles son los valores de la esperanza y varianza de este experimento?

Esperanza: \_\_\_\_\_ Varianza: \_\_\_\_\_

- b. ¿Considerarías justo este juego? Justifica tu respuesta.

2. Se tienen dos dados cargados de cuatro caras, numerados del 1 al 4. Se lanzan hasta que salga un 4 o se completen dos lanzamientos. Si sale 4 en el primer lanzamiento se ganan \$500, si sale 4 en el segundo lanzamiento se ganan \$1000 y si no sale el 4 se pierden \$700. Las funciones de distribución asociadas a la variable X: “Número obtenido en el lanzamiento de un dado de 4 caras” son:



¿Cuál es el valor esperado en cada dado?

¿Qué dado lanzarías? Justifica tu respuesta.

---



---

## Distribución binomial

1. Analiza cada experimento aleatorio. Luego, completa la tabla.

Experimento aleatorio	Repeticiones	Probabilidad de éxito	Función probabilidad
Número de caras obtenido al lanzar 52 veces una moneda.			
Responder correctamente seleccionando una alternativa al azar de 15 preguntas con cuatro alternativas.			
Lanzar un dado 38 veces y observar si el número obtenido es mayor que cuatro.			

2. Evalúa si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

- a. \_\_\_\_\_ Para un mismo experimento se pueden definir diferentes variables aleatorias.

Justificación: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- b. \_\_\_\_\_ La función de probabilidad asocia un valor mayor que 0 y menor que 1 a cada elemento del espacio muestral de un experimento.

Justificación: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- c. \_\_\_\_\_ El recorrido de una función de probabilidad es un subconjunto de  $\mathbb{R}^-$ .

Justificación: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- d. \_\_\_\_\_ El dominio de una variable aleatoria es el recorrido de su función de probabilidad.

Justificación: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## Lección 5

3. Analiza el siguiente contexto y responde.

La probabilidad de que un concursante responda incorrectamente una pregunta cualquiera de cierto concurso de televisión es de 0,1.

Si el concurso consta de 10 preguntas:

- a. Identifica los parámetros asociados a la distribución binomial.

$$n = \underline{\hspace{2cm}} \quad \mu = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sigma^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b. ¿Cuál es la distribución binomial asociada?

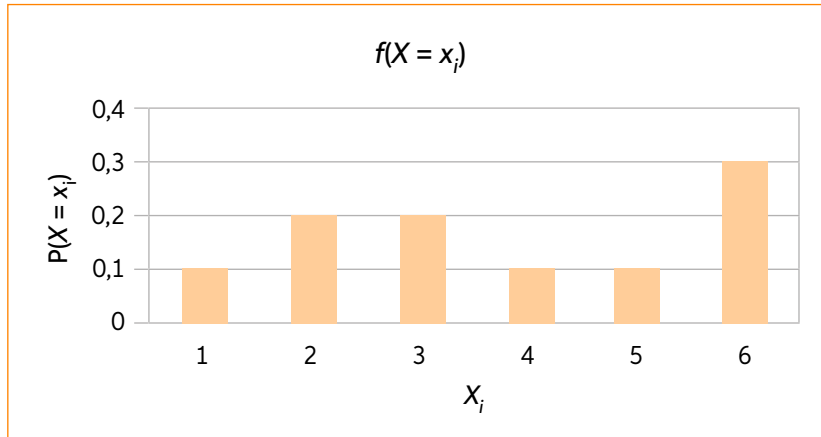
- c. Realiza el gráfico de la distribución binomial.

- d. ¿Cuántas preguntas correctas esperarías que un concursante respondiera?  
Justifica tu respuesta.

- e. Si por cada respuesta acertada se ganan \$100 000 y por cada pregunta errada se pierden \$10 000. ¿Cuál es el premio final esperado?

1. Analiza la situación y responde:

El gráfico representa la función de probabilidad de la variable aleatoria  $X$ : “número obtenido al lanzar un dado de seis caras trucado”.



- a. ¿Cuál es el valor esperado del dado?

- b. ¿Es más probable obtener un número par o uno impar? Justifica.

- c. Se diseña un juego para este dado tal que solo se gane si sale el 1. ¿Cuál es la variable de Bernoulli asociada a dicho experimento?

- d. Si se lanza el dado en 5 ocasiones, ¿cuál es la probabilidad de ganar al menos dos veces?

## Variable aleatoria continua

1. Analiza la siguiente variable. Luego, responde.

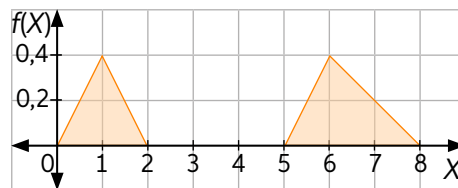
En la tabla, se registran los valores de la variable aleatoria  $X$ : estatura de un grupo de jóvenes.

Estatura (m)	Frecuencia
$[0 ; 1,5[$	2
$[1,5; 1,6[$	50
$[1,6; 1,7[$	120
$[1,7; 1,8[$	118
$[1,8; 1,9[$	100
$[1,9; 2[$	10

- a. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

- b. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de  $X$ ?

2. Determina el valor de la de la función de distribución.



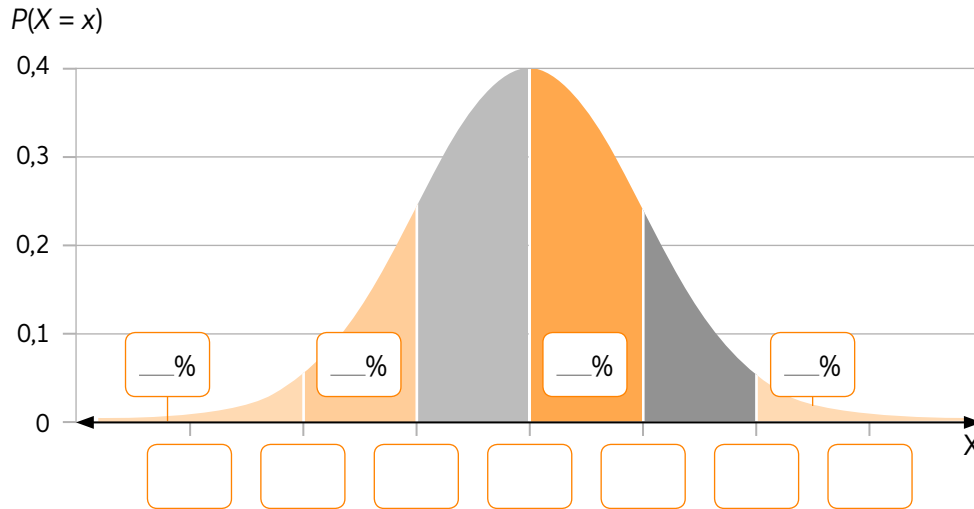
- a.  $P(0 < x < 2)$

- b.  $P(5 < x < 8)$

- c.  $P(1 < x < 6)$

## Distribución normal

1. Completa el gráfico de la distribución normal:



2. En un banco los montos de dineros que se piden en las solicitudes de créditos tienen una distribución normal con una media de \$60 000 y una desviación estándar de \$15 000. Si se recibe una solicitud de préstamo, calcula la probabilidad de que el monto solicitado

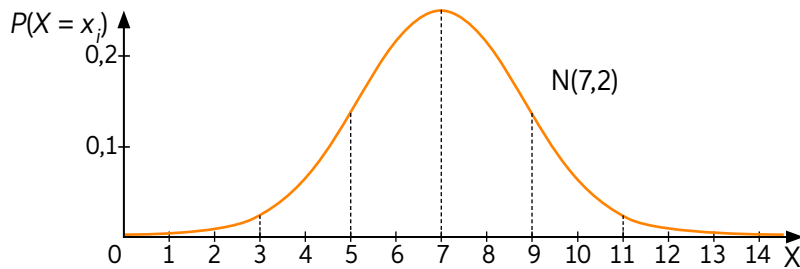
- a. Sea al menos \$75 000.

- b. Sea al menos \$75 000 y a lo más \$115 000.

- c. Sea superior a \$115 000.

## Lección 6

3. Determina el intervalo equivalente a las probabilidades de la siguiente distribución normal y calcula su valor. Utiliza las propiedades  $P(x < a) = 1 - P(x > a)$  y  $P(x > a) = 1 - P(x < a)$  cuando sea posible.



a.  $P(3 < x)$

b.  $1 - P(5 < x < 7)$

c.  $P(5 < x) - P(7 < x < 9)$

d.  $(1 - P(5 < x)) - P(x < 3)$

e.  $(1 - P(5 < x)) - (1 - P(9 < x))$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

## Lección 6

# Distribución normal estándar

1. Calcula las siguientes probabilidades:

a.  $P(Z < 2)$

b.  $P(0,7 < Z < 1,5)$

c.  $P(-0,7 < Z)$

d.  $P(-0,7 < Z < -0,2)$

2. Determina la probabilidad de que una variable aleatoria  $X$ , que sigue una distribución  $N(5, \sigma)$ , tome valores comprendidos en el intervalo  $(5-1,7\sigma; 5+\sigma)$ .

3. Determina la probabilidad de que una variable aleatoria  $X$ , que sigue una distribución  $N(\mu; 0,3)$ , tome valores comprendidos en el intervalo  $(\mu-0,7; \mu-0,1)$ .

4. Determina la media y desviación típica de las siguientes distribuciones normales:
- a.  $X$  sigue una distribución normal tal que  $P(X < 9) = 0,9772$  y  $P(X < 6) = 0,8413$ .

- b.  $Y$  tiene una distribución normal tal que  $P(Y < 0) = 0,0228$  y  $P(Y < 4,5) = 0,9938$ .

5. Una empresa lleva a cabo una prueba para seleccionar nuevos empleados. A partir de pruebas anteriores, se sabe que las puntuaciones siguen una distribución normal de media 80 y desviación típica 25. Si se quiere dejar al 10 % de mejor puntaje para una entrevista, ¿qué puntaje como mínimo debe obtener un postulante para pasar a la entrevista? Justifica tu respuesta.

## Lección 6

# Estimación de la media de una población

1. Resuelve los siguientes problemas propuestos. Justifica tu respuesta en cada caso.

- a. Encuentra un intervalo de confianza de 97 % para la media poblacional, cuya desviación estándar es 3,7. Considera una muestra de 100 datos, con un promedio de 15,7.

- b. Encuentra un intervalo de confianza de 99 % para la media poblacional, cuya desviación estándar es 2. Considera una muestra de 81 datos, con un promedio de 5.

2. Lee la información. Luego, responde justificando tu respuesta.

Andrés le asegura a un cliente que el tiempo de espera promedio de comida rápida es de 500 segundos. Para demostrarlo, entrevistó 36 clientes cuyo tiempo de espera promedio fue de 600 segundos. El cliente asegura con un 99% de confianza que es falso lo que declara Andrés.

Sabiendo que la desviación estándar poblacional es de 120 segundos, ¿quién tiene la razón?

## Aproximación normal a la binomial

1. Se ajusta la variable aleatoria  $X$  con una distribución  $B(400; 0,5)$  a la distribución  $N(200; 10)$ . Calcula las siguientes probabilidades utilizando el ajuste normal:

a.  $P(X = 200)$

b.  $P(X \leq 200)$

c.  $P(X > 199)$

d.  $P(X < 187)$

2. El 4% de los clavos de 2 pulgadas producidos por una empresa salen defectuosos. Si se produce un lote de 1200 clavos:

- a. Determina el ajuste a la normal.

- b. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 60 clavos de 2 pulgadas sean defectuosos?

- c. De los 1200 clavos producidos, ¿cuál es la probabilidad de obtener entre 25 y 55 clavos defectuosos?

1. Evalúa si las proposiciones son verdaderas o falsas. Para ello, escribe V o F según corresponda. Justifica las falsas.

a. \_\_\_\_\_ Una variable aleatoria es una función que asocia un número real cada elemento del espacio muestral.

Justificación: \_\_\_\_\_

b. \_\_\_\_\_ Si  $X$  es una variable aleatoria continua, entonces,  
 $P(a < X < b) < P(a \leq X \leq b)$ .

Justificación: \_\_\_\_\_

2. Lee la siguiente información. Luego, realiza las actividades. Justificando tu respuesta en cada caso.

La estatura promedio de los individuos de una población se distribuye normal de media 1,65 m y desviación 0,15 m.

a. Estandariza la variable.

b. Determina la probabilidad de que una persona de dicha población mida menos de 1,60 m.

c. Determina la probabilidad de que una persona de dicha población mida más de 1,80 m.

d. ¿Cuál es la estatura mínima que debe tener una persona para pertenecer al 10% más alto de la población?

Lección 7

Resolución de problemas con rectas en el plano

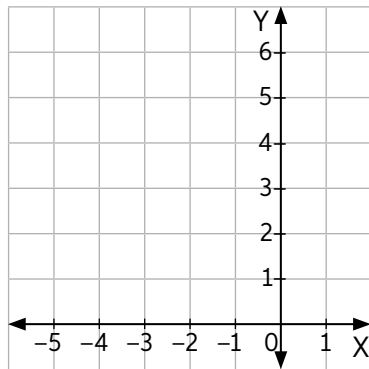
**Distancia entre puntos en el plano cartesiano**

1. Encuentra los valores de  $k$  para que se cumplan las siguientes condiciones:

a.  $P(3 + k, 2)$  y  $Q(5, 8)$  estén a 10 unidades de distancia.

b.  $P(-12, 2)$  y  $Q(12, k)$  estén a 25 unidades de distancia.

2. Los puntos  $(-1, 6)$  y  $(-3, 4)$  son vértices opuestos de un cuadrado. ¿Cuál es el perímetro de la figura? Justifica con tus cálculos en el recuadro.



## Rectas en el plano

1. Ordena cada expresión y determina la forma principal de la ecuación de la recta. Indica cuál es su pendiente y coeficiente de posición.

a.  $3x + 4y = 4$

b.  $3x + 2(y + 3) = -2x$

c.  $4(x + 4) + y(x + 1) = x(y + 3)$

d.  $ax + by = ay + bx$ ; con  $a$  y  $b$  reales no nulos.

2. Determina el valor de  $k$  para que los puntos indicados pertenezcan a las rectas en cada caso.

a.  $L_1: y = 2x + 5$ ;  $P(2 + k, 3)$



b.  $L_2: 4y = 2(x + k); Q(1, k)$

c.  $L_3: 3y + 2x = 5; R(k + 1, 2 - k)$

3. Determina la ecuación general de las siguientes rectas que pasan por los puntos  $P$  indicados y cumplen las siguientes condiciones paralelismo o perpendicularidad a la recta  $L_0: 2y + 3x = 5$ :

a.  $L_1$  paralela que pase por  $P(1, 0)$ .

b.  $L_2$  perpendicular que pase por  $P(1, 0)$ .

c.  $L_3$  perpendicular que pase por  $P(a, b)$ .

## Lección 7

# Distancia de un punto a una recta

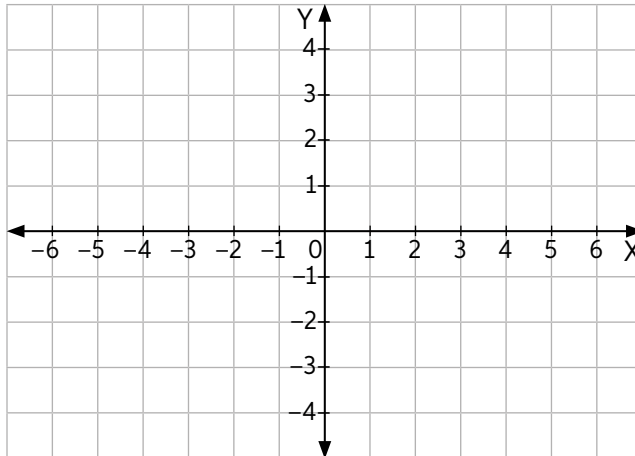
1. Determina la distancia entre la recta  $L_1: 3y + 2x = 0$  y los siguientes puntos:

a.  $P(3, 6)$

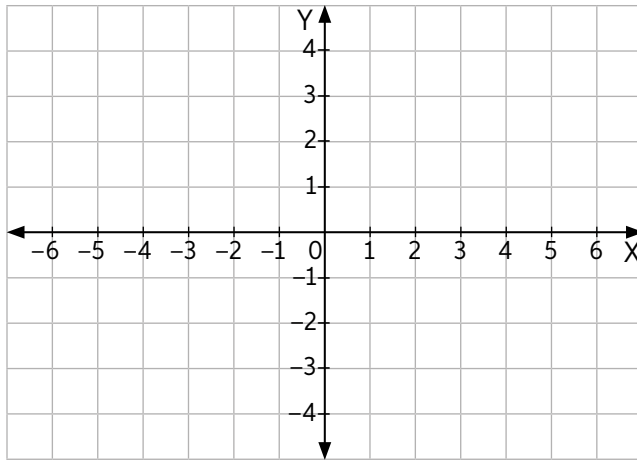
b.  $Q(0, -1)$

c.  $R(-3, 2)$

2. Encuentra y grafica el o los puntos que están a 5 unidades de distancia de  $L_1: 4x + 2y + 5 = 0$  y que pertenecen a la recta  $L_2: y = 0$ .



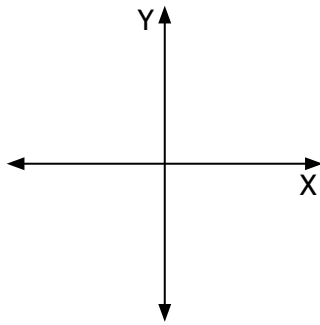
3. El triángulo  $ABC$  tiene de base los puntos  $A(-2, -1)$  y  $B(3, -2)$ . Si el punto  $C$  pertenece a la recta  $L: x + 5y - 6 = 0$ , determina el área del triángulo y gráficalo.



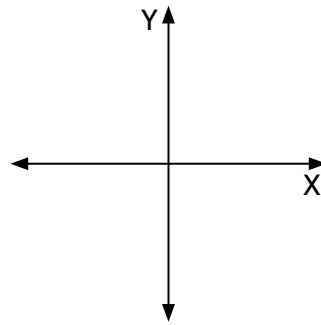
4. Encuentra los posibles valores de  $c$  para que la recta  $L_1: x + y - c = 0$  se encuentre a dos unidades de distancia de  $L_2: 3x + 3y + 6 = 0$ .

1. Dibuja las rectas que mejor representen los valores de  $m$  y  $n$  indicados.

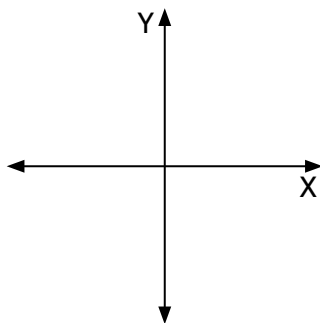
a.  $m > 0$  y  $n > 0$



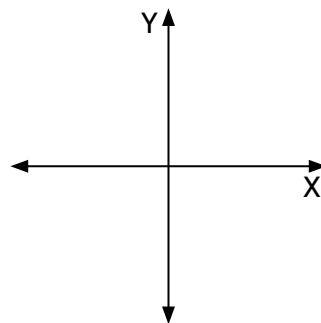
c.  $m > 0$  y  $n = 0$



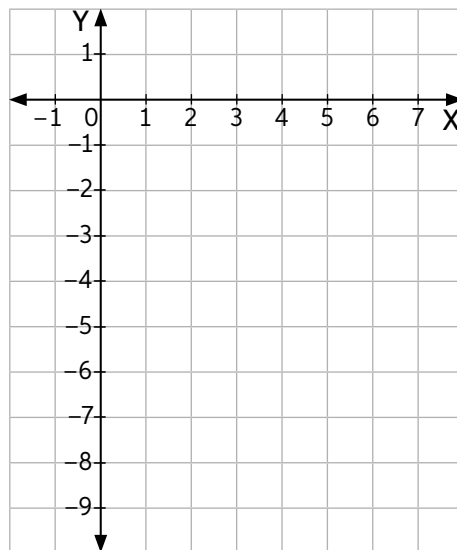
b.  $m < 0$  y  $n > 0$



d.  $m = 0$  y  $n > 0$



2. La recta  $3x - 2y = 18$  forma un triángulo con los ejes cartesianos. Grafica el triángulo y luego calcula su área y perímetro.



## Ecuación de la circunferencia

1. Determina el centro  $O$ , el radio  $r$  y la ecuación general de la circunferencia si los puntos indicados definen un diámetro.

a.  $A(4, 6)$  y  $B(4, -6)$

b.  $A(0, 0)$  y  $B(14, 48)$

c.  $A(-4, 5)$  y  $B(4, -12)$

d.  $A(-5, -9)$  y  $B(10, 17)$

2. Determina el centro y el radio de la circunferencia tangente a  $L: 3x + 4y = 0$  en el punto  $(0, 0)$ , sabiendo que el diámetro comienza en el origen y termina en  $A(6, 8)$ .

## Lección 8

3. Determina el o los valores de  $c$  para que el punto  $P(2c, c)$ , pertenezca a la circunferencia en cada caso:

a.  $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y = 6$

b.  $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y = 62$

4. Investiga y realiza las siguientes actividades.

**Paso 1:** Investiga las siguientes coordenadas geográficas de latitud y longitud:

a. Hogar:

( \_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_ )

b. Colegio:

( \_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_ )

c. Distancia entre los puntos:

\_\_\_\_\_

Unidad de medida usada:

\_\_\_\_\_

**Paso 2:** Copia las coordenadas en GeoGebra y determina las coordenadas del punto medio y la recta simetral.

d. Punto medio:

( \_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_ )

e. Responde en un párrafo pequeño: ¿existe un lugar de interés cercano al punto medio o en la simetral entre tu hogar y el colegio?, ¿pasa por ahí tu recorrido habitual de ida o regreso?, ¿podrías mejorar tu viaje?

**Links recomendados:**  
Puedes obtener las coordenadas de páginas como Google Maps.

## Posición relativa a las circunferencias

1. Determina la posición relativa e intersecciones de la recta  $L: y = x - 2$  a la circunferencia  $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$ .

2. ¿Cuál debe ser el valor de  $a$  y  $b$  para que las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  pasen por el punto  $P(4, 5)$ ?, ¿cuál es su posición relativa?

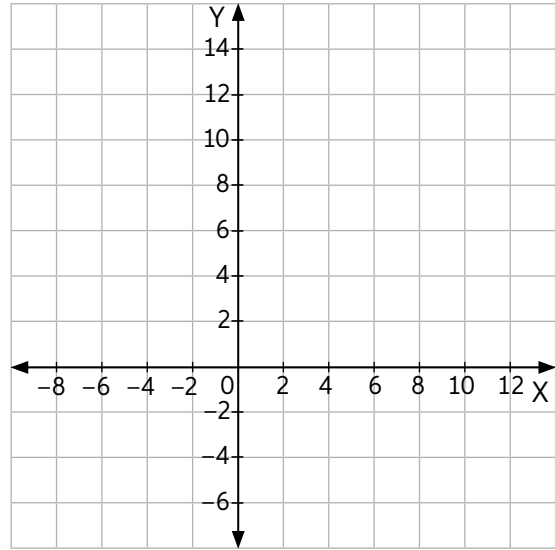
$$\begin{cases} C_1: x^2 + (y - 1)^2 = a + b \\ C_2: (x - 1)^2 + y^2 = a - b \end{cases}$$

3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que es tangente a  $C: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$  en el punto  $(5, 2)$ ?

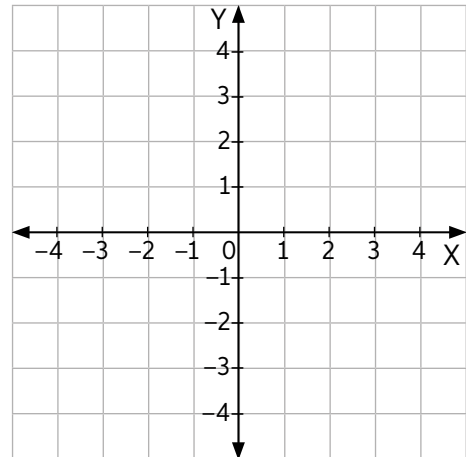
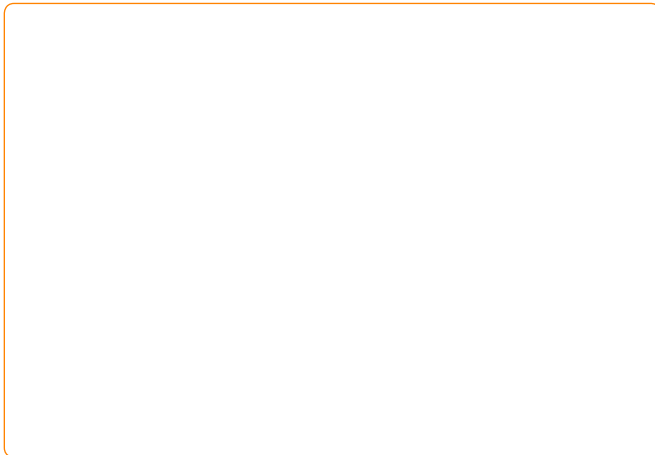
## Lección 8

4. Clasifica las circunferencias en internas o externas respectivamente. Luego, bosqueja su gráfica:

a. 
$$\begin{cases} C_1: O_1 = (3, 4) & r_1 = 10 \\ C_2: O_2 = (-1, 7) & r_2 = 1 \end{cases}$$



b. 
$$\begin{cases} C_3: O_3 = (1, 0) & r_3 = 1 \\ C_4: O_4 = (-1, 0) & r_4 = 1 \end{cases}$$



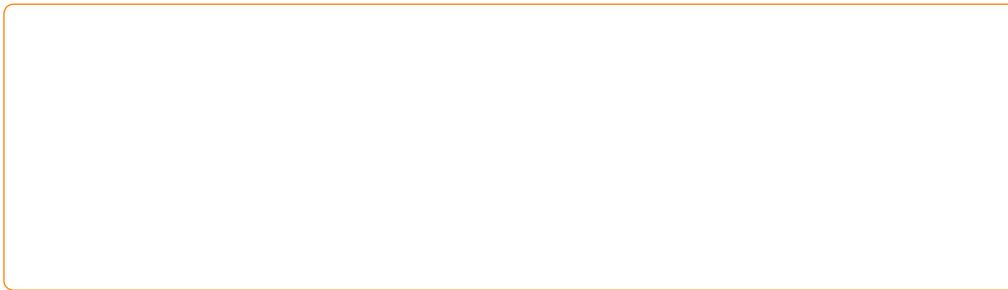


## Antes de continuar

1. Las rectas  $L_1: y = x - 2$  y  $L_2: y = x + 5$  son paralelas y tangentes a una circunferencia. ¿Cuál es la ecuación de la recta que contiene su centro?



2. Si la distancia de la recta  $L$  al centro de la circunferencia  $C: x^2 + y^2 + 2x = 24$  es 0 e interseca en los puntos  $A(-1, 5)$  y  $B$ , ¿cuáles son las coordenadas de  $B$ ?



3. Determina la posición relativa e intersecciones entre las circunferencias  $C_1: (x - 8)^2 + y^2 = 9$  y  $C_2: (x - 8)^2 + (y - 9)^2 = 4$ .



# Solucionario

## Unidad 1

### Lección 1

**Página 4** Porcentajes en el comercio

1.
  - a. Supermercado B.
  - b. Supermercado A.

**Página 5**

2. El bazar "Soluciones" es más conveniente.
3.
  - a. \$21 000
  - b. \$20 825
  - c. Se reduciría aproximadamente en un 4,2%.

**Página 6**

4. 3%
5. Respuesta personal. Depende de la elección del estudiante.

**Página 7** Presupuesto y planificación

1.
  - a. Gasto de \$60 144 000 anuales.
  - b. \$8 333 333
  - c. Nuevos sueldos: \$4 312 500. Disminuirá en \$562 500.

**Página 8**

2.
  - a. Los gastos variarán en un 5,92%. Los ingresos no variarán.
  - b. Ingresos: -7,42%; Gastos: -5,15%.
  - c. Ingresos: -7,42%; Gastos: -1,29%.

**Página 9**

- d. Respuesta personal.
- 3.

Producto	Mes 1	Mes 2	Variación	V.P.
Huevo	\$2 500	\$3 000	\$500	20%
Jamón	\$10 000	\$12 000	+\$2 000	20%
Queso	\$6 500	\$6 250	-\$250	-4%
Pan	\$1 400	\$1 350	-\$50	-4%
Café	\$5 600	\$5 432	-\$168	-3%
<b>Total</b>	<b>\$26 000</b>	<b>\$28 032</b>	<b>\$2 032</b>	<b>Promedio: 6%</b>

- a. El Jamón y el Huevo tuvieron mayor variación.
- b. 1%

**Página 11** Remuneraciones y descuentos legales

1. \$771 000
2.
  - a. \$225 000
  - b. \$61 729
  - c. Bruto: \$53 000; Líquido: \$47 700.

**Página 12**

3. Total Haberes: \$605 000; AFP: \$72 600; FONASA: \$42 350; Cesantía: \$3 630; Total descuentos: \$118 580; Líquido a pagar: \$486 420.
4.
  - a. Salud: \$46 410; AFP: \$66 300; Comisión AFP: \$9 945.

- b. Sí, los ingresos líquidos son actualmente \$405 000 y con contrato \$422 100 más el beneficio de salud y AFP.

**Página 13** Antes de continuar

1. Es más barato el viaje a Pucón.
2.
  - a. Comisión 62,5 USD. Recibe: 1 925,625 Libras.
  - b. Comisión: 75 USD. Recibe: 2 574 Euros.
3. Respuesta variable. Un ejemplo puede considerar es:

350 000	1 000 000
Gastos fijos + Variables = Total.	Fijos + Variables + Imprevistos + No necesarios = Total.
Prioridades	
Se priorizaron las necesidades básicas. Se descartaron los ítems que no fueran de primera categoría.	Se priorizaron las necesidades básicas y gastos variables necesarios. No se eliminó ninguna categoría.

### Lección 2

**Página 14** Ahorro e inversiones

1.
  - a. Es más conveniente el compuesto.

Mes	Compuesto	Simple
1	\$1 020 000	\$1 020 000
2	\$1 040 400	\$1 040 000
3	\$1 061 208	\$1 060 000

- b. Aproximadamente 6,1% para el compuesto y 6% para el simple.

**Página 15**

2.
  - a. Aproximadamente 5,95%.
  - b. Aproximadamente 12,25%.
3. Banco C es la opción más conveniente, ya que tiene un interés equivalente de 4,56%.

**Página 16** Créditos

1.
  - a. Fellini 2: \$2 270 000; Marchant 5: \$2 239 500
  - b. Valentina: Fellini 2: \$2 163 458; Marchant 5: \$2 084 205  
Andrés: Fellini 2: \$2 172 428; Marchant 5: \$2 101 423.

**Página 18** Antes de continuar

1.
  - a. En ambas opciones se obtiene \$501 000 000. El interés asociado para los 10 años es 0,02% y para los 20 años es aproximadamente 0,01%.
  - b. Es mejor la opción de los 10 años, bajo el criterio de interés equivalente y tiempo.
2. Bajo el criterio de CAE y cuota.

## Unidad 2

### Lección 3

#### Página 19 Crecimiento y decrecimiento potencial

- Verdadero
  - Verdadero
  - Verdadero
  - Verdadero

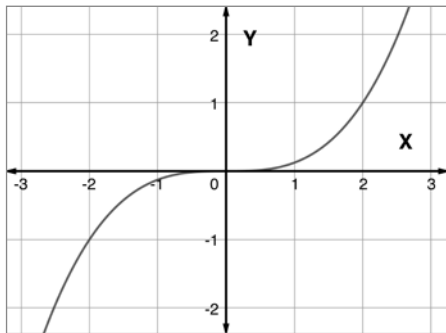
- 18
  - 0
  - 54
  - 0

#### Página 20

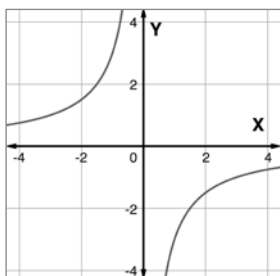
- $f(x)$  es par y  $g(x)$  es impar.
  - Para  $x = 0$  y  $x = 1$ .

4.

a.  $f(x) = \frac{x^3}{8}$



b.  $f(x) = -\frac{3}{x}$

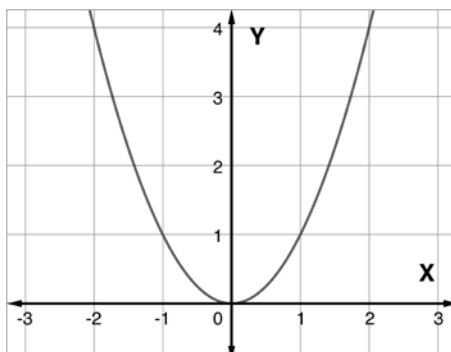


#### Página 21 Función potencia de exponente positivo

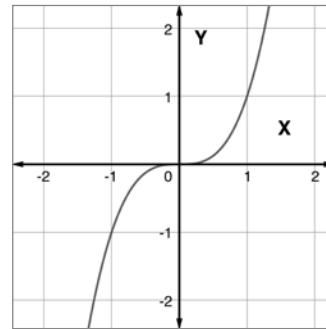
- Simétrico;  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
  - Simétrico
  - Origen;  $\mathbb{R}$
  - Decreciente;  $\mathbb{R}$

2. Respuestas variables. Por ejemplo:

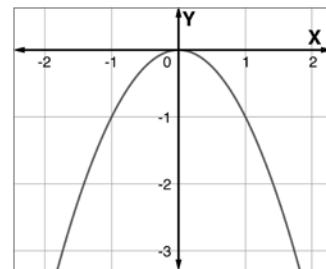
a.  $f(x) = 2x^2$



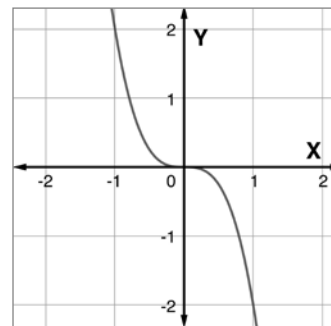
b.  $f(x) = x^3$



c.  $f(x) = -x^2$



d.  $f(x) = -2x^3$



#### Página 22

3.

- $B$  en función de  $A$  es creciente.
- Como  $B = a \cdot A^n$  es negativo para  $A$  negativo, entonces  $n$  es positivo. Luego:  
Si  $n$  es par, se tiene que  $a$  es negativo.  
Si  $n$  es impar, se tiene que  $a$  es positivo.
- Los mejores valores son  $a = 1$  y  $n = 3$ .  
Función:  $f(x) = x^3$
- Respuesta de reflexión personal.

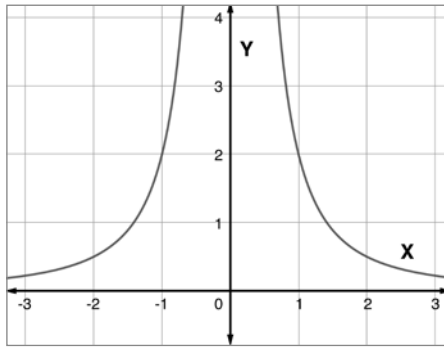
#### Página 23 Función potencia de exponente positivo

1.

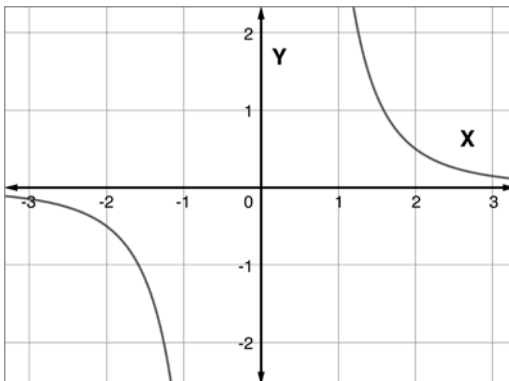
- Simétrico;  $\mathbb{R}^+$
- Simétrico;  $\mathbb{R}^-$
- Origen;  $\mathbb{R} - \{0\}$
- Creciente;  $\mathbb{R} - \{0\}$

2. Respuesta variable. Por ejemplo:

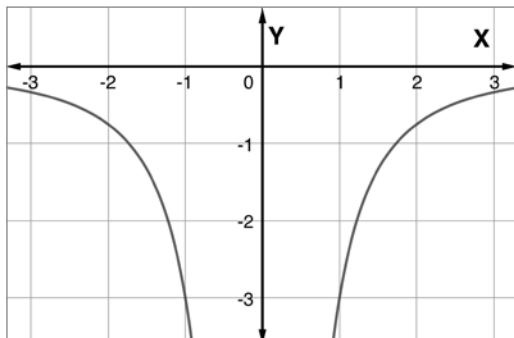
a.  $f(x) = 2x^{-2}$



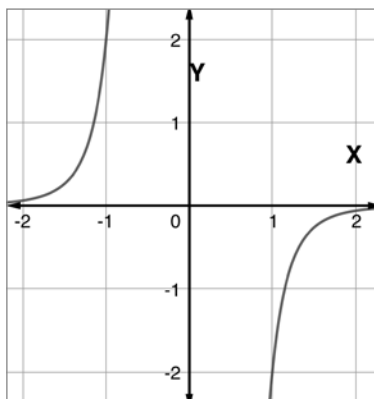
b.  $f(x) = 4x^{-3}$



c.  $f(x) = -3x^{-2}$



d.  $f(x) = -2x^{-5}$



### Página 24

3.

- $B$  en función de  $A$  es decreciente.
- Como  $B = a \cdot A^n$  es positivo para  $A$  positivo, entonces  $n$  es negativo.
- Los mejores valores son  $a = 50$  y  $n = -2$ . Función:  $f(x) = 50 \cdot x^{-2}$
- Respuesta de reflexión personal.

### Página 25 Antes de continuar

1.

- Para la tabla  $A$ , la función es decreciente y es impar. Para la tabla  $B$ , es creciente y es impar.
- Para la tabla  $A$ ,  $n$  es positivo y si es par,  $a$  es positivo; de lo contrario, si  $n$  es impar,  $a$  es negativo. Para la tabla  $B$ ,  $n$  es negativo y  $a$  positivo.
- Para la tabla  $A$ , los valores son  $n = 3$  y  $a = -3$ . Para la tabla  $B$ , los valores son  $n = -3$  y  $a = 8$ .
- Tabla  $A$ :  $f(x) = -3x^3$

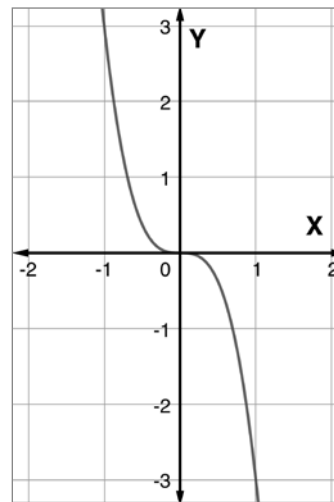
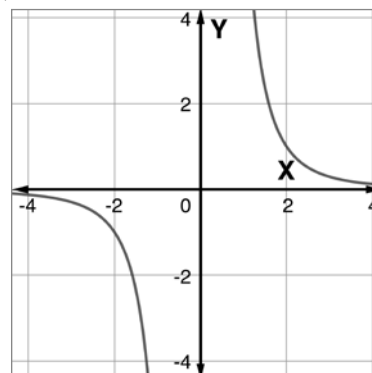


Tabla  $B$ :  $f(x) = 8x^{-3}$



### Lección 4

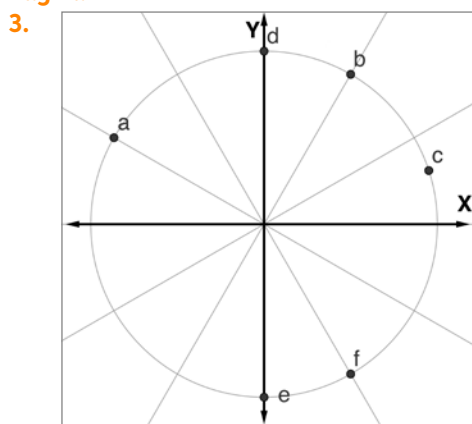
#### Página 26 La circunferencia unitaria

1.

- $x^2 + y^2 = 1$ .
- $\frac{-\pi}{6}$ .
- $180^\circ$ .
- Radio.
- Cateto opuesto / Hipotenusa.

2.  
 a.  $\frac{\pi}{9}$   
 b.  $\frac{13\pi}{9}$   
 c.  $-\frac{\pi}{4}$   
 d.  $\frac{26\pi}{9}$   
 e.  $\frac{\pi}{180}$

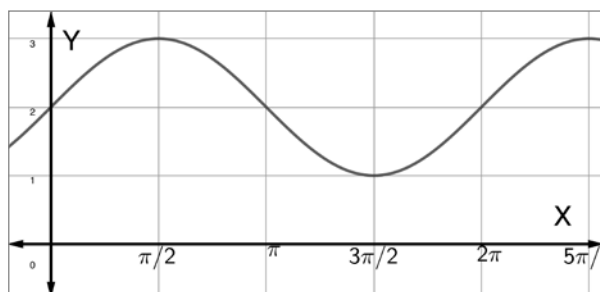
**Página 27**



- a.  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$   
 b.  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$   
 c. (0,342; 0,939)  
 d. (0, 1)  
 e. (0, -1)  
 f.  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

**Página 28** Funciones seno y coseno

1.  
 a. Falso, en este intervalo la función es negativa.  
 b. Verdadero.  
 c. Falso, la función seno es impar  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$
2.  
 a.  $f(x) = -\text{sen}(\frac{\pi}{2} + x)$   
 b.  $f(x) = \text{sen}(\frac{3\pi}{2} - x)$   
 c.  $f(x) = -\text{sen}(x)$
- 3.

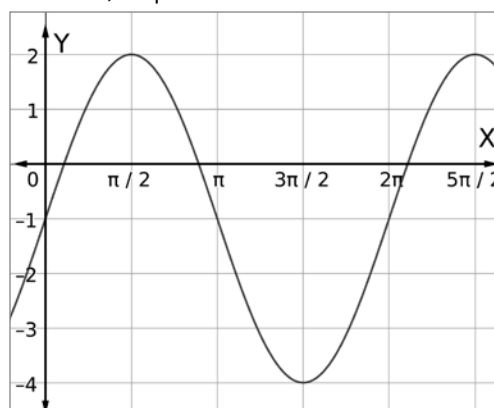


**Página 29** Amplitud y periodo de las funciones seno y coseno

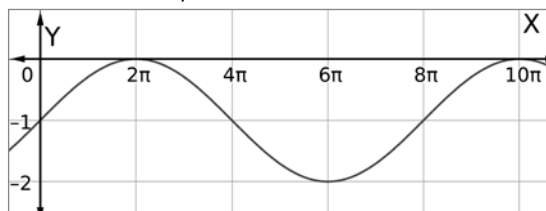
1.  
 a. Máximo: 3; mínimo: -3.  
 b. Máximo:  $\frac{1}{3}$ ; mínimo:  $-\frac{1}{3}$ .  
 c. Máximo: 1; mínimo: -1.
2.  
 a. Periodo:  $\frac{2\pi}{3}$ ; amplitud: 1.  
 b. Periodo:  $\frac{\pi}{3}$ ; amplitud: 1.  
 c. Periodo:  $\pi$ ; amplitud:  $\frac{2}{3}$ .

**Página 30**

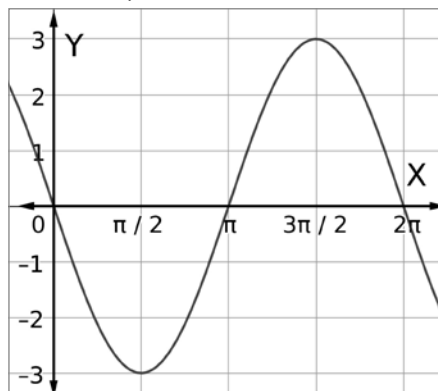
3.  
 a. Periodo:  $2\pi$ , amplitud: 3



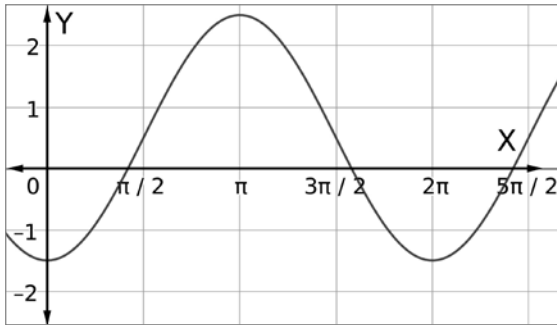
- b. Periodo:  $8\pi$ , amplitud: 1



- c. Periodo:  $2\pi$ , amplitud: 3



- d. Periodo:  $2\pi$ , amplitud: 2

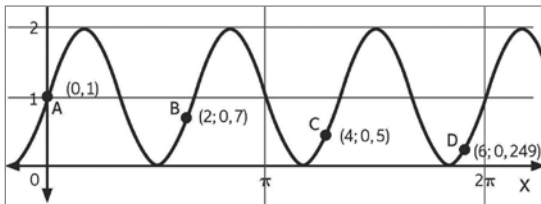


**Página 31** Antes de continuar

1.
  - a. Verdadero.
  - b. Falso, el periodo de ambas es  $2\pi$ .
  - c. Verdadero.
- 2.

x	$f(x) = \text{sen}(3x) + 1$
0	1
2	0,7
4	0,45
6	0,249

a.



b. Respuesta de reflexión personal.

### Unidad 3

#### Lección 5

**Página 32** Valor esperado y varianza de una V.A.

1.
  - a.
    - Esperanza:  $-60$
    - Varianza:  $450\,400$
  - b. No, se espera perder  $\$60$  por juego.
2.
  - Esperanza dado 1:  $2,6$ .
  - Esperanza dado 2:  $2,7$ .
  - El dado 2 es más conveniente.

**Página 33** Distribución binomial

1.

52	0,5	$\binom{52}{x} 0,5^x 0,5^{52-x}$
15	0,25	$\binom{15}{x} 0,25^x 0,75^{15-x}$
38	$\frac{1}{3}$	$\binom{38}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{38-x}$

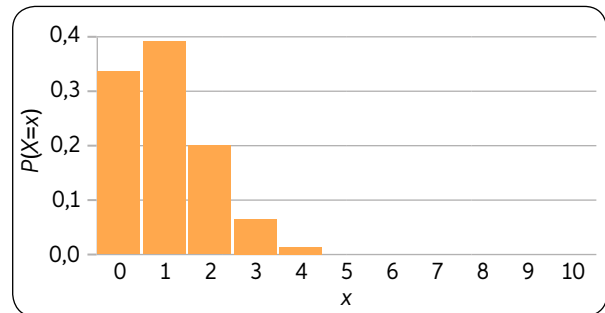
2.

- a. V
- b. F, también asocia los números 0 y 1.
- c. F, es el intervalo  $[0, 1]$ .
- d. F, el dominio de una variable aleatoria son los posibles resultados del experimento. El recorrido de una función de probabilidad es siempre  $[0, 1]$ .

**Página 34**

3.

- a.  $n = 10, \mu = 1, \sigma^2 = 0,9$ .
- b.  $\binom{10}{x} 0,1^x 0,9^{10-x}$
- c.



- d. 9 preguntas.
- e.  $\$890\,000$  premio final.

**Página 35** Antes de continuar

1.

- a.  $3,8$
- b. La probabilidad de un número impar es  $0,4$ . Es más probable un número par.
- c. X: Obtener un número 1 en el lanzamiento de un dado. Con parámetro  $p = 0,1$ .
- d.  $P(X \geq 2) = 0,0814$

**Página 36** Valor esperado y varianza de una variable aleatoria

1.

- a.  $400$
- b. El dominio es  $[0, 2[$  y el recorrido es  $[0, 1[$ .

2.

- a.  $0,4$
- b.  $0,6$
- c.  $0,4$

**Página 37** Distribución normal

1. Probabilidades:  $0,1\%$ ;  $13,6\%$ ;  $34,1\%$ ;  $2,1\%$ .  
Eje X:  $\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma; \mu - \sigma; \mu; \mu + \sigma; \mu + 2\sigma; \mu + 3\sigma$ .

2.

- a.  $P(75\,000 < X) = 0,158$ .
- b.  $P(75\,000 < X < 115\,000) = 0,157$ .
- c.  $P(115\,000 < X) = 0,001$ .

**Página 38**

3.

- a.  $0,978$
- b.  $0,659$
- c.  $0,5$
- d.  $0,136$
- e.  $0,682$

**Página 40** Distribución normal estándar

1.
  - a. 0,9772
  - b. 0,1752
  - c. 0,758
  - d. 0,1788
2. 0,7968
3. 0,3573

**Página 41**

4.
  - a. Media: 3, Desviación estándar: 3.
  - b. Media: 2, Desviación estándar: 1.
5. El puntaje mínimo es 112.

**Página 42** Estimación de la media de una población

1.
  - a. (14,8971; 16,5029)
  - b. (4,4267; 5,5733)
2. El intervalo de confianza al 99% es (548,4; 651,6).  
Luego, como 500 no pertenece al intervalo, el cliente tiene la razón, con un 99% de confianza.

**Página 43** Aproximación normal a la binomial

1.
  - a. 0,0399
  - b. 0,5199
  - c. 0,5199
  - d. 0,0885
2.
  - a. Media: 48, Desviación: 6,79.
  - b. 0,9616
  - c. 0,8484

**Página 44** Antes de continuar

1.
  - a. F. Asocia un número real a cada posible resultado del experimento aleatorio.
  - b. V
2.
  - a.  $Z = \frac{X - 1,65}{0,15}$
  - b. 0,3707
  - c. 0,1587
  - d. 1,842

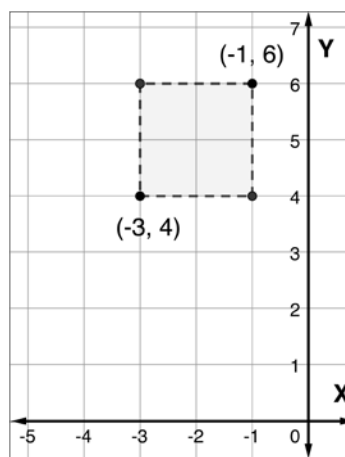
**Unidad 4**

**Lección 7**

**Página 45** Distancia entre puntos en el plano cartesiano

1.
  - a.  $k = 10$  y  $k = -6$
  - b.  $k = -5$  y  $k = 9$

2.



Perímetro = 8

**Página 46** Rectas en el plano

1.
  - a.  $m = -\frac{3}{4}, n = 1.$
  - b.  $m = -\frac{5}{2}, n = -3.$
  - c.  $m = -1, n = -16.$
  - d.  $m = 1, n = 0.$
2.
  - a.  $k = -3$

**Página 47**

- b.  $k = 1$
- c.  $k = 3$
3.
  - a.  $L_1: y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$
  - b.  $L_2: y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
  - c.  $L_3: y = \frac{2}{3}x + b - \frac{2}{3}a$

**Página 48** Distancia de un punto a una recta

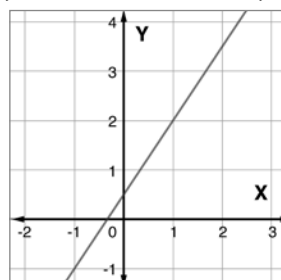
1.
  - a.  $d = \frac{24}{13}\sqrt{13}$
  - b.  $d = \frac{3}{13}\sqrt{13}$
  - c.  $d = 0$
2.  $P_1\left(\frac{10\sqrt{5}-5}{4}, 0\right), P_2\left(-\frac{10\sqrt{5}+5}{4}, 0\right).$

**Página 49**

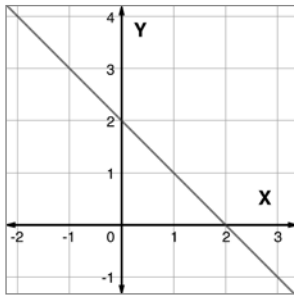
3.  $A_{ABC} = 13$  unidades
4.  $c = 2(\sqrt{2} \pm 1)$

**Página 50** Antes de continuar

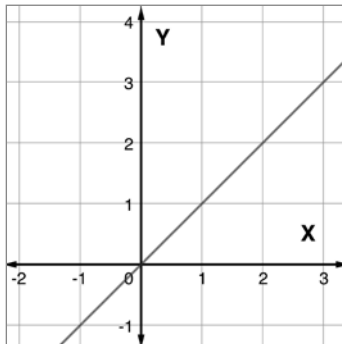
1. Respuestas variables. Por ejemplo:
  - a.



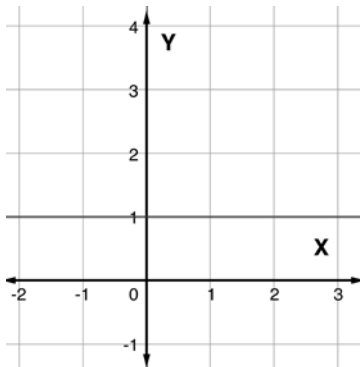
b.



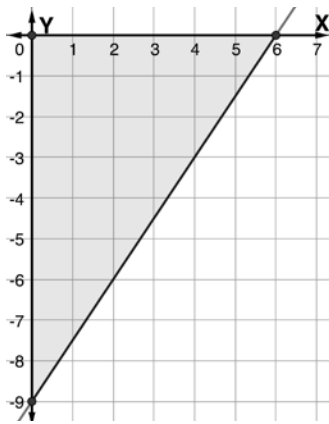
c.



d.



2.



3.  $A = 27, P = 15 + 3\sqrt{13}$

**Página 51** Ecuación de la circunferencia

1.

a.  $O(4, 0); r = 6; (x - 4)^2 + y^2 = 36$

b.  $O(7, 24); r = 25; (x - 7)^2 + (y - 24)^2 = 625$

c.  $O(0; 3,5); r = \frac{\sqrt{353}}{2}; x^2 + (y - 3,5)^2 = \frac{353}{4}$

d.  $O(2,5; 4); r = \frac{\sqrt{901}}{2}; (x - 2,5)^2 + (y - 4)^2 = \frac{901}{4}$

2.  $r = 5; c = (3, 4)$

**Página 52**

3.

a.  $c = 1 \pm \sqrt{\frac{11}{5}}$

b.  $c = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{311}}{5}$

**Página 53** Posición relativa a las circunferencias

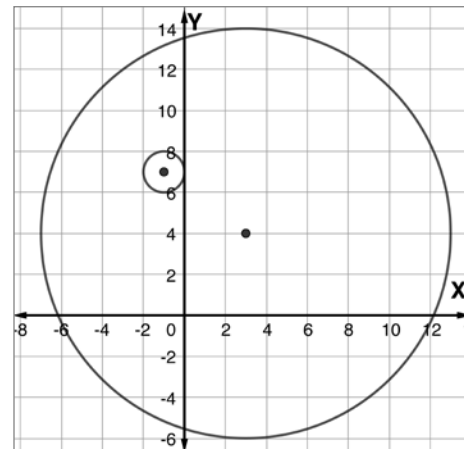
1.  $L: y = x - 2$  es secante a C.

2.  $a = 33; b = -1$ . Las circunferencias son secantes.

3. La recta  $x = 5$

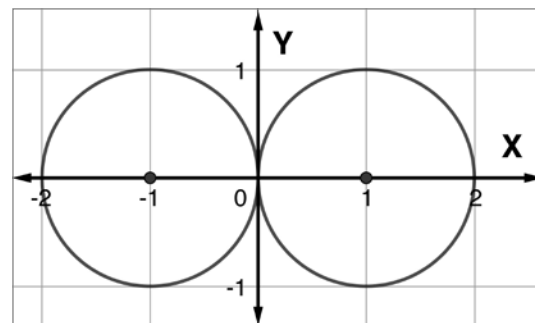
4.

a.



Internas

b.



Tangentes exteriores

**Página 55** Antes de continuar

1.  $y = x - (a + b)$  con centro  $O(a, b)$

2.  $B(-1, -5)$

3. Son exteriores y no se intersecan.



# Rúbricas de actividades

## Proyecto página 10: Modificaciones del IPC

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
<b>Recopilación de la información</b>	Recopilan la información de fuentes confiables para cumplir con todos los requerimientos.	Recopilan la información de fuentes confiables para cumplir con algunos requerimientos.	Recopilan la información de fuentes poco confiables o no recopilan información.
<b>Análisis de las problemáticas planteadas</b>	Fundamentan correcta y coherentemente el porqué de agregar y quitar los tres productos o servicios.	Fundamentan correcta y coherentemente el porqué de agregar y quitar uno o dos elementos de la canasta.	No fundamentan el porqué de agregar y quitar los productos o servicios.
<b>Reflexión</b>	Los estudiantes reflexionan y comparten sus opiniones de forma clara, completa y consistente con lo propuesto en la actividad. Responden a las preguntas propuestas en la actividad.	Los estudiantes reflexionan de forma parcial respecto a lo propuesto en la actividad. Responden algunas preguntas propuestas en la actividad.	Los estudiantes no reflexionan ni comparten opiniones sobre la actividad. No responden a las preguntas planteadas en la actividad.

## Proyecto página 17: Seguros para celulares

Nivel de logro / Criterio	Excelente (5 puntos)	Bueno (3 puntos)	Debe mejorar (1 punto)
<b>Investigación de términos asociados a seguros</b>	Recopilan la información necesaria y registran todas sus fuentes.	Recopilan la información necesaria, pero no registran todas sus fuentes.	La información presentada no tiene fuentes confiables.
<b>Análisis</b>	El párrafo resume las conclusiones mediante argumentos bien fundamentados.	El párrafo resume las conclusiones con algunos argumentos bien fundamentados.	El párrafo no presenta conclusiones ni fundamentaciones.
<b>Afiche</b>	El afiche presenta la información pedida y sus conclusiones.	El afiche no presenta toda la información pedida o sus conclusiones.	El afiche no presenta la información pedida ni sus conclusiones.



