



Texto del Estudiante

# MATEMÁTICA 3.º MEDIO

Natalia Villalobos Silva | Marcela Rojas Carvajal | Mónica Caroca Toro  
Lucía Rencoret Bravo | Marco Linares Rodríguez



Edición especial para el Ministerio de Educación. Prohibida su comercialización.







Texto del Estudiante

# MATEMÁTICA

3.º  
MEDIO

## **Natalia Villalobos Silva**

Profesora de Matemática mención Estadística Educacional  
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación  
Magíster en Estadística  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

## **Marcela Rojas Carvajal**

Licenciada en Matemática  
Profesora de Educación Media en Matemática  
Pontificia Universidad Católica de Chile  
Magíster en Didáctica de la Matemática  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

## **Mónica Caroca Toro**

Licenciada en Ciencias Exactas  
Profesora de Educación Media en  
Matemática y Física  
Universidad de Chile

## **Lucía Rencoret Bravo**

Licenciada en Ciencias Exactas  
Profesora de Educación Media en Matemática y Física  
Magíster en Gestión para el liderazgo educacional  
Universidad Andrés Bello

## **Marco Linares Rodríguez**

Licenciado en Educación de Física y Matemática  
Profesor de Estado en Física y Matemática  
Universidad de Santiago de Chile

# Estructura gráfica

El **Texto del Estudiante** se divide en dos niveles, **3º y 4º medio**. Cada uno consta de tres unidades. Al recorrer este libro encontrarás las siguientes secciones:

## Inicio de unidad

### Nombre y número de unidad

Se relaciona con la temática o hilo conductor que se desarrollará en la unidad y con sus contenidos matemáticos.

### Sección inicial motivadora

Se relaciona con las habilidades del siglo XXI.

**Unidad 1 Tomo decisiones en el ámbito económico**

**Tasas de interés e índices económicos**

- ¿Qué índices económicos conoces?
- ¿Cómo piensas que influye la economía del país en tu vida cotidiana?

**Recorrido y utilizando herramientas digitales**

¿Averigua el interés del valor en UF de una propiedad nueva o usada. Busca en la red en consecuencia el UF presente.

- ¿Cuál es el valor de la propiedad en UF en pesos en el día de hoy?
- ¿Cuál será el valor en pesos en 30 días más? ¿cómo se denominará? ¿por qué crees que ocurre esta variación?
- ¿Qué factores tendrías en cuenta si tuvieses que comprar la propiedad? ¿por qué?

**Conocimientos previos**

**Porcentaje (Nº)**  
Cantidad de partes que se consideran de las 100 partes iguales en que se divide un total. Se puede expresar como una fracción de denominador 100 como una razón de consecuentes 100.

**Variación porcentual**  
Diferencia de relación porcentual entre un valor inicial y uno final, expresada en términos del valor inicial.

**Interés simple**  
Variación en el tiempo de una cantidad de dinero que se puede expresar como un porcentaje de la cantidad inicial.

La fórmula para calcular el dinero obtenido  $C_n$  a partir de un monto inicial  $C_0$ , tras períodos de vigencia de una tasa de interés simple  $i$  durante  $n$  meses es como decimos:  $C_n = C_0(1 + i \cdot n)$

**Interés compuesto**  
Variación en el tiempo de una cantidad de dinero en que se van sumando los intereses obtenidos en cada período, generando nuevos intereses.

La fórmula para calcular el dinero obtenido  $C_n$  a partir de un monto inicial  $C_0$ , tras períodos de vigencia de una tasa de interés compuesto  $i$  expresado como decimal de frecuencia  $n$  es:  $C_n = C_0(1 + i)^n$

### Recursos y herramientas web

Te permiten acceder a recursos en línea para profundizar en los contextos articuladores y apoyar el cálculo, comprobar resultados y manipular objetos geométricos, entre otros.

### Conocimientos previos

Se relaciona con los conocimientos de cursos anteriores que serán utilizados para el desarrollo de los nuevos aprendizajes.

### BDA (Banco Digital de Actividades)



Conexión con el BDA para ejercitar, profundizar, complementar, afianzar e integrar los nuevos aprendizajes.

## Lecciones

Al inicio de cada lección se propone una sección cuya finalidad es reconocer las ideas previas y las motivaciones personales de las y los estudiantes, aproximando los nuevos aprendizajes a partir de una situación problematizadora contextualizada.

### Nombre y número de lección

**Lección 6 Toma de decisiones con el modelo normal**

**Caracterizando la distribución normal**

En el sur de nuestro país se realizó una carrera familiar para fomentar el deporte y la vida sana. Conoce el desarrollo de la actividad. Los organizadores registraron la cantidad de deportistas que cruzaron la meta cada 5 minutos y estos datos corresponden al histograma adjunto.

- ¿Cómo crees que se venían los participantes de la comarca? ¿cómo se sentían tú?

En el histograma, ¿cuáles fueron los tiempos mínimo y máximo registrados?

En el histograma, ¿cuál es el intervalo modal? ¿cuál es su frecuencia?

Si dibujas polígonos de frecuencias correspondientes al histograma, ¿se obtiene una figura aproximadamente simétrica? ¿por qué?

**Tempos registrados en la carrera familiar**

Coste de participantes

En el gráfico de la función en una coma con forma de campana que muestra el costo  $X$  y su similitud respecto de la curva normal  $N(\mu, \sigma)$ , ¿cómo crees que la distribución normal coincide con la media, la mediana y la moda, en  $n = 1$  se registra su máximo.

¿Por qué crees que para una variable aleatoria continua se cumple que  $P(X = a) = 0$ ? Comparte tu respuesta con el resto del curso.

**Praxis 3 Aproximación de una distribución de datos mediante una normal.**

¿Es una buena aproximación utilizar la distribución normal para los tiempos registrados en el histograma inicial? Justifica tu respuesta con mayor forma de gráfico o de función.

**Paso a Paso**

1. Encuentra los valores del promedio y de la desviación estándar de los tiempos de los atletas.  $\bar{x} = 93,3$  min.  $\sigma = 10$  min.
2. Determina la ubicación de las medidas de tendencia central.
  - Media aritmética es 93,3 min, por lo tanto, pertenece al intervalo [90, 95].
  - Moda se encuentra en el intervalo modal que es [90, 95].
  - Mediana pertenece al intervalo [90, 95], ya que los datos en las posiciones 500 y 501 están en el 90 y 95 minutos, la moda y la mediana pertenecen al mismo intervalo en el histograma.
3. Determina el porcentaje de datos ubicados en términos de promedios.
  - Calculamos el porcentaje de datos ubicados en el intervalo  $J = [85, a + 4\sigma]$  para  $\mathcal{N}(93,3, 10)$ .
  - $a = 1 \Rightarrow [85, 103,3]$  se ubican aproximadamente 700 datos, es decir, un 70,0 %.
  - $a = 2 \Rightarrow [75, 113,3]$  se ubican aproximadamente 900 datos, es decir, un 90,0 %.
4. Responde.

En principio, la distribución de los tiempos de los atletas cumple algunas de las condiciones de una distribución normal y podría aproximarse por ella.

### Formalización

Enunciados y síntesis de conceptos relevantes para el aprendizaje. Puede guiar el modelamiento o ubicarse después de la etapa exploratoria.

### Preguntas motivadoras

Preguntas individuales y grupales para estimular la reflexión y la comprensión de los nuevos conocimientos y habilidades.

### Ejemplos

Ejemplos y modelamientos explicados paso a paso para resolver problemas y responder a requerimientos variados.



# Índice

## » 3º medio

### Unidad 1

#### Decido hacer deporte y cuidar mi salud

Medidas de dispersión y probabilidades condicionales ..... 6



ARQUERA

**Claudia** 1

Edad:	17 años
Masa:	70 kg
Estatura:	180 cm
Partidos jugados:	28
Expulsiones:	1

**6**

#### Lección 1

Toma de decisiones con medidas de dispersión ..... 8

Decidiendo con medidas de dispersión para datos no agrupados..... 8

Decidiendo con medidas de dispersión para datos agrupados..... 14

#### Lección 2

Toma de decisiones con probabilidades condicionales .. 20

Decidiendo mediante diagramas de árbol de probabilidades..... 20

Decidiendo mediante probabilidades condicionales ..... 24

**Síntesis de unidad 1 ..... 28**

### Unidad 2

#### Uso herramientas para aplicar modelos matemáticos

Funciones exponencial y logarítmica ..... 30



#### Lección 3

Aplicación de modelos con la función exponencial ..... 32

Caracterizando modelos exponenciales..... 32

Modificando parámetros de la función exponencial ..... 38

#### Lección 4

Aplicación de modelos con la función logarítmica ..... 44

Caracterizando modelos logarítmicos..... 44

Modificando parámetros de la función logarítmica..... 50

**Síntesis de unidad 2 ..... 56**

### Unidad 3

#### Resuelvo problemas en formas circulares de mi entorno

La circunferencia y sus elementos ..... 58



#### Lección 5

Resolución de problemas de ángulos en circunferencias ..... 60

Calculando ángulos central e inscrito..... 60

Calculando ángulos interior, exterior, semiinscrito y exinscrito .. 64

#### Lección 6

Resolución de problemas de segmentos en circunferencias.. 70

Calculando la longitud de cuerdas ..... 70

Calculando la longitud de secantes y tangentes ..... 74

**Síntesis de unidad 3 ..... 78**

## » 4º medio

### Unidad 1

#### Tomo decisiones en el ámbito económico

Tasas de interés e índices económicos ..... 1



# 1

#### Lección 1

Toma de decisiones en mi economía personal ..... 2

Calculando el sueldo líquido ..... 2

Solicitando créditos y ahorrando ..... 6

#### Lección 2

Toma de decisiones con indicadores económicos ..... 12

Calculando precios ..... 12

Conociendo los tipos de cambio ..... 18

**Síntesis de unidad 1 ..... 22**

### Unidad 2

#### Construyo modelos para comprender mi entorno

Funciones potencia, seno y coseno ..... 24



# 24

#### Lección 3

Aplicación de modelos con la función potencia ..... 26

Caracterizando la función potencia ..... 26

Modificando parámetros de la función potencia ..... 34

#### Lección 4

Aplicación de modelos con las funciones seno y coseno ..... 38

Caracterizando las funciones seno y coseno ..... 38

Modificando parámetros de las funciones seno y coseno ..... 46

**Síntesis de unidad 2 ..... 50**

### Unidad 3

#### Decido por mi salud y mi bienestar

Modelos binomial y normal ..... 52



# 52

#### Lección 5

Toma de decisiones con el modelo binomial ..... 54

Calculando probabilidades con la distribución de Bernoulli ..... 54

Decidiendo con la distribución binomial ..... 58

#### Lección 6

Toma de decisiones con el modelo normal ..... 64

Caracterizando la distribución normal ..... 64

Decidiendo con la distribución normal estándar ..... 68

**Síntesis de unidad 3 ..... 74**

» Glosario ..... 76

Páginas web ..... 77

Bibliografía ..... 77

**ARQUERA**



**Claudia** **1**

<b>Edad:</b>	17 años
<b>Masa:</b>	70 kg
<b>Estatura:</b>	180 cm
<b>Partidos jugados:</b>	28
<b>Expulsiones:</b>	1

**DEFENSA**



**Alexis** **17**

<b>Edad:</b>	16 años
<b>Masa:</b>	74 kg
<b>Estatura:</b>	183 cm
<b>Partidos jugados:</b>	25
<b>Expulsiones:</b>	3

Unidad

# 1

## Decido hacer deporte y cuidar mi salud

### Medidas de dispersión y probabilidades condicionales

- ¿Cuál de los datos de los y las deportistas varía menos?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Qué beneficios tiene hacer deporte?

### Tomando la iniciativa

Elige un deporte que te guste y que no hayas practicado antes e imagina que vas a practicarlo a partir de mañana.

- ¿Es un deporte individual o grupal?, ¿Cómo lo relacionas con los contenidos estudiados en años anteriores? Explica.
- ¿Qué acciones previas debes realizar para iniciar su práctica?
- Conversa con tus compañeros respecto de los deportes escogidos, ¿cuántos coinciden con el tuyo?
- Respecto de la pregunta anterior, ¿cuál es la frecuencia relativa porcentual del deporte que escogiste?

**MEDIOCAMPISTA**



**Javiera** **14**

<b>Edad:</b>	17 años
<b>Masa:</b>	62 kg
<b>Estatura:</b>	170 cm
<b>Partidos jugados:</b>	27
<b>Expulsiones:</b>	1

**DELANTERO**



**Alejandro** **7**

<b>Edad:</b>	17 años
<b>Masa:</b>	67 kg
<b>Estatura:</b>	175 cm
<b>Partidos jugados:</b>	28
<b>Expulsiones:</b>	0



Para relacionar el fútbol con la matemática  
 conéctate a <https://11nq.com/BGcNB>  
 ¿Crees que en el futuro será posible predecir  
 los resultados de eventos deportivos?, ¿por qué?

**Conocimientos previos**

**Media aritmética o promedio ( $\bar{x}$ )**  
 Se calcula como el cociente entre la suma de los  
 datos y la cantidad total de datos.

Ejemplo:  
 Los siguientes datos son los puntajes obtenidos  
 en una prueba de admisión a una empresa.

100; 121; 134; 123; 142

Para calcular el promedio se suman los puntajes y  
 se divide por el total de datos, luego se tiene:

$$\bar{x} = \frac{100 + 121 + 134 + 123 + 142}{5} = \frac{620}{5} = 124$$

**Probabilidades**  
 Se puede calcular como el cociente entre la  
 cantidad de resultados favorables al suceso y la  
 cantidad total de resultados posibles.

Ejemplo:  
 Al lanzar un dado de seis caras, ¿cuál es la  
 probabilidad de obtener un múltiplo de 2?

El espacio muestral ( $\Omega$ ) y el suceso obtener un  
 múltiplo de 2 es:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \#\Omega = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\}, \#A = 3$$

La probabilidad de obtener un múltiplo de 2, es

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

# Toma de decisiones con medidas de dispersión

## Decidiendo con medidas de dispersión para datos no agrupados

A Clara le gusta correr y sabe que para mejorar su rendimiento debe intentar mantener un ritmo constante. Ella entrena en dos circuitos callejeros algo sinuosos y con superficie irregular, lo que dificulta que mantenga su ritmo. En una *app* de su celular se registraron los tiempos que tarda en recorrerlos, desagregados cada 2 km.

- ¿Qué crees que motiva a la gente a correr? ¿Qué te motivaría a ti?
- Ella debe elegir uno de los dos circuitos para continuar sus entrenamientos y mejorar su rendimiento. Intuitivamente, ¿qué consejo le darías para ayudarla a tomar su decisión? Arguméntalo.

Avanza 2 km  
Avanza 2 km  
Avanza 2 km  
Avanza 2 km



Avanza 2 km  
Avanza 2 km  
Avanza 2 km  
Avanza 2 km



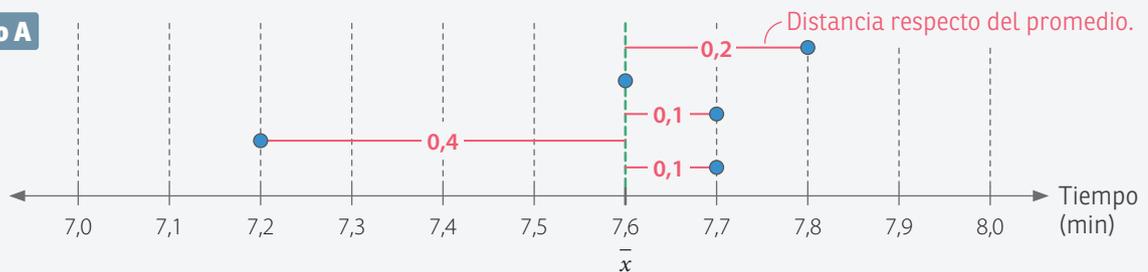
## « Dispersión

Las medidas de dispersión son parámetros estadísticos que indican cuánto se alejan los datos respecto de la media aritmética. Es decir, indican la variabilidad de los datos. A menor dispersión los datos son más homogéneos.

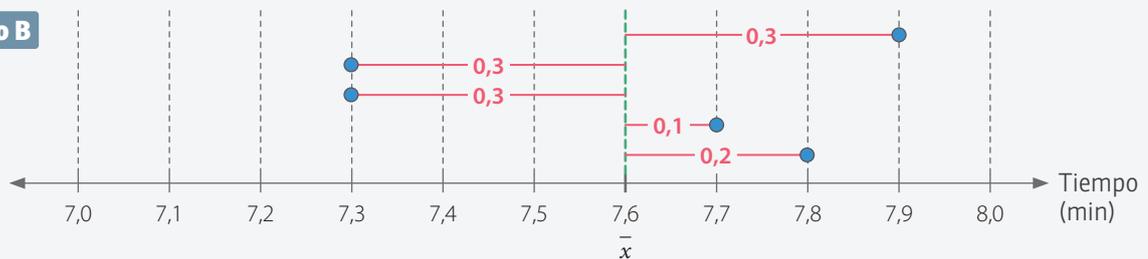
- 1 ¿Cómo interpretas que los datos de un conjunto estén más dispersos que los de otro?
- 2 ¿Cómo podrías relacionar el concepto de dispersión con la decisión que debe tomar Clara? Argumenta.

En situaciones de incertidumbre, como la que enfrenta Clara, cuantificar la dispersión puede orientar la toma de decisiones. Gráficamente, sus tiempos y las medias aritméticas ( $\bar{x}$ ) se pueden representar de la siguiente manera:

### Circuito A



### Circuito B



Para calcular el promedio de ambos circuitos, se suman todos los tiempos y luego se divide por el total de veces que se registraron los datos (5), en ambos casos resulta 7,6 min.

El **valor absoluto** de un número  $a$  ( $|a|$ ) representa la distancia de este número al cero en la recta numérica.

- 3 ¿Podrían estas representaciones ayudar a Clara a elegir un circuito por sobre otro?, ¿de qué manera? Comunica y compara tu respuesta con las de tus compañeros.

A continuación, haremos el cálculo de algunas medidas de dispersión para apoyar esta toma de decisiones.

## « Desviación media

La **desviación media** ( $DM$ ) es una **medida de dispersión** que indica la distancia promedio entre los datos y su media aritmética. Este parámetro también te da una idea de qué tan lejos están los datos entre sí. A mayor  $DM$ , más alejados están. Para un conjunto de  $n$  datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , cuya media aritmética es  $\bar{x}$ , se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

- 4 ¿Cómo explicarías con tus palabras la expresión simbólica  $|x_1 - \bar{x}|$ ?
- 5 ¿Por qué en la fórmula de la  $DM$  se utiliza el valor absoluto? ¿Cuál sería el valor de la  $DM$  si no se considerara el valor absoluto en su fórmula?

## EJEMPLO 1 >> Cálculo de la desviación media.

¿Cuál es la desviación media de los tiempos que registró Clara en los circuitos A y B?

### Paso a Paso

1. Calcula la media aritmética de los tiempos registrados en cada circuito (medida en minutos),  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B$ .

$$\bar{x}_A = \frac{7,7 + 7,2 + 7,7 + 7,6 + 7,8}{5} = \frac{38}{5} = 7,6$$

$$\bar{x}_B = \frac{7,8 + 7,7 + 7,3 + 7,3 + 7,9}{5} = \frac{38}{5} = 7,6$$

2. Determina los valores absolutos de las diferencias entre los tiempos y la media aritmética de cada circuito (medidos en minutos).

Circuito A	Circuito B
$ 7,7 - 7,6  =  0,1  = 0,1$	$ 7,8 - 7,6  =  0,2  = 0,2$
$ 7,2 - 7,6  =  -0,4  = 0,4$	$ 7,7 - 7,6  =  0,1  = 0,1$
$ 7,7 - 7,6  =  0,1  = 0,1$	$ 7,3 - 7,6  =  -0,3  = 0,3$
$ 7,6 - 7,6  =  0  = 0$	$ 7,3 - 7,6  =  -0,3  = 0,3$
$ 7,8 - 7,6  =  0,1  = 0,1$	$ 7,9 - 7,6  =  0,3  = 0,3$

3. Calcula el promedio de los valores absolutos anteriores (medido en minutos) para así obtener las desviaciones medias de los tiempos registrados en cada circuito,  $DM_A$  y  $DM_B$ .

$$DM_A = \frac{0,1 + 0,4 + 0,1 + 0 + 0,1}{5} = \frac{0,8}{5} = 0,16$$

$$DM_B = \frac{0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,3 + 0,3}{5} = \frac{1,2}{5} = 0,24$$

4. Responde.

La desviación media de los tiempos del **circuito A** es 0,16 min y la de los tiempos del **circuito B**, 0,24 min. Ya que  $0,24 > 0,16$  los datos del Circuito B son más dispersos que los del circuito A.



- 6 Considerando los valores obtenidos para la  $DM$  de los tiempos de los circuitos, ¿en cuál de ellos los datos están menos dispersos? Respondan grupalmente y compartan su respuesta con otros grupos.

- 7 ¿Cómo puedes comprobar los resultados aquí expuestos? En la página <https://www.geogebra.org/scientific?lang=es> dispones de una calculadora con la que puedes hacerlo.



## « Varianza y desviación estándar

La **varianza** ( $\sigma^2$ ) es una **medida de dispersión**. Para un conjunto de  $n$  datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , cuya media aritmética es  $\bar{x}$ , se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

La **desviación estándar** ( $\sigma$ ) es otra **medida de dispersión**. Se puede calcular obteniendo la raíz cuadrada de la varianza. , como es una medida positiva, se cumple que la raíz cuadrada de la varianza coincide con la desviación estándar, como se muestra:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$



- 8 Si los datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  representan tiempos medidos en minutos, ¿en qué unidades de medida quedan expresadas  $\sigma^2$  y  $\sigma$ ? ¿Cómo puedes generalizar este resultado?

### EJEMPLO 2 » Cálculo de la desviación estándar.

¿Cuál es la desviación estándar de los tiempos que registró Clara en los circuitos A y B?

#### Paso a Paso

1. Calcula la media aritmética de los tiempos registrados en cada circuito (medida en minutos),  $\bar{x}_A$  y  $\bar{x}_B$ .

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 7,6$$

2. Calcula las diferencias entre los tiempos y el promedio (medido en minutos) y luego calcula su cuadrado.

Circuito A	Circuito B
$(7,7 - 7,6)^2 = 0,1^2 = 0,01$	$(7,8 - 7,6)^2 = 0,2^2 = 0,04$
$(7,2 - 7,6)^2 = (-0,4)^2 = 0,16$	$(7,7 - 7,6)^2 = 0,1^2 = 0,01$
$(7,7 - 7,6)^2 = 0,1^2 = 0,01$	$(7,3 - 7,6)^2 = (-0,3)^2 = 0,09$
$(7,6 - 7,6)^2 = 0^2 = 0$	$(7,3 - 7,6)^2 = (-0,3)^2 = 0,09$
$(7,8 - 7,6)^2 = 0,2^2 = 0,04$	$(7,9 - 7,6)^2 = 0,3^2 = 0,09$

3. Calcula el promedio de los cuadrados obtenidos en cada circuito (medido en minutos cuadrados).

$$\text{Circuito A} > \frac{0,01 + 0,16 + 0,01 + 0 + 0,04}{5} = \frac{0,22}{5} = 0,044$$

$$\text{Circuito B} > \frac{0,04 + 0,01 + 0,09 + 0,09 + 0,09}{5} = \frac{0,32}{5} = 0,064$$

4. Extrae la raíz cuadrada de cada resultado anterior para así obtener las desviaciones estándar de los tiempos registrados en cada circuito,  $\sigma_A$  y  $\sigma_B$ . Redondea los resultados a la centésima.

$$\sigma_A = \sqrt{0,044} \approx 0,21 \quad \sigma_B = \sqrt{0,064} \approx 0,25$$

5. Responde.

La desviación estándar aproximada en el circuito A es 0,21 min y en el circuito B es 0,25 min.

- 9 Estos valores de desviación estándar, ¿confirman la decisión que sugieren los de la desviación media o no? ¿En cuál circuito debería entrenar Clara para mejorar su rendimiento?, ¿por qué?

- 10 Utiliza la calculadora disponible en <https://www.geogebra.org/scientific?lang=es> para comprobar el valor de la desviación estándar en los circuitos A y B.



## « Coeficiente de variación

El **coeficiente de variación** (CV) es una **medida de dispersión** que corresponde al cociente entre la desviación estándar ( $\sigma$ ) y el valor absoluto de la media aritmética ( $|\bar{x}|$ ) de un conjunto de datos. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$CV = \frac{\sigma}{|\bar{x}|} \quad |\bar{x}| \neq 0$$

Este parámetro puede expresarse como un porcentaje multiplicándolo por 100 y, dado que es un valor sin unidades (adimensional), permite comparar la dispersión de conjuntos de datos pertenecientes a poblaciones distintas.



## Haka pei

### El deporte extremo de Rapa Nui

Este antiguo rito de iniciación de la cultura Rapa Nui es una de las pruebas que concita mayor expectación durante la realización de la Tāpati, fiesta de eventos deportivos y recreativos que se celebra cada año durante la primera quincena de febrero en la Isla de Pascua.

**Haka pei:** Es un deporte extremo, donde los jóvenes, mujeres y hombres, desafían su valor deslizándose sobre dos troncos de plátanos, unidos por varas de madera y un corte en la parte delantera que facilita su deslizamiento, a gran velocidad. La pendiente del cerro **Pu'i** tiene una inclinación de 45°. Los competidores visten a la usanza antigua con vistosas pinturas corporales. La mayor distancia recorrida, será la medida que otorgará el triunfo.

Fuente: <https://www.rapanui.net/secciones/3144> Municipalidad de Rapa Nui

### Apliquemos lo estudiado

Observa las tablas 1 y 2 con las distancias alcanzadas por un competidor durante dos sesiones de entrenamiento, en que numeró sus descensos del 1 al 5.

- ▼ Ma'uŋa Pu'i, (Cerro = ma'uŋa) ubicado en Isla de Pascua y que mide unos 200 m de altura.

Tabla 1

Distancias recorridas el día 1	
Número de descenso	Distancia (m)
1	258
2	254
3	275
4	253
5	250

Tabla 2

Distancias recorridas el día 2	
Número de descenso	Distancia (m)
1	264
2	256
3	260
4	275
5	255

Observa un video con más información acerca del Tapati Rapa Nui en <https://bit.ly/3Fslb8p>

¿Qué aspecto de la cultura rapa nui te gustaría conocer?

Averigua otros deportes ancestrales que se desarrollan en **Tāpati Rapa Nui**.



### EJEMPLO 3 >> Comparación del coeficiente de variación de dos grupos de datos.

¿En cuál de los dos días las distancias registradas por el competidor de Haka Pei están más dispersas de acuerdo con el coeficiente de variación?

#### Paso a Paso

1. Calcula la media aritmética de las distancias registradas cada día (medida en metros).

Día 1

$$\bar{x}_1 = \frac{258 + 254 + 275 + 253 + 250}{5} = \frac{1290}{5} = 258$$

Día 2

$$\bar{x}_2 = \frac{264 + 256 + 260 + 275 + 255}{5} = \frac{1310}{5} = 262$$

2. Calcula las diferencias entre las distancias y la media aritmética (medidas en metros).

Día 1

$$\begin{aligned} 258 - 258 &= 0 & 253 - 258 &= -5 \\ 254 - 258 &= -4 & 250 - 258 &= -8 \\ 275 - 258 &= 17 \end{aligned}$$

Día 2

$$\begin{aligned} 264 - 262 &= 2 & 275 - 262 &= 13 \\ 256 - 262 &= -6 & 255 - 262 &= -7 \\ 260 - 262 &= -2 \end{aligned}$$

3. Calcula el cuadrado de cada diferencia (medido en metros cuadrados).

Día 1

$$\begin{aligned} 0^2 &= 0 & (-5)^2 &= 25 \\ (-4)^2 &= 16 & (-8)^2 &= 64 \\ 17^2 &= 289 \end{aligned}$$

Día 2

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4 & 13^2 &= 169 \\ (-6)^2 &= 36 & (-7)^2 &= 49 \\ (-2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

4. Calcula el promedio de los cuadrados (medido en metros cuadrados).

Día 1

$$\frac{0 + 16 + 289 + 25 + 64}{5} = \frac{394}{5} = 78,8$$

Día 2

$$\frac{4 + 36 + 4 + 169 + 49}{5} = \frac{262}{5} = 52,4$$

5. Extrae la raíz cuadrada de los resultados anteriores para calcular las desviaciones estándar  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  de los dos grupos de datos (medidas en metros).

Día 1  $\sigma_1 = \sqrt{78,8} = 8,8769\dots$

Día 2  $\sigma_2 = \sqrt{52,4} = 7,2387\dots$

6. Calcula el cociente entre la desviación estándar y la media aritmética de las distancias registradas cada día para así determinar los coeficientes de variación  $CV_1$  y  $CV_2$  (adimensionales). Redondea los resultados a la milésima.

Día 1

$$CV_1 = \frac{\sqrt{78,8}}{258} \approx 0,034$$

Día 2

$$CV_2 = \frac{\sqrt{52,4}}{262} \approx 0,028$$

7. Responde. Luego de analizar los datos de la tabla y calcular las correspondientes medidas de dispersión, se cumple que  $CV_1 > CV_2$ , es decir, las distancias alcanzadas el día 1 tienen un coeficiente de variación mayor que las alcanzadas el día 2 y, por lo tanto, están más dispersas.

11 Que  $CV_1 > CV_2$ , ¿implica que el día 1 se obtuvieron mejores resultados que el día 2?

## Decidiendo con medidas de dispersión para datos agrupados

Julio practica básquetbol todos los días. En particular, enfoca su entrenamiento en afinar su puntería y en aumentar la altura de sus saltos.

El entrenador del club de básquetbol al que pertenece Julio tiene un registro en su *tablet* de la altura del salto máximo de los jugadores del equipo, información que se presenta en la tabla de frecuencias adjunta. Obsérvala y responde.

- ¿Crees que es saludable practicar básquetbol?, ¿por qué?
- ¿Puedes determinar con exactitud la diferencia de altura entre el mayor y el menor salto registrados en la tabla?, ¿por qué?
- La tabla no incluye el salto de Julio que se representa en la imagen. Si se incluyera, ¿a qué intervalo pertenecería?



72 cm

Saltos del equipo de básquetbol de Julio		
Altura del salto (cm)	Marca de clase $c_i$ (cm)	Frecuencia ( $f_i$ )
[60, 65[	3 62,5	8
1 [65, 70[	67,5	4 15
[70, 75[	72,5	12
2 [75, 80]	77,5	4
<b>Total</b>	–	<b>39</b>

1 [65, 70[ corresponde al intervalo de todos los números mayores o iguales que 65 y menores que 70, es decir están los saltos que miden 65 cm pero no los que miden 70 cm.

2 [75, 80]: intervalo de todos los números mayores o iguales que 75 y menores o iguales que 80, es decir, están los saltos que miden 75 cm y 80 cm.

La marca de clase ( $M_c$ ) de un intervalo  $[a, b]$  se calcula:

3 
$$M_c = \frac{(a + b)}{2}$$
 En [60, 65[ corresponde a:  $\frac{60 + 65}{2} = \frac{125}{2} = 62,5$

4 Hubo 15 saltos cuyas alturas fueron mayor o iguales a 65 cm y menores a 70 cm, esto corresponde al intervalo [65, 70[.

## « Media aritmética de datos agrupados

Para estimar la media aritmética o promedio ( $\bar{x}$ ) en una tabla de frecuencias con datos agrupados, puedes utilizar la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_i \cdot f_i + \dots + c_N \cdot f_N}{n}$$

Donde:

- $c_i$ : marca de clase del  $i$ -ésimo intervalo.
- $f_i$ : frecuencia absoluta del  $i$ -ésimo intervalo.
- $n$ : cantidad total de datos.
- $N$ : cantidad total de intervalos.

- 1 ¿Por qué crees que la fórmula anterior solo permite estimar el valor de la media aritmética y no da cuenta de su valor exacto?
- 2 ¿Cómo explicarías con tus palabras el cálculo de la marca de clase de un intervalo?
- 3 ¿Qué representan  $n$  y  $N$ ?, ¿podrían ser iguales en una tabla de datos agrupados?, ¿por qué?

### EJEMPLO 4 » Estimación de la media aritmética para datos agrupados.

¿Cuál es la media aritmética estimada de la altura de los saltos del equipo de Julio?, ¿cómo la interpretas en relación con la altura del salto de Julio?

#### Paso a Paso

1. De la tabla del entrenador es posible obtener  $c_i$  y  $f_i$ .

Saltos del equipo de básquetbol de Julio			
Altura del salto (cm)	Marca de clase $c_i$ (cm)	Frecuencia ( $f_i$ )	
[60, 65[	62,5	8	→ $c_1 = 62,5$ y $f_1 = 8$
[65, 70[	67,5	15	→ $c_2 = 67,5$ y $f_2 = 15$
[70, 75[	72,5	12	→ $c_3 = 72,5$ y $f_3 = 12$
[75, 80]	77,5	4	→ $c_4 = 77,5$ y $f_4 = 4$
<b>Total</b>	—	39	→ $n = 39$ (Corresponde al total de datos)

2. Aplica la fórmula para estimar la media aritmética. Aproxima el resultado por redondeo a la milésima.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{62,5 \cdot 8 + 67,5 \cdot 15 + 72,5 \cdot 12 + 77,5 \cdot 4}{39} \longrightarrow \text{Reemplaza los datos.} \\ &= \frac{500 + 1012,5 + 870 + 310}{39} \longrightarrow \text{Calcula los productos.} \\ &\approx 69,038 \longrightarrow \text{Suma, divide y redondea.}\end{aligned}$$

3. La media aritmética estimada es 69,038 cm, aproximadamente, ( $72 > 69,038$ ) y dos interpretaciones equivalentes pueden ser las siguientes:

- 1.º El salto de Julio es mayor que la media aritmética de la altura de los saltos de los jugadores de su equipo.
- 2.º En promedio, el equipo alcanza alturas menores que la del salto de Julio.

- 4 ¿Influye la estatura de los jugadores del otro equipo? ¿hay alguna relación en que los saltos de mayor altura se realizan al comienzo del partido?

## « Rango, desviación media, varianza y desviación estándar

El **rango** ( $R$ ) es una **medida de dispersión** que, en datos agrupados, se estima como la diferencia entre el extremo superior del intervalo mayor y el extremo inferior del intervalo menor.

Las fórmulas para estimar las otras medidas de dispersión de un conjunto de datos agrupados son:

$$DM = \frac{|c_1 - \bar{x}| \cdot f_1 + \dots + |c_N - \bar{x}| \cdot f_N}{n} \qquad \text{Varianza } (\sigma^2) = \frac{(c_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + \dots + (c_N - \bar{x})^2 \cdot f_N}{n}$$

La desviación estándar ( $\sigma$ ) se obtiene calculando la raíz cuadrada a la varianza.

En que:

- $\bar{x}$ : promedio de los datos.
- $c_i$ : marca de clase del  $i$ -ésimo intervalo.
- $n$ : cantidad total de datos.
- $f_i$ : frecuencia absoluta del  $i$ -ésimo intervalo.
- $N$ : cantidad total de intervalos.



### EJEMPLO 5 » Estimación de la desviación media, de la varianza y de la desviación estándar.

¿Cuáles son los valores estimados de la desviación media, la varianza y la desviación estándar de la altura de los saltos del equipo de Julio? Responde redondeando a la milésima tus resultados.

#### Paso a Paso

1. Estima la media aritmética ( $\bar{x}$ ) de los saltos.

Saltos del equipo de básquetbol de Julio		
Altura del salto (cm)	Marca de clase $c_i$ (cm)	Frecuencia ( $f_i$ )
[60, 65[	62,5	8
[65, 70[	67,5	15
[70, 75[	72,5	12
[75, 80]	77,5	4
<b>Total</b>	—	39



En la tabla se tiene que el intervalo mayor es [75, 80] y el extremo superior es 80, el intervalo menor es [60, 65[ y el extremo inferior es 60. El rango es  $80 - 60 = 20$ .

La media aritmética ya se calculó antes:

$$\bar{x} \approx 69,038$$

2. Estima la desviación media en centímetros.

$$DM \approx \frac{|62,5 - 69,038| \cdot 8 + |67,5 - 69,038| \cdot 15 + |72,5 - 69,038| \cdot 12 + |77,5 - 69,038| \cdot 4}{39} = 3,8657948717$$

3. Estima la varianza en centímetros cuadrados y la desviación estándar en centímetros.

$$\sigma^2 \approx \frac{(62,5 - 69,038)^2 \cdot 8 + (67,5 - 69,038)^2 \cdot 15 + (72,5 - 69,038)^2 \cdot 12 + (77,5 - 69,038)^2 \cdot 4}{39} = 20,710059384615$$

$$\sigma \approx \sqrt{20,710059384615} = 4,55083062... \approx 4,551$$

4. Responde.

Los valores aproximados de las medidas de dispersión son:  $DM \approx 3,866$  cm,  $\sigma^2 \approx 20,710$  cm<sup>2</sup> y  $\sigma \approx 4,551$  cm.

La desviación media ( $DM$ ) se puede interpretar que se encuentra a una distancia de 3,86 del promedio. En el caso del salto de Julio (72 cm) se puede concluir que se encuentra cercano a la desviación que se señala, ya que el promedio más la  $DM$  es igual a 72,904 cm.

## « Coeficiente de variación

El **coeficiente de variación** (CV) para datos agrupados permite comparar la dispersión de conjuntos con distinta cantidad de elementos, mientras menor sea los datos son más parecidos entre sí, en caso contrario los datos se diferencian más entre ellos, su expresión corresponde a:

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{|\bar{x}|} \quad |\bar{x}| \neq 0$$

En que  $\sigma$  es la desviación estándar del conjunto de datos y  $\bar{x}$  es su media aritmética o promedio. »

### EJEMPLO 6 » Toma de decisiones utilizando medidas de dispersión.

Para dos cursos de 30 y 40 integrantes se miden los tiempos promedio, en minutos por día, que dedican a realizar talleres deportivos. Las siguientes tablas resumen esta información:

Talleres deportivos del 3° A		
Tiempo (min)	Marca de clase $c_i$ (min)	Frecuencia ( $f_i$ )
[0, 15[	7,5	3
[15, 30[	22,5	9
[30, 45[	37,5	15
[45, 60[	52,5	3
<b>Total</b>	–	30

Talleres deportivos del 3° B		
Tiempo (min)	Marca de clase $c_i$ (min)	Frecuencia ( $f_i$ )
[0, 15[	7,5	6
[15, 30[	22,5	10
[30, 45[	37,5	18
[45, 60[	52,5	6
<b>Total</b>	–	40

El coordinador de deportes decidió premiar al curso que dedica un mayor tiempo promedio a participar en los talleres. Tras hacer los cálculos, comprobó que ambos tienen el mismo promedio de 31,5 min. Por esta razón, decidió premiar al curso cuyos tiempos estén menos dispersos. ¿A qué curso premiará? ¿Por qué el profesor toma la decisión de premiar a un curso en función de la dispersión de los datos y no considerando el rango?

#### Paso a Paso

1. Estima la varianza y la desviación estándar para cada curso e interpreta sus valores.

$$3^\circ \text{ A} \quad \sigma_A^2 = 144 \text{ min}^2 \quad \sigma_A = \sqrt{144} \text{ min} = 12 \text{ min}$$

$$3^\circ \text{ B} \quad \sigma_B^2 = 189 \text{ min}^2 \quad \sigma_B = \sqrt{189} \text{ min} \approx 13,748 \text{ (aproximación por redondeo a la milésima).}$$

2. Ambos parámetros indican que la dispersión de los tiempos es menor para el **3° A**, pero como la cantidad de integrantes es diferente en los cursos, se calculará el coeficiente de variación para confirmar este hecho. Estima el coeficiente de variación y redondéalo a la milésima.

$$3^\circ \text{ A} \quad \text{CV}_A = \frac{12}{31,5} = 0,380952 \approx 0,381$$

$$3^\circ \text{ B} \quad \text{CV}_B = \frac{\sqrt{189}}{31,5} = 0,43643... \approx 0,436$$

3. Responde.

Comparando los coeficientes de variación de los tiempos de ambos cursos, se observa que  $\text{CV}_A < \text{CV}_B$ . Por lo tanto, el coordinador premiará al **3° A**.

- 5  ¿Cómo pueden comprobar que los valores calculados en este ejemplo son correctos?

Accedan a una calculadora en línea en <https://bit.ly/3yH3Ch7> o utilicen una calculadora científica manual para validar los valores de la media aritmética, la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación de los tiempos de cada curso.



## » URGENCIA CLIMÁTICA

### Plogging.

El deporte que protege el medioambiente

GettyImages/Maskot

El *plogging* resulta de fusionar la palabra inglesa *jogging*, que se traduce como correr, con la expresión sueca *plocka upp*, que significa recoger. Es un deporte que consiste en correr o caminar mientras se recoge la basura que hay en el camino.

Los *ploggers*, personas que practican este deporte, aseguran que puede ser más efectivo como actividad física que solamente correr.

### Apliquemos lo estudiado

Para comprobar la afirmación anterior, un grupo de 20 estudiantes decidió comparar las calorías (cal) quemadas al practicar *running* y *plogging* durante 30 min., en condiciones similares. Los resultados que obtuvieron se muestran en las siguientes tablas:

Para saber más sobre el *plogging* conéctate a <https://bit.ly/3lbhFIV>  
¿Qué necesitas para practicar *plogging*?



Tablas comparativas de la energía consumida al practicar *running* y *plogging*.

#### Energía usada al practicar *running* (cal)

Energía (cal)	Marca de clase $c_i$ (cal)	Frecuencia ( $f_i$ )
[0, 150[	75	7
[150, 300[	225	10
[300, 450[	375	2
[450, 600]	525	1
<b>Total</b>	–	20

#### Energía usada al practicar *plogging* (cal)

Energía (cal)	Marca de clase $c_i$ (cal)	Frecuencia ( $f_i$ )
[0, 150[	75	3
[150, 300[	225	12
[300, 450[	375	4
[450, 600]	525	1
<b>Total</b>	–	20

BDA U1\_VID\_8  
U1\_AUD\_4

### EJEMPLO 7 » Comparación de parámetros estadísticos de dos grupos de datos agrupados.

¿Qué decisión podría tomar un deportista a partir del promedio y de la desviación estándar de los datos de las tablas si quiere practicar el deporte que le exija un gasto mayor y más homogéneo de energía?

#### Paso a Paso

1. Estima el promedio de la energía consumida al practicar cada deporte (medido en calorías).

#### Running

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{75 \cdot 7 + 225 \cdot 10 + 375 \cdot 2 + 525 \cdot 1}{20} \\ &= \frac{4050}{20} = 202,5\end{aligned}$$

#### Plogging

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= \frac{75 \cdot 3 + 225 \cdot 12 + 375 \cdot 4 + 525 \cdot 1}{20} \\ &= \frac{4950}{20} = 247,5\end{aligned}$$

BDA U1\_ACT\_7 a 9

2. Calcula el cuadrado de la diferencia entre cada marca de clase y su promedio (medido en calorías al cuadrado).

**Running**

$$(75 - 202,5)^2 = 16\,256,25$$

$$(225 - 202,5)^2 = 506,25$$

$$(375 - 202,5)^2 = 29\,756,25$$

$$(525 - 202,5)^2 = 104\,006,25$$

**Plogging**

$$(75 - 247,5)^2 = 29\,756,25$$

$$(225 - 247,5)^2 = 506,25$$

$$(375 - 247,5)^2 = 16\,256,25$$

$$(525 - 247,5)^2 = 77\,006,25$$

3. Multiplica cada valor del paso anterior por su frecuencia respectiva.

**Running**

$$16\,256,25 \cdot 7 = 113\,793,75$$

$$506,25 \cdot 10 = 5\,062,5$$

$$29\,756,25 \cdot 2 = 59\,512,5$$

$$104\,006,25 \cdot 1 = 104\,006,25$$

**Plogging**

$$29\,756,25 \cdot 3 = 89\,268,75$$

$$506,25 \cdot 12 = 6\,075$$

$$16\,256,25 \cdot 4 = 65\,025$$

$$77\,006,25 \cdot 1 = 77\,006,25$$

4. Suma los productos del paso anterior y divide por 20 para cada deporte.

**Running**

$$\frac{113\,793,75 + 5\,062,5 + 59\,512,5 + 104\,006,25}{20} =$$

$$= \frac{282\,375}{20} = 14\,118,75$$

**Plogging**

$$\frac{89\,268,75 + 6\,075 + 65\,025 + 77\,006,25}{20} =$$

$$= \frac{237\,375}{20} = 11\,868,75$$

5. Extrae la raíz cuadrada de los resultados anteriores para estimar las desviaciones estándar  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  de los dos grupos de datos (medidas en calorías). Redondea los resultados a la décima.

**Running**  $\sigma_1 = \sqrt{14\,118,75} \approx 118,8$

**Plogging**  $\sigma_2 = \sqrt{11\,868,75} \approx 108,9$

6. Responde.

- Dado que  $\bar{x}_2 > \bar{x}_1$ , en promedio, practicando *plogging* se consumió más energía que practicando *running*.
- Dado que  $\sigma_2 < \sigma_1$ , el consumo de energía practicando *plogging* fue más homogéneo que practicando *running*.
- Por lo tanto, como conclusión, se puede afirmar que, basándose en la información recopilada por un grupo de estudiantes en las tablas comparadas, un deportista puede decidirse por la práctica del *plogging*, ya que no solo protege el medioambiente, sino que también cuida su cuerpo a partir de un eficiente consumo de energía.

**Para terminar la Lección 1...**

- ¿De qué manera el análisis de datos y las medidas de dispersión pueden ayudarte a tomar mejores decisiones?
- ¿Qué diferencias notaste en cuanto a dificultad y exactitud al calcular las medidas de dispersión para datos no agrupados y para datos agrupados?
- ¿En qué ámbito te gustaría tener una participación relevante: cultural, social, político, medioambiental, etc.?, ¿de qué forma podrías aportar?

# Toma de decisiones con probabilidades condicionales

## Decidiendo mediante diagramas de árbol de probabilidades

### Seguridad al realizar deportes – Educación Física y Salud

La profesora de Educación Física y Salud de un colegio quiere aplicar un plan de entrenamiento para mejorar la calidad de vida de sus estudiantes. Para hacerlo responsablemente pidió a Hugo, que trabaja en un centro médico, que aplique un test a un grupo seleccionado al azar para determinar si están aptos físicamente para participar del plan o si presentan algún tipo de riesgo. Como el test es experimental, Hugo podrá implementarlo solo si le permite establecer un diagnóstico correcto en el 95% de los casos. Para evaluarlo, seleccionó a 150 estudiantes con riesgo y sin él, condición que se ha establecido previamente usando otros métodos más costosos, y les aplicó el test. Los resultados que obtuvo se muestran en la siguiente tabla:

Tabla de resultados

Estudiante	Resultado Test		Total
	TP	TN	
CR	64	4	68
SR	4	78	82
<b>Total</b>	68	82	150

CR: estudiante con riesgo. TP: test dio positivo.

SR: estudiante sin riesgo. TN: test dio negativo.

- Si el resultado del test es positivo, significa que detectó un riesgo para la salud del estudiante. De acuerdo con esto, ¿qué significa que su resultado sea negativo?
- ¿Cómo definirías con tus palabras que el test establezca un diagnóstico correcto? Utiliza los eventos *CR*, *SR*, *TP* y *TN* para responder.
- A partir de la información de la tabla, ¿crees que los resultados obtenidos en la evaluación del test permitirán a Hugo implementarlo? Justifica tu respuesta.



Gettyimages/SDI Productions (editado)

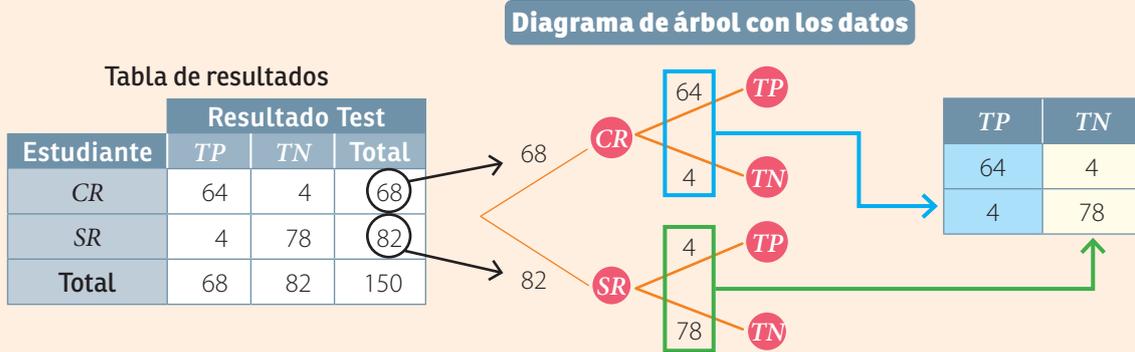
Recuerda que, dos eventos son independientes si  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  o, en forma equivalente, dos eventos son independientes si la realización de uno no afecta la probabilidad del otro.

1 ¿Cómo interpretas que la probabilidad de ocurrencia de un evento sea mayor que la de otro?

Los datos recolectados por Hugo pueden representarse usando diagramas de árbol.

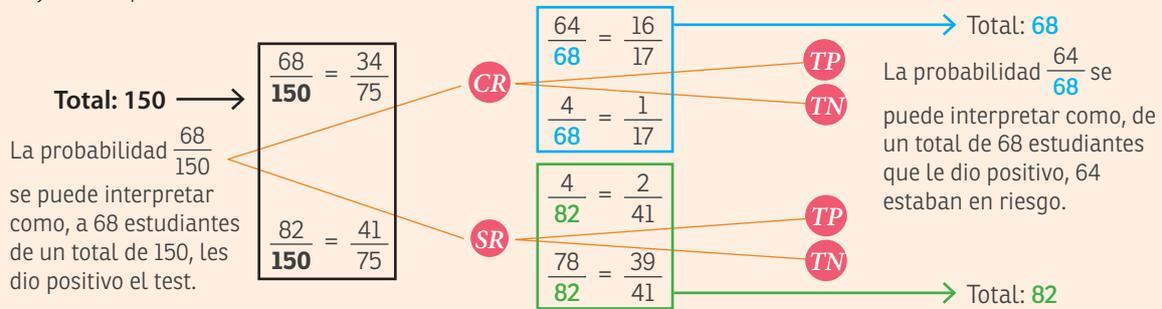
### Diagrama de árbol con los datos

De la tabla con los datos recolectados, se construye un diagrama de árbol.



### Diagrama de árbol de probabilidades

Para construir este diagrama, en cada rama se divide por la cantidad total de datos respectiva y se simplifica la fracción obtenida.



2 Observa el diagrama de árbol de probabilidades. ¿Qué representa y cómo se obtiene el valor de probabilidad  $\frac{1}{17}$ ? Explica.

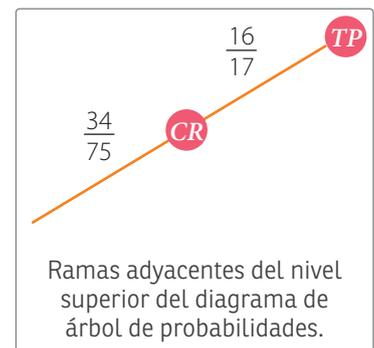
3 ¿Cuál de los diagramas de árbol crees que es más útil para decidir si el test cumple con el requerimiento definido para su implementación?, ¿por qué?

### EJEMPLO 1 Interpretación de un diagrama de árbol y cálculo de probabilidades.

¿Qué representa, en el contexto del problema, el producto de las probabilidades presentes en las dos ramas adyacentes del nivel superior del árbol?

#### Paso a Paso

- La fracción  $\frac{34}{75}$  representa la probabilidad de que un estudiante del grupo presente riesgo. La anotaremos simbólicamente como  $P(CR)$ .  
La fracción  $\frac{16}{17}$  representa la probabilidad de que el test dé positivo (TP) dado que el estudiante efectivamente presenta riesgo (CR).  
La anotaremos simbólicamente como  $P(TP | CR)$ .



2. Calcula el producto de las probabilidades anteriores.

$$P(CR) \cdot P(TP | CR) = \frac{68}{150} \cdot \frac{64}{68} = \frac{34}{75} \cdot \frac{16}{17} = \frac{2}{75} \cdot \frac{16}{1} = \frac{32}{75}$$

3. Responde.

Dado que las probabilidades que se multiplicaron pertenecen a ramas adyacentes del árbol de probabilidades, su producto representa la probabilidad de que ocurran simultáneamente los sucesos asociados a ellas, es decir, que un alumno presente riesgo y dé positivo en el test. La anotaremos simbólicamente como  $P(CR \cap TP)$ , en que el símbolo  $\cap$  representa la intersección de eventos y, en este caso, permite expresar la presencia de riesgo y que el test dé positivo.

Para evaluar el test, Hugo sumará las probabilidades de que acierte en su diagnóstico, es decir, la probabilidad de que un estudiante presente riesgo y dé positivo en el test con la probabilidad de que un estudiante no presente riesgo y dé negativo en el test.

### EJEMPLO 2 » Uso de diagrama de árbol de probabilidades para tomar decisiones.

Considerando que no se aceptará aproximar los resultados, ¿podrá Hugo implementar el test en el centro médico?

#### Paso a Paso

1. Revisa el **EJEMPLO 1** y anota las probabilidades de que el test acierte en su diagnóstico.

$$P(CR \cap TP) = \frac{32}{75}$$

$$P(SR \cap TN) = \frac{39}{75}$$

2. Suma las probabilidades del paso anterior para calcular la probabilidad de que el test haya acertado.

$$\text{Probabilidad de acierto} = P(CR \cap TP) + P(SR \cap TN) = \frac{32}{75} + \frac{39}{75} = \frac{71}{75}$$

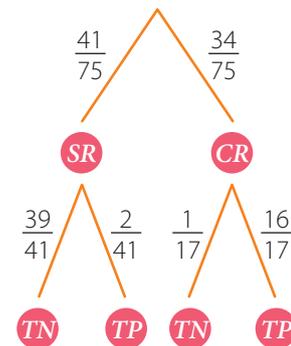
3. Expresa como porcentaje esta probabilidad, para ello multiplica por 100% el número decimal, es decir:

$$\frac{71}{75} = 0,94\bar{6} \cdot 100\% = 94,6\bar{6}\%$$

4. Responde.

Como el test tuvo un porcentaje de aciertos en el diagnóstico menor que 95%, Hugo no podrá implementarlo en el centro médico.

Diagrama de árbol de probabilidades



4 ¿Están de acuerdo con no implementar el test en el centro médico? Considerando que el porcentaje de acierto es muy cercano a 95%, ¿rechazarían ustedes el test? Respondan primero individualmente y luego elaboren una respuesta grupal justificada.

## » Actividad física en la población inmigrante en nuestro país

### Historia, Geografía y Ciencias Sociales

Chile tiene el deber de “garantizar a las personas migrantes el acceso a los servicios educativos y sociales”; y de asegurarles “el derecho fundamental de acceder a la educación física, la actividad física y el deporte sin discriminación alguna, ya esté basada en (...) el origen nacional o social, la posición económica o cualquier otro factor”. Por ende, resulta deseable que la sociedad chilena, y en particular el sector público, afronten la tarea de promover el acceso a la actividad física y el deporte de toda la población en territorio nacional, sin distinción alguna.

#### Apliquemos lo estudiado

La tabla adjunta muestra los resultados de una encuesta aplicada a un grupo de inmigrantes en Chile sobre su práctica de actividad física.

#### Encuesta sobre la práctica regular de actividad física en población inmigrante

	Hombres	Mujeres	Total
Practica	429	205	634
No practica	356	477	833
<b>Total</b>	<b>785</b>	<b>682</b>	<b>1 467</b>

Fuente: Vergara, C., Alviña, P., Doña Reveco, C., & García, I. (2018). Actividad física y deporte en la población migrante en Chile. Cuadernos médicos-sociales, 58(4).

### EJEMPLO 3 » Verificación de una afirmación usando un diagrama de árbol.

Un analista opina que es más probable hallar en Chile un hombre inmigrante que realice actividad física en forma regular que una mujer inmigrante que no la practique. De acuerdo con la encuesta anterior, ¿es verdadera su afirmación?

#### Paso a Paso

- Identifica los eventos de interés.

S: sí practica actividad física de forma regular.

H: es hombre.

N: no practica actividad física de forma regular.

M: es mujer.

- Construye los diagramas de árbol, primero con las cantidades de individuos y luego con las probabilidades.



- Calcula las probabilidades  $P(H \cap S)$  y  $P(M \cap N)$ . Exprésalas como números decimales aproximados a la centésima.

$$P(H \cap S) = \frac{785}{1467} \cdot \frac{429}{785} = \frac{429}{1467} \approx 0,29$$

$$P(M \cap N) = \frac{682}{1467} \cdot \frac{477}{682} = \frac{477}{1467} \approx 0,33$$

- Responde.

Dado que a partir de los datos de la encuesta se verifica que  $P(H \cap S) < P(M \cap N)$ , la afirmación del analista no es verdadera.

## Decidiendo mediante probabilidades condicionales

En un torneo de *skates* y bicicletas se inscriben diferentes participantes. El total de ellos se muestra en la tabla.

Género \ Deporte	Skate (S)	Bicicleta (B)	Total
Hombres (H)	5	9	14
Mujeres (M)	2	14	16
<b>Total</b>	7	23	30

- ¿Qué actividad se practica en la imagen?
- ¿En qué tipo de campeonato te interesaría participar a ti?, ¿por qué?
- ¿Cuántos participantes se inscribieron en el torneo?, ¿cuántas mujeres hay?

Considera los siguientes eventos:

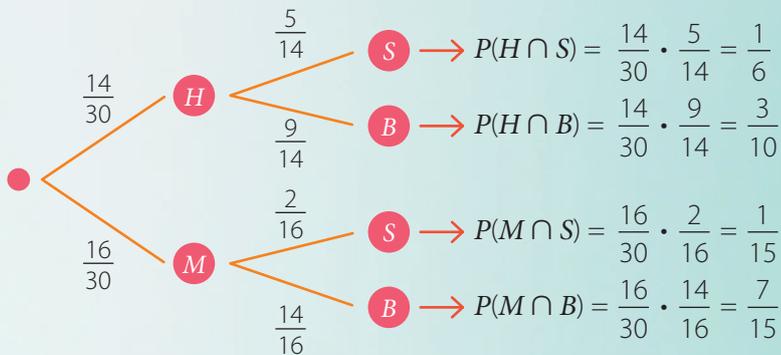
$H$ : seleccionar un hombre.

$M$ : seleccionar una mujer.

$S$ : andar en *skate*.

$B$ : andar en bicicleta.

El diagrama de árbol de probabilidades que representa la información de la tabla es el siguiente:



En el diagrama de árbol de probabilidades se tiene:

$P(H \cap S)$ : Es la probabilidad de seleccionar a un hombre y que prefiera el skate.

$P(H \cap B)$ : Es la probabilidad de seleccionar a un hombre y que prefiera la bicicleta.

$P(M \cap S)$ : Es la probabilidad de seleccionar a una mujer y que prefiera el skate.

$P(M \cap B)$ : Es la probabilidad de seleccionar a una mujer y que prefiera la bicicleta.

• ¿Con qué relacionas la expresión  $\frac{P(H \cap B)}{P(H)}$ ?

• ¿Es distinto calcular  $\frac{P(M \cap S)}{P(S)}$  y  $\frac{P(S \cap M)}{P(M)}$ ?



Gettyimages/A. Martin UW Photography

## « Probabilidad condicional

Sean  $A$  y  $B$  dos eventos que se encuentran en un mismo espacio muestral, con  $P(B) > 0$  y  $A^c$ , el complemento del evento  $A$ . La probabilidad del evento  $A$  dado que ocurrió el evento  $B$  corresponde a la **probabilidad condicional** que se denota por  $(P(A | B))$ , al relacionar lo anterior con un diagrama de árbol de probabilidades, se tiene:

**Expresión:**

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Diagrama de árbol de probabilidades:**

Corresponde a una rama, la de  $P(B)$ .

$$\begin{array}{l} \frac{P(B)}{B} \begin{cases} \xrightarrow{P(A/B)} A \rightarrow P(B) \cdot P(A/B) = P(A \cap B) \\ \xrightarrow{P(A^c/B)} A^c \rightarrow P(B) \cdot P(A^c/B) = P(A^c \cap B) \end{cases} \end{array}$$

En que  $P(A \cap B)$  es la probabilidad de que ocurran simultáneamente los eventos  $A$  y  $B$ , y  $P(B)$  es la probabilidad de que ocurra el evento  $B$ .



1 ¿Podría cumplirse que  $P(A \cap B) > P(B)$ ?, ¿por qué?

## Fiesta de La Tirana

### Su origen en la cultura aymara

Entre las tradiciones del pueblo aymara destacan las festividades que combinan la fe católica con la cosmovisión indígena relacionada con la madre Tierra o «Pachamama». Una de las más importantes es la Fiesta de la Virgen del Carmen que se realiza en el pueblo de La Tirana, comuna de Pozo Almonte en la Región de Tarapacá. Este poblado, de no más de 560 habitantes, llega a recibir más de 250 000 visitantes durante la primera mitad del mes de julio de cada año.

♥ Fiesta de La Tirana, Región de Tarapacá.

### Apliquemos lo estudiado

Debido a las grandes aglomeraciones que se producen, el Ministerio de Salud aplicará un test de forma aleatoria para detectar y evitar brotes de enfermedades respiratorias.

De un bus con visitantes a La Tirana se escogerá al azar a uno de los pasajeros para realizarle el test. La tabla adjunta muestra la nacionalidad y el género de los ocupantes del bus.

### Nacionalidad y género de las personas testeadas

País de origen	Hombres	Mujeres
Chile	12	14
Perú	8	6
Bolivia	6	9
Otro	2	3



Observa un video con imágenes de la Fiesta de la Virgen del Carmen en <https://bit.ly/3yJwFAC>  
¿Crees que es importante conocer y valorar la cultura aymara?, ¿por qué?

Puedes averiguar otra actividad cultural del pueblo aymara, que corresponde a Pachallampi en el siguiente link: <https://bitacoraresidencias.cultura.gob.cl/pachallampe-2/>



UI\_ACT\_12

UI\_VID\_12

#### EJEMPLO 4 >> Cálculo de una probabilidad condicional.

Si en el bus de visitantes a La Tirana la persona escogida para realizarle el test resultó ser mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea de nacionalidad boliviana?

#### Paso a Paso

1. Agrega a la tabla original la suma total de los valores de las filas y columnas.

**Nacionalidad y género de las personas testeadas**

Nacionalidad \ Género	Hombres	Mujeres	Total
Chile	12	14	26
Perú	8	6	14
Bolivia	6	9	15
Otro	2	3	5
<b>Total</b>	28	32	60

2. Identifica los eventos de interés.

$B$ : su nacionalidad es boliviana.

$M$ : es mujer.

3. Expresa la probabilidad buscada.

Probabilidad de que la persona testead sea boliviana dado que es mujer.  $\rightarrow P(B / M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)}$   $\rightarrow$  Probabilidad de que sea boliviana y mujer.  
 $\rightarrow$  Probabilidad de que sea mujer.

4. Deduce las probabilidades  $P(B \cap M)$  y  $P(M)$  a partir de los datos de la tabla.

$$P(B \cap M) = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \qquad P(M) = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$$

5. Calcula la probabilidad  $P(B / M)$ . Redondea su valor a la centésima.

$$P(B / M) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{20} \cdot \frac{15}{8} = \frac{45}{160} = \frac{9}{32} = 0,28125 \approx 0,28$$

6. Responde.

La probabilidad de que la persona escogida para realizarle el test sea de nacionalidad boliviana dado que es mujer es 0,28, aproximadamente; o en forma equivalente, que corresponde aproximadamente al 28%.

2 ¿Qué condición debe verificarse para que se cumpla la igualdad  $P(B / M) = P(M / B)$ ? Explica.

3  ¿Es frecuente encontrar probabilidades condicionales en la vida cotidiana?

Comenten una situación en que pueda ser interesante y útil usar probabilidades condicionales.

Presenten al curso la situación y creen un problema para que sus compañeros y compañeras lo resuelvan trabajando en forma colaborativa. Como desafío respondan, ¿Qué pregunta se responde

con el cálculo de  $\frac{8}{60} : \frac{28}{60} = \frac{8}{28}$ ?

## EJEMPLO 5 >> Toma de decisiones utilizando probabilidad condicional.

Población de 15 años o más que declaró trabajar la semana anterior a la realización del Censo 2017, según área geográfica:

Trabajó o no trabajó la semana pasada	Urbano	Rural	Total
Trabajó	7 038 859	889 209	7 928 068
No trabajó	5 006 954	806 371	5 813 325
Total	12 045 813	1 695 580	13 741 393

"Recuerda que el próximo Censo se realizará entre los meses de marzo a junio de 2024, el objetivo de un Censo es conocer cuántos habitantes hay en el país, la forma en la que estos viven y dónde lo hacen. En el siguiente link hay un video sobre los objetivos del Censo 2024: <https://www.ine.gob.cl/censo/todo-sobre-el-censo>."

¿Cuál es la probabilidad de que una persona, escogida al azar, haya trabajado la semana anterior a la realización del Censo 2017, dado que pertenece a un área urbana?

### Paso a Paso

1. Define los eventos:

Sea:  $T$ : persona que trabajó la semana pasada.

$U$ : pertenece a un área urbana

2. Probabilidad de que la persona escogida haya trabajado dado que pertenece a una zona urbana:

$$P(T / U) = \frac{P(T \cap U)}{P(U)}$$

3. Probabilidad de que una persona haya trabajado y sea de un área urbana.

$$P(T \cap U) = \frac{7\,038\,859}{13\,741\,393} = 0,5122 \approx 0,51$$

4. Probabilidad de que una persona sea de un área urbana.

$$P(U) = \frac{12\,045\,813}{13\,741\,393} = 0,8766 \approx 0,88$$

5. Calcula la probabilidad  $P(T / U)$ . Redondea su resultado a la centésima

$$P(T / U) = \frac{0,51}{0,88} = 0,5795 \approx 0,58$$

6. Responde

La probabilidad de que la persona escogida haya trabajado, dado que pertenece a un área urbana es de 0,58 o 58% aproximadamente.

- 4  Considerando el ejemplo anterior, ¿Es mayor o menor a la probabilidad obtenida en el ejemplo 5, si la persona trabajó dado que pertenece a un área rural?

### Para terminar la Lección 2...

- ¿De qué manera los diagramas de árbol de probabilidades pueden ayudarte a tomar mejores decisiones?
- ¿Qué características tienen las situaciones en que es útil aplicar las probabilidades condicionales?
- ¿En qué tipo de proyectos individuales o grupales has participado en tu curso?, ¿qué responsabilidades has tenido en ellos?

# Síntesis de Unidad 1

## LECCIÓN 1 >> Toma de decisiones con medidas de dispersión

### Aprendiste...

#### Desviación media ( $DM$ )

Datos no agrupados ( $n \neq 0$ ):

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Datos agrupados ( $n \neq 0$ ):

$$DM = \frac{|c_1 - \bar{x}| \cdot f_1 + \dots + |c_N - \bar{x}| \cdot f_N}{n}$$

#### Varianza ( $\sigma^2$ )

Datos no agrupados ( $n \neq 0$ ):

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Datos agrupados ( $n \neq 0$ ):

$$\sigma^2 = \frac{(c_1 - \bar{x})^2 \cdot f_1 + \dots + (c_N - \bar{x})^2 \cdot f_N}{n}$$

#### Desviación estándar ( $\sigma$ )

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

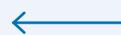
#### Coefficiente de variación ( $CV$ )

$$CV = \frac{\sigma}{|\bar{x}|} \quad (\bar{x} \neq 0)$$

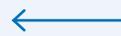
¿Qué dificultades tuviste para calcular estas medidas de dispersión?, ¿qué hiciste para superarlas?

### Aplicaste...

- Medidas de dispersión para tomar decisiones fundamentadas en los resultados y en evidencia estadística.
- Medidas de dispersión para argumentar y justificar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, la veracidad o falsedad de una conjetura.



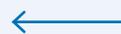
¿Por qué es importante desarrollar esta habilidad?



¿En qué situación podría ser necesario utilizar esta habilidad?

### Desarrollaste...

El entusiasmo por participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político, medioambiental, entre otros.

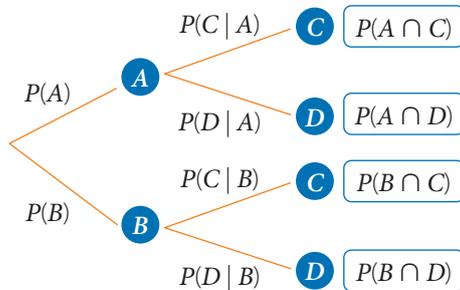


¿Hasta qué punto estás de acuerdo en que esta es una actitud positiva?

## LECCIÓN 2 » Toma de decisiones con probabilidades condicionales

### Aprendiste...

Diagrama de árbol de probabilidades



Probabilidad condicional

Probabilidad de A dado B para  $P(B) > 0$ :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

¿Qué sabías acerca de estos temas?, ¿qué más te gustaría aprender sobre ellos?

### Aplicaste...

- Probabilidades para tomar decisiones fundamentadas en los resultados obtenidos a partir de modelos probabilísticos.
- Probabilidades para argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

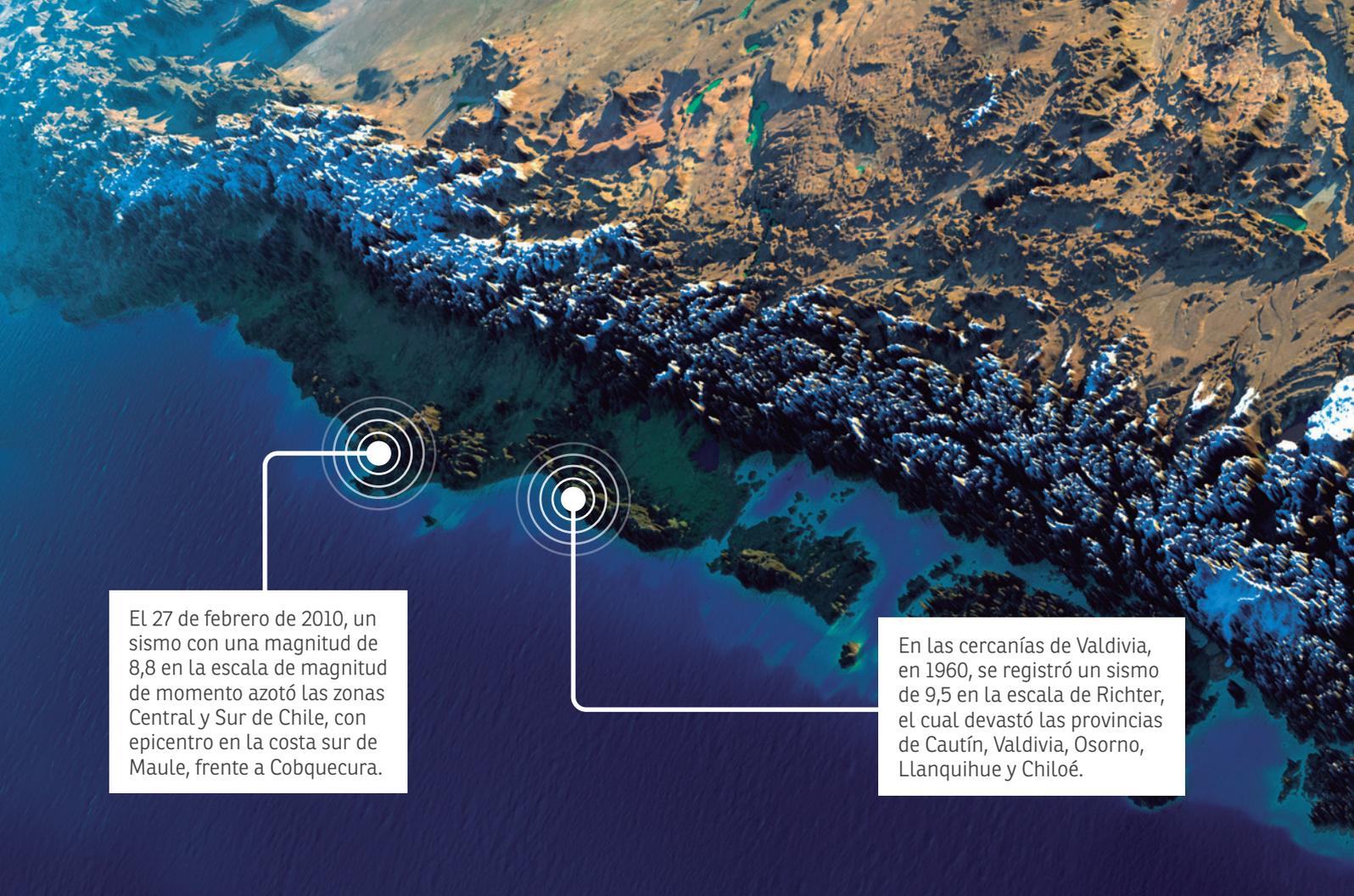
← ¿Qué situaciones problemáticas podrías resolver utilizando esta habilidad?

← ¿Cuál es el propósito de adquirir esta habilidad?

### Desarrollaste...

El interés por actuar con responsabilidad al tomar decisiones con consciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

← ¿En qué ocasión esta actitud podría servirte?



El 27 de febrero de 2010, un sismo con una magnitud de 8,8 en la escala de magnitud de momento azotó las zonas Central y Sur de Chile, con epicentro en la costa sur de Maule, frente a Cobquecura.

En las cercanías de Valdivia, en 1960, se registró un sismo de 9,5 en la escala de Richter, el cual devastó las provincias de Cautín, Valdivia, Osorno, Llanquihue y Chiloé.

Unidad

# 2

## Uso herramientas para aplicar modelos matemáticos

### Funciones exponencial y logarítmica

- ¿Qué información contiene la imagen?
- ¿Qué características hacen de Chile un «país sísmico»?

#### Investigando y proponiendo soluciones

Selecciona uno de los terremotos destacados en la imagen y busca información sobre él a través del testimonio de algún familiar o amigo y en medios digitales.

- ¿Cuál fue su duración?, ¿cuántas réplicas importantes tuvo?
- ¿Qué medidas tomó la autoridad para ayudar a los afectados? Explica.
- ¿Qué medidas básicas propondrías para mitigar el daño que provocan los terremotos en nuestro país?

Para profundizar en las escalas sísmicas conéctate a <https://www.youtube.com/watch?v=na4bYG9uTys>  
 ¿Qué referencia utilizó Charles Richter para crear la escala que lleva su nombre?



Fuente: Memoria chilena. (septiembre de 2021). Los terremotos en Chile (1570-2010). Memoria chilena.  
<https://www.memoriachilena.gob.cl/602/w3-article-3576.html>

## Conocimientos previos

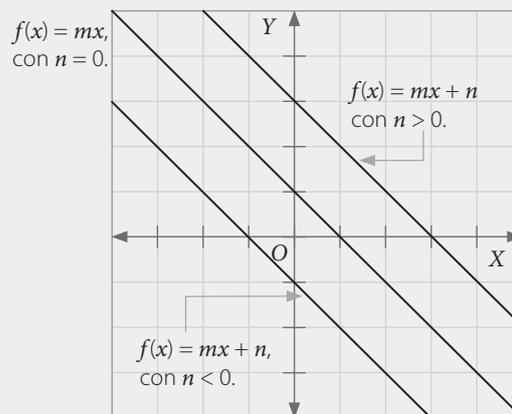
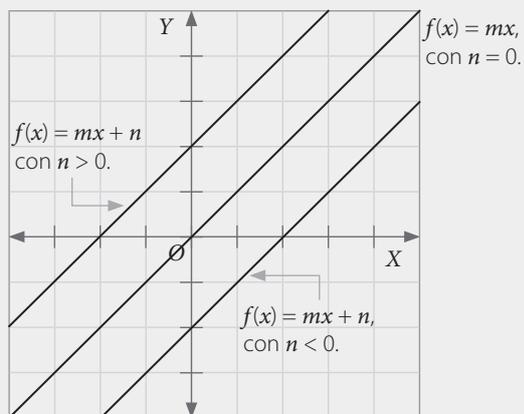
### Conjuntos numéricos

- Números naturales:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Números enteros:  $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Números racionales:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
- Números irracionales:  $\mathbb{Q}^*$ , está formado por todos los números que no se pueden escribir de la forma  $\frac{a}{b}$  con  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .
- Números reales:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$

### Gráfico de una función afín

Una función afín  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx + n$  con  $m, n \in \mathbb{R} - \{0\}$ , se puede representar como la gráfica de la función lineal trasladado  $n$  unidades hacia arriba o hacia abajo según corresponda.

- Si  $m > 0$  y  $n \in \mathbb{R}$  se tiene los siguientes casos.
- Si  $m < 0$  y  $n \in \mathbb{R}$  se tiene los siguientes casos.



### Potencias

- Respecto de  $4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ , la base es **4**, el exponente es **-3** y su valor es  $\frac{1}{64}$ .

# Aplicación de modelos con la función exponencial

## Caracterizando modelos exponenciales

Las redes sociales son medios digitales que nos permiten comunicarnos con otras personas y compartir información al instante. Rebeca reenviará a sus amigos la foto que le mandó su hermano de los tres árboles que plantó en el patio de su casa. Con esta acción busca motivarlos a seguir el ejemplo y proteger el entorno natural.

- ¿Utilizas redes sociales? ¿Con qué finalidad?
- ¿Cuántas horas al día te conectas a ellas? ¿Crees que la cantidad de tiempo que les dedicas es recomendable para tu salud?
- ¿Qué medio utilizas para conectarte a redes sociales?
- Si Rebeca envía la foto a dos de sus amigos, luego cada uno de ellos se la envía a dos personas más y después estas a dos personas más cada una, ¿cuántos mensajes se habrán enviado?, ¿cuántas personas habrán recibido la foto?

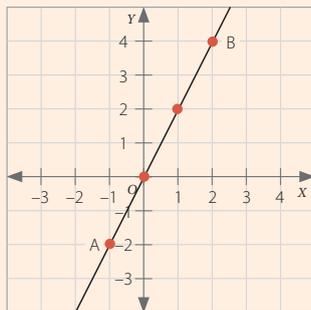


Archivo editorial

## « Funciones crecientes y decrecientes

Una **función**  $f$  se dice que es **creciente** en un intervalo  $I$  de su dominio si, para todo  $a, b \in I$  con  $a < b$ , se cumple que  $f(a) < f(b)$ .

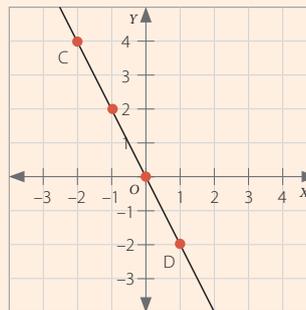
Respecto de la **función**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 2x$  se tiene que es **creciente** ya que:



Considerando los puntos  $A(-1, -2)$  y  $B(2, 4)$ , se tiene que  $-1 < 2$  cumple que  $f(-1) < f(2)$ .

Una **función**  $f$  se dice que es **decreciente** en un intervalo  $I$  de su dominio si, para todo  $a, b \in I$  con  $a < b$ , se cumple que  $f(a) > f(b)$ .

Respecto de la función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = -2x$  se tiene que es **decreciente** ya que:



Considerando los puntos  $C(-2, 4)$  y  $D(1, -2)$ , se tiene que  $-2 < 1$  cumple que  $f(-2) > f(1)$ .

- ¿Cómo explicarías con tus propias palabras las características de una función creciente?, ¿y de una función decreciente?
- ¿Qué parámetro de la función afín  $f(x) = mx + n$  (con  $x, m, n \in \mathbb{R}$  y  $m \neq 0$ ) determina si su gráfica es creciente o decreciente? Explica.

### EJEMPLO 1 » Determinación de modelo matemático.

¿Qué función modela el reenvío de la foto hecha por Rebeca y sus amigos, en que cada receptor lo reenvía a 2 personas?, ¿es una función creciente o decreciente?

#### Paso a Paso

- Representa en una tabla la cantidad de reenvíos de la foto y la cantidad de mensajes recibidos.

Mensajes enviados y recibidos de la foto hecha por Rebeca									
Cantidad de reenvíos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Cantidad de mensajes recibidos	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$

- Deduce regularidades en los valores de la tabla.
  - Al aumentar en uno la cantidad de reenvíos, la cantidad de mensajes recibidos se duplica.
  - Si  $x$  representa la cantidad de reenvíos de la foto,  $2^x$  representa la cantidad de receptores.
- Determina la función que modela la situación.

La función que permite modelar la situación por medio de la variable  $x$  definida como la cantidad de reenvíos de la foto es  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ , tal que  $f(x) = 2^x$ . Esta función es creciente, ya que por ejemplo para 1 y 2, se cumple que  $1 < 2$ , verificando que  $f(1) < f(2)$ .

- La función  $g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = 2^{-x}$ , ¿es creciente o decreciente? Ingresen a <https://bit.ly/3n9Oc2g> y utilicen la calculadora paso por paso para responder.

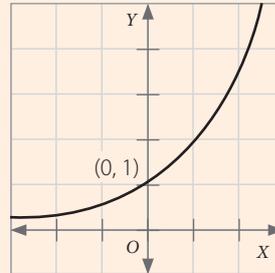
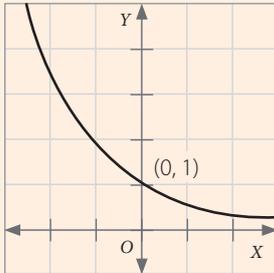


## « Función exponencial

Una **función exponencial** puede definirse por  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = a^x$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

Dependiendo del valor de  $a$ , se presentan los siguientes casos:

- Si  $0 < a < 1$ , la función es **decreciente**.
- Si  $1 < a$ , la función es **creciente**.



Se observa que la gráfica corta al eje  $Y$  en  $(0, 1)$ , además tiene una **asíntota** en  $y = 0$ , es decir la gráfica se aproxima indefinidamente sin llegar a tocarla.



- ¿Cómo expresarías con tus palabras el dominio y el recorrido de la función exponencial?
- ¿Qué forma tendría la gráfica de la función  $h: \mathbb{R} \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $h(x) = a^x$ , si  $a = 1$ ?

### EJEMPLO 2 » Construcción del gráfico de una función exponencial creciente.

¿Cuál es el gráfico de la función que modela las cantidades de reenvíos y de mensajes recibidos de la foto del hermano de Rebeca?



#### Paso a Paso

- Reescribe la tabla que representa la situación inicial.

Mensajes enviados y recibidos de la foto hecha por Rebeca									
Cantidad de reenvíos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Cantidad de mensajes recibidos	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$

- Escribe la función correspondiente.

La función es  $f(x) = 2^x$  y está definida para los valores de  $x$  pertenecientes a  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , que corresponde al dominio de la función.

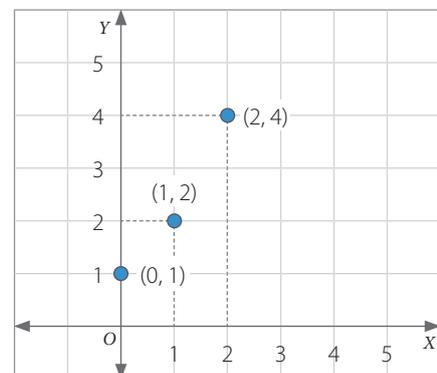
- Responde construyendo el gráfico.

La gráfica corresponde solo a los puntos que se generan de la expresión  $f(x) = 2^x$ , a continuación se muestran algunos

$$f(0) = 2^0 = 1 \quad \blacktriangleright \quad (0, 1)$$

$$f(1) = 2^1 = 2 \quad \blacktriangleright \quad (1, 2)$$

$$f(2) = 2^2 = 4 \quad \blacktriangleright \quad (2, 4)$$



### EJEMPLO 3 >> Construcción del gráfico de una función exponencial creciente en $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

¿Cuál es el gráfico de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = 2^x$ ?

#### Paso a Paso

1. Confecciona una tabla con pares de puntos que cumplan  $f(x) = 2^x$  para valores reales en el dominio.

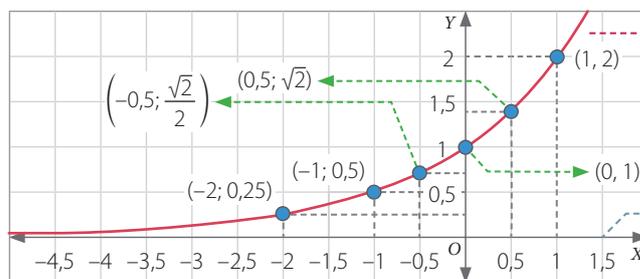
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = 2^x$

$x$	-2	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$	$2^{-2} = 0,25$	$2^{-1} = 0,5$	$2^{-0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2^0 = 1$	$2^{0,5} = \sqrt{2}$	$2^1 = 2$

2. Responde ubicando los puntos en el plano cartesiano y construyendo la gráfica (su dominio son los números reales a diferencia del gráfico de la página anterior).

Los puntos destacados en la gráfica son los siguientes:

- ▶  $(-2; 0,25)$
- ▶  $(-1; 0,5)$
- ▶  $(-0,5; \frac{\sqrt{2}}{2})$
- ▶  $(0, 1)$
- ▶  $(0,5; \sqrt{2})$
- ▶  $(1, 2)$



Gráfica de  $f(x) = 2^x$

Asíntota en  $y = 0$ , es una recta que la gráfica nunca la toca.

### EJEMPLO 4 >> Construcción del gráfico de una función exponencial decreciente en $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

¿Cuál es el gráfico de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ ?

#### Paso a Paso

1. Elabora una tabla con pares de puntos para  $x$  y para  $y = (\frac{1}{2})^x$ .

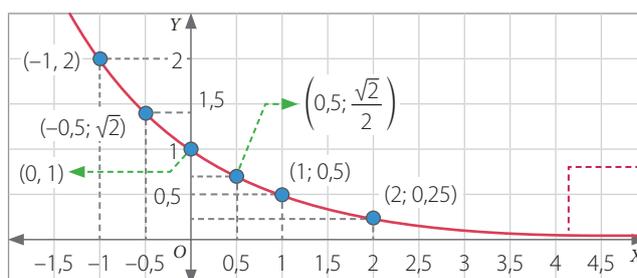
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

$x$	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$	$(\frac{1}{2})^{-1} = 2$	$(\frac{1}{2})^{-0,5} = \sqrt{2}$	$(\frac{1}{2})^0 = 1$	$(\frac{1}{2})^{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{1}{2})^1 = 0,5$	$(\frac{1}{2})^2 = 0,25$

2. Responde ubicando los puntos en el plano cartesiano y construyendo la gráfica.

Los puntos destacados en la gráfica son los siguientes:

- ▶  $(-1, 2)$
- ▶  $(-0,5; \sqrt{2})$
- ▶  $(0, 1)$
- ▶  $(0,5; \frac{\sqrt{2}}{2})$
- ▶  $(1; 0,5)$
- ▶  $(2; 0,25)$



Gráfica de  $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

## Anzuelo

### Innovaciones tecnológicas de los Changos

Estudios realizados sobre la dieta de los Changos, pueblo originario que habita el borde costero del norte de Chile, confirman que conquistaron y explotaron el mar de forma gradual, aplicando una serie de innovaciones tecnológicas. Entre ellas se cuentan el diseño y construcción de arpones, anzuelos, redes de fibra de totora, entre otros.

Para la captura de la sardina fabricaron anzuelos circulares que les permitieron pescar peces de mayor tamaño y a mayores profundidades, posibilitando la alimentación y sobrevivencia de grupos humanos cada vez más grandes.

#### Apliquemos lo estudiado

Supón que un pescador chango sale a pescar durante cuatro días y consigue las cantidades de peces que se registran en la siguiente tabla:

Cantidad de peces obtenidos por pescador chango				
Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
Cantidad de peces	1	3	9	27



www.studocu.cl/registro/25-1160

↑ Anzuelo circular usado por los Changos.

Fuente: Museo de Antofagasta. (septiembre de 2021). *Indígenas de la costa norte: prácticas y técnicas alimenticias*. Ministerio de las Culturas, las Artes y el Patrimonio de Chile.  
<https://www.museodeantofagasta.gob.cl/colecciones/indigenas-de-la-costa-norte-practicas-y-tecnicas-alimenticias>

### EJEMPLO 5 >> Uso de la función exponencial para modelar situación.

BDA U2\_ACT\_4  
U2\_VID\_4

¿Qué función puede utilizarse para modelar la cantidad de peces que obtiene el pescador con el transcurso de los días?

#### Paso a Paso

1. Numera los días partiendo de 0, expresa las cantidades de peces como potencias e identifica regularidades.

Cantidad de peces obtenidos por pescador chango				
Día	0	1	2	3
Cantidad de peces	$1 = 3^0$	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$

- Cada día el pescador pesca el triple de peces que el día anterior.
  - Si se representa por  $x$  al número asociado a cada día, entonces la cantidad de peces obtenidos en él es  $3^x$ .
2. Determina la función que modela la situación.
- Como se numeraron los días desde  $x = 0$ , el dominio de la función es  $\mathbb{N}_0$ , en el dominio no se puede considerar 0,245 días o  $\sqrt{5}$  días, es por eso que no corresponde a los números reales ( $\mathbb{R}$ ).
  - Teniendo en consideración las cantidades de peces que se obtuvieron, el recorrido es  $\mathbb{N}$ .
  - Por lo tanto, la función que modela la cantidad de peces que obtiene el pescador con el paso de los días es exponencial y se define por  $g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ , tal que  $g(x) = 3^x$ .

6 La función  $g$  anterior, ¿es creciente o decreciente?, ¿cómo lo sabes?

Un estudio realizado en el sur de Chile señala que la deforestación ha provocado la pérdida de grandes extensiones de bosque nativo. Los datos se tomaron a partir de la variación durante 20 años consecutivos de un área representativa de 100 ha (hectáreas) de bosque y fueron los siguientes:

Variación de la extensión de bosque nativo				
Tiempo (años)	0	5	10	15
Área de bosque nativo (ha)	100	50	25	12,5

### EJEMPLO 6 >> Uso de la función exponencial para modelar situación.

¿Qué función exponencial puede utilizarse para modelar la disminución de hectáreas de bosque nativo en el transcurso de los años?, ¿cómo es su gráfica?

#### Paso a Paso

1. Analiza los valores y expresa las superficies de bosque nativo como potencias.

- Los períodos considerados para la variable tiempo son de 5 años.
- En cada período de tiempo la cantidad de hectáreas de bosque nativo disminuye a la mitad.
- En el año 0 había 100 ha de bosque nativo.

A partir de la información anterior, puedes escribir la tabla de la siguiente forma:

Variación de la extensión de bosque nativo				
Tiempo (años)	0	5	10	15
Área de bosque nativo (ha)	$100 = 100 \cdot 0,5^{\frac{0}{5}}$	$50 = 100 \cdot 0,5^{\frac{5}{5}}$	$25 = 100 \cdot 0,5^{\frac{10}{5}}$	$12,5 = 100 \cdot 0,5^{\frac{15}{5}}$

Ahora, puedes escribir los valores como potencias:

Valor inicial.  $\rightarrow 100 \cdot 0,5^{\frac{x}{5}} \leftarrow$  Período de tiempo.

↑

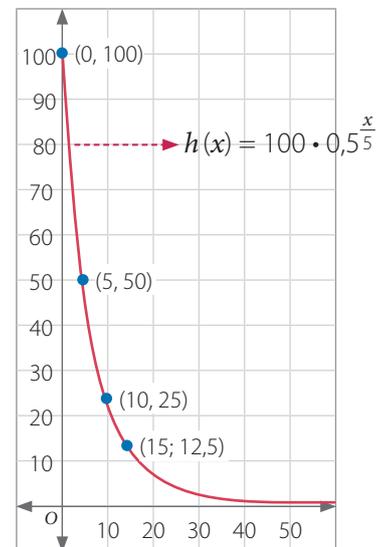
Valores de la variable van disminuyendo a la mitad.

2. Determina la función exponencial que modela la situación.

La función que modela la variación de la extensión de bosque nativo a lo largo de los años es

$$h: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ tal que } h(x) = 100 \cdot 0,5^{\frac{x}{5}}$$

Superficie de bosque nativo (ha)



3. Construye la gráfica de la función que modela la situación y descríbela.

- La función  $h$  es decreciente, ya que los valores de  $h$  disminuyen en la medida que los de  $x$  aumentan.
- Para la situación descrita, la función  $h$  está definida para los valores de  $x$  pertenecientes a  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  (dado que el tiempo mínimo es 0 años).
- Los valores que adquiere la función  $h$  pertenecen a  $\mathbb{R}^+$  (sin incluir el 0), ya que la recta  $y = 0$  es asíntota de la gráfica de la función.

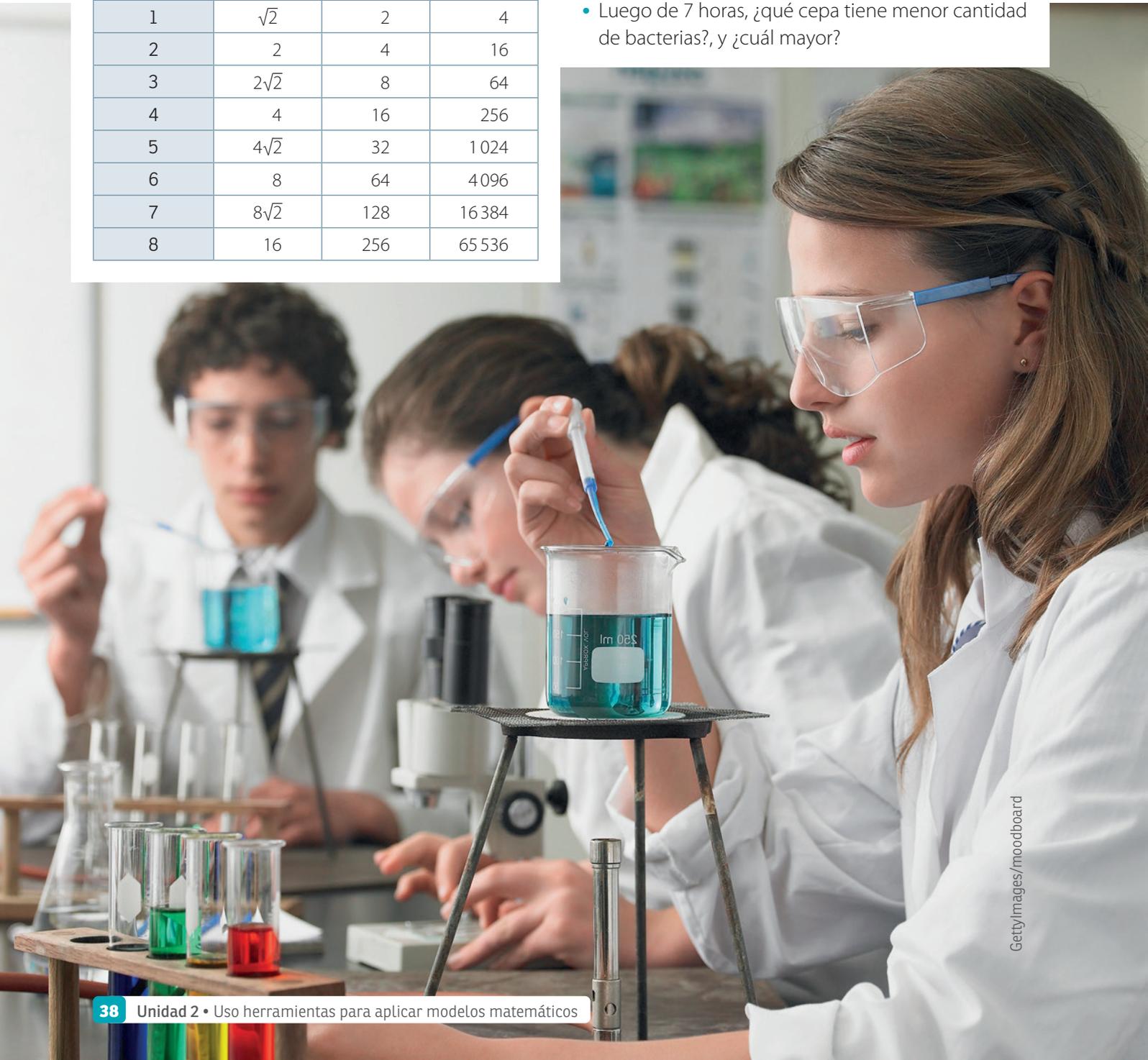
1 ¿A partir de qué año las hectáreas deforestadas serán menor a 1 ha? Explica.

## Modificando parámetros de la función exponencial

Un grupo de estudiantes de química está investigando, de manera experimental, el crecimiento cada 1 hora de la población de tres distintas cepas de una misma bacteria. Sus resultados se muestran en la siguiente tabla para las cepas A, B y C:

Crecimiento de bacterias (en miles de unidades)			
Cepa	Cepa A	Cepa B	Cepa C
Tiempo (h)			
0	1	1	1
1	$\sqrt{2}$	2	4
2	2	4	16
3	$2\sqrt{2}$	8	64
4	4	16	256
5	$4\sqrt{2}$	32	1024
6	8	64	4096
7	$8\sqrt{2}$	128	16384
8	16	256	65536

- ¿Te gustaría trabajar en un laboratorio usando instrumental y midiendo magnitudes diversas?, ¿por qué?
- La situación descrita, ¿corresponde a un crecimiento o a un decrecimiento exponencial?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Cuántas bacterias hay de cada cepa al iniciar las mediciones?
- ¿Cómo interpretas que la cantidad de bacterias de la cepa A en 1 hora sea igual a  $\sqrt{2}$ ? Explica.
- Luego de 7 horas, ¿qué cepa tiene menor cantidad de bacterias?, y ¿cuál mayor?

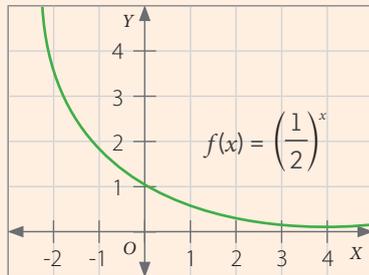


GettyImages/moodboard

## « Modificaciones en el coeficiente $b$ para la expresión $f(x) = a^{bx}$

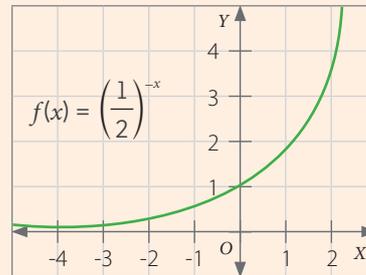
La **función exponencial**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = a^{bx}$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $b \neq 0$ , es **creciente** o **decreciente** para un valor de  $a$  fijo, dependiendo del signo de  $b$ :

>  $f$  es **creciente**



- para  $1 < a$  si  $b > 0$ .
- para  $0 < a < 1$  si  $b < 0$ .

>  $f$  es **decreciente**



- para  $1 < a$  si  $b < 0$ .
- para  $0 < a < 1$  si  $b > 0$ .

2 ¿Qué ocurre con la función  $f$  y su gráfica para  $a = 1$ ? Bosqueja la gráfica y explica.

### EJEMPLO 7 » Análisis de la gráfica de la función $f(x) = a^{bx}$ al modificar $b$ .

¿Cómo cambia la gráfica de la función exponencial que modela el crecimiento de las cepas A, B y C de la bacteria analizada por los estudiantes de química?

#### Paso a Paso

1. Modela cada crecimiento utilizando una función exponencial.

Se considerará como dominio de las tres funciones que modelan el crecimiento bacteriano al conjunto  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  y como recorrido al intervalo real  $[1, +\infty[$ . Entonces, las funciones son las siguientes:

Cepa A ▶  $f(x) = 2^{0,5x}$

Cepa B ▶  $g(x) = 2^x$

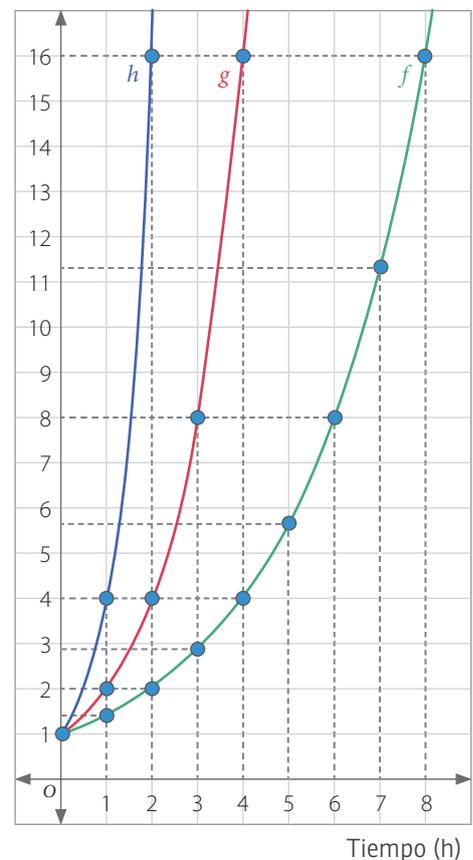
Cepa C ▶  $h(x) = 2^{2x}$

2. Analiza y grafica las funciones exponenciales.

Si las expresiones se escriben de la forma  $f(x) = a^{bx}$ , entonces, se puede deducir lo siguiente:

- Como  $1 < a$  y  $b > 0$ , las tres funciones son crecientes.
- Como el parámetro  $b$  de la expresión de  $h$  es mayor que el de la expresión de  $g$  ( $2 > 1$ ) y este, a su vez, es mayor que el de la expresión de  $f$  ( $1 > 0,5$ ), se tiene que la función  $h$  es la que crece más rápido en su dominio y la función  $f$  es la que crece más lento, como puede verse en la gráfica adjunta.

Cantidad de bacterias (miles de unidades)



3 ¿Cómo es el crecimiento de la función exponencial para  $0 < a < 1$  si disminuye el valor del parámetro  $b < 0$ ? Pueden graficar las funciones  $f(x) = 0,5^{-2x}$  y  $g(x) = 0,5^{-10x}$  usando el *software* matemático que encuentran en <https://bit.ly/2N8oBRy> y comparar las gráficas para responder.



## « Desplazamientos en el eje X

La gráfica de una función exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = a^{x+c}$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  y  $c \in \mathbb{R}$ , experimentará los siguientes **desplazamientos en el eje X** dependiendo de los valores que tome el parámetro  $c$ :

- Si  $c < 0$ , la gráfica de  $f$  se desplazará  $c$  unidades horizontalmente hacia la **derecha**.
- Si  $c > 0$ , la gráfica de  $f$  se desplazará  $c$  unidades horizontalmente hacia la **izquierda**.



4 ¿Qué desplazamiento experimenta la gráfica de la función si  $c = 0$ ? Explica.

### EJEMPLO 8 » Análisis de la gráfica de la función $f(x) = a^{x+c}$ al modificar el valor de $c$ .

¿Cómo cambia la gráfica de la función exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = 2^{x+c}$ , para  $c = -2$ ,  $c = 0$  y  $c = 2$ ?

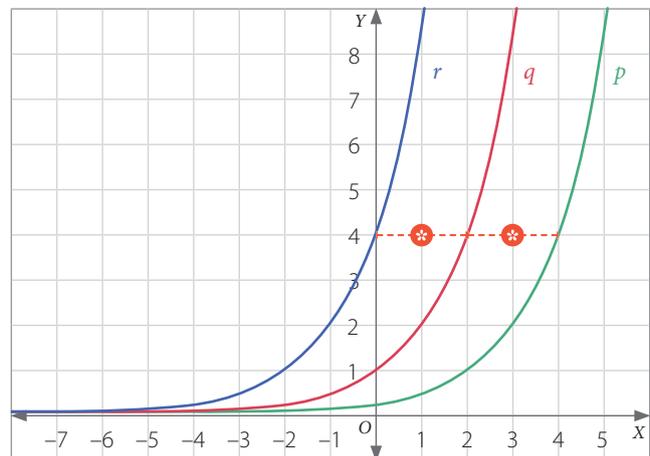
#### Paso a Paso

1. Denomina a las funciones  $p(x) = 2^{x-2}$ ,  $q(x) = 2^x$  y  $r(x) = 2^{x+2}$  y representa algunos de sus valores en una tabla.

$x$	-2	-1	-0,5	0	1	2	3
$p(x)$	0,0625	0,125	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	0,25	0,5	1	2
$q(x)$	0,25	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	2	4	8
$r(x)$	1	2	$2\sqrt{2}$	4	8	16	32

2. Analiza y gráfica las funciones exponenciales.

- La gráfica de la función  $r(x) = 2^{x+2}$  se encuentra 2 unidades a la izquierda de la gráfica de la función  $q(x) = 2^x$ .
- La gráfica de la función  $p(x) = 2^{x-2}$  se encuentra 2 unidades a la derecha de la gráfica de la función  $q(x) = 2^x$ .
- Generalizando lo anterior, se puede concluir que para desplazar  $c$  unidades a la izquierda la gráfica de una función exponencial  $f(x) = a^x$ , hay que sumar  $c$  unidades a su exponente y para trasladarla  $c$  unidades a la derecha, hay que restar  $c$  unidades a su exponente.



⊛ 2 unidades

5 ¿Cómo pueden comprobar el resultado anterior aplicado a las funciones  $f(x) = 3^{x+4}$ ,  $g(x) = 3^x$  y  $h(x) = 3^{x-1}$ ? Construyan las gráficas accediendo a un *software* matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy> y escriban si se verifica la generalización propuesta.



## « Desplazamientos en el eje Y

La gráfica de una función exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = a^x + d$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  y  $d \in \mathbb{R}$ , experimentará los siguientes **desplazamientos en el eje Y** dependiendo de los valores que tome el parámetro  $d$ :

- Si  $d > 0$ , la gráfica de  $f$  se desplazará  $d$  unidades verticalmente hacia **arriba**.
- Si  $d < 0$ , la gráfica de  $f$  se desplazará  $d$  unidades verticalmente hacia **abajo**.

En ambos casos, la recta  $y = d$  es **asíntota** a las gráficas.



- 6 ¿Qué desplazamiento experimenta la gráfica de la función si  $d = 0$ ? Explica.

### EJEMPLO 9 >> Análisis de la gráfica de la función $f(x) = a^x + d$ al modificar el valor de $d$ .

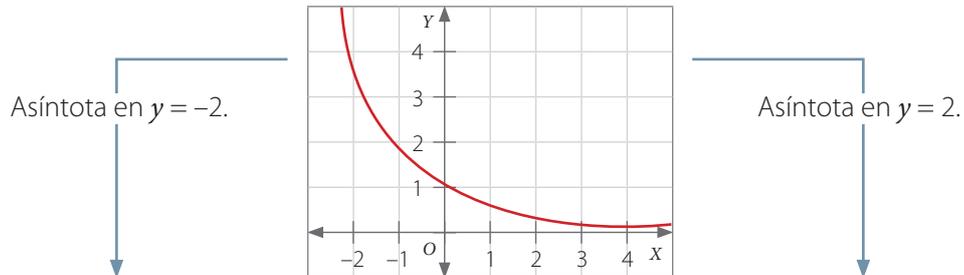
¿Cómo cambia la gráfica de la función exponencial  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + d$ , para  $d = -2$ ,  $d = 0$  y  $d = 2$ ?

#### Paso a Paso

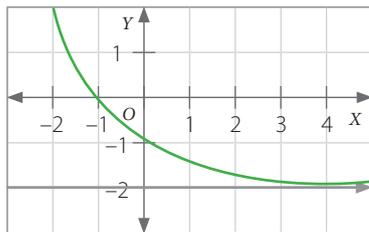
1. Grafica las funciones aplicando los desplazamientos en el eje Y.

Denomina a las funciones  $p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ ,  $q(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  y  $r(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ . Luego, gráfica  $q(x)$  y, mediante desplazamientos 2 unidades hacia abajo y 2 unidades hacia arriba.

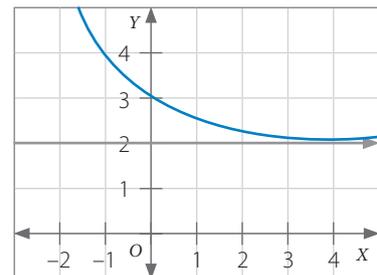
$$q: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty [ , q(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x , \text{asíntota en } y = 0.$$



$$p: \mathbb{R} \rightarrow ]-2, +\infty [ , p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$$



$$r: \mathbb{R} \rightarrow ]-2, +\infty [ , r(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$$



2. Analiza la gráfica de las funciones exponenciales.

- La gráfica de  $p(x)$  se encuentra 2 unidades por debajo de la gráfica de  $q(x)$ .
- La gráfica de  $r(x)$  se encuentra 2 unidades por encima de la gráfica de  $q(x)$ .
- Generalizando lo anterior, se puede concluir que para trasladar  $d$  unidades hacia abajo la gráfica de una función exponencial  $f(x) = a^x$ , hay que restarle  $d$  unidades y para trasladarla  $d$  unidades hacia arriba, hay que sumarle  $d$  unidades.

## » URGENCIA CLIMÁTICA

### Carbono neutralidad de Chile en 2050

El año 2016, Chile emitió aproximadamente 112 millones de toneladas de dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>), de las cuales, como se muestra en la imagen adjunta, un 78 % correspondieron al sector energía, donde además se concentran las mayores oportunidades de reducción de emisiones de gases de efecto invernadero.

Según las autoridades, estamos en medio de tiempos cruciales para la acción climática, con decisiones esenciales que deben estimular la cooperación entre las partes si queremos alcanzar los niveles de emisiones de GEI (gases de efecto invernadero) requeridos por la ciencia.

No hay otra opción más que realizar lo que la comunidad científica nos exige: tenemos que alcanzar la neutralidad de carbono al año 2050, incluso antes si es posible. La ciencia no es negociable, ni tampoco lo es nuestro planeta.

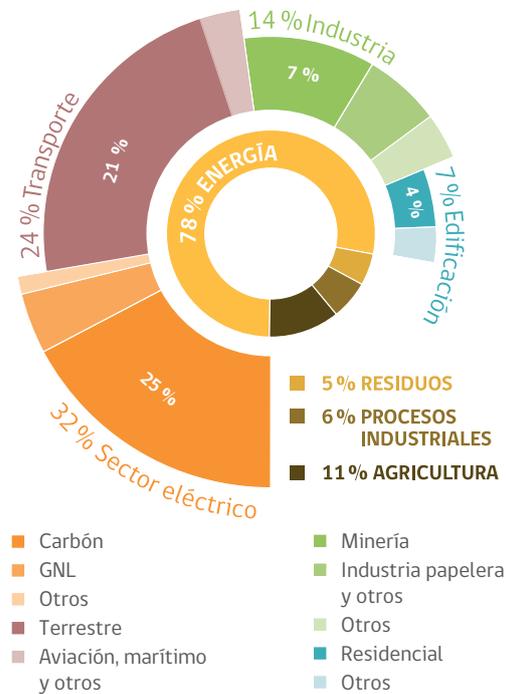
Visita el siguiente *link* para leer el informe completo  
<https://bit.ly/3GFCvGT>



### Apliquemos lo estudiado

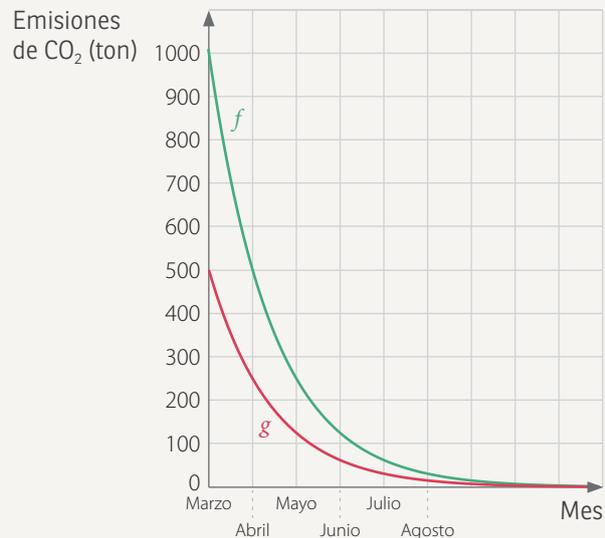
Debido a sus alarmantes cifras de producción de dióxido de carbono, una industria del sector eléctrico se ha comprometido a disminuir sus emisiones proyectadas actualmente. El gráfico adjunto muestra las proyecciones de emisión de dióxido de carbono para 2028, en que la curva *f* representa la cantidad de emisiones de acuerdo con el nivel actual de generación y la curva *g*, la cantidad de emisiones comprometidas.

Participación en el nivel de emisiones de CO<sub>2</sub> por sector a nivel nacional, año 2016



Fuente: Ministerio de Energía (editado).

Emisiones de CO<sub>2</sub> proyectadas por la industria para 2028 (marzo en adelante)



GettyImages/Malte Mueller

## EJEMPLO 10 >> Análisis de modelos exponenciales comparados.

¿Qué funciones modelan las emisiones de dióxido de carbono proyectadas por la industria y cómo se relacionan entre sí?

### Paso a Paso

1. Escribe los valores de las emisiones proyectadas para los meses representados en el gráfico.

Emisiones de CO <sub>2</sub> proyectadas por la industria para 2028						
Mes	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto
Emisión actual (ton)	1 000	500	250	125	64,5	32,25
Emisión comprometida (ton)	500	250	125	64,5	32,25	16,125

2. Identifica regularidades en las emisiones actuales (curva  $f$ ) y determina la función que las modela.

- Cada mes las emisiones se reducen a la mitad del valor del mes anterior.
- Si  $x$  es el número asociado a cada mes, la tabla correspondiente se muestra a continuación:

Mes	0	1	2	3	4	5
Emisión actual (ton)	1 000	500	250	125	64,5	32,25

- Por lo tanto, la función que modela las emisiones actuales es  $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow ]0, 1\ 000]$ , tal que  $f(x) = 1\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

3. Identifica regularidades en las emisiones comprometidas (curva  $g$ ) y determina la función que las modela.

- Cada mes las emisiones se reducen a la mitad del valor del mes anterior.
- Si  $x$  es el número asociado a cada mes, la tabla correspondiente es la siguiente:

Mes	0	1	2	3	4	5
Emisión comprometida (ton)	500	250	125	64,5	32,25	16,125

- Entonces, la función que modela las emisiones comprometidas se puede expresar por  $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow ]0, 500]$ , tal que  $g(x) = 1\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$  o equivalentemente  $g(x) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

4. Interpreta las funciones anteriores para relacionarlas.

- La gráfica de la función  $g$  corresponde a una traslación horizontal 1 unidad a la derecha de la gráfica de la función  $f$ .
- El compromiso de la industria consiste en reducir a la mitad sus emisiones actuales para aportar en la meta de la carbono neutralidad del país en 2050.

### Para terminar la Lección 3...

- ¿En qué contextos aplicarías la función exponencial como un modelo para comprender mejor la realidad?
- ¿Qué herramientas tecnológicas utilizaste para describir e interpretar la función exponencial?
- ¿Cómo el modelamiento te puede permitir encontrar soluciones innovadoras a problemas de la ciencia y del día a día?

# Aplicación de modelos con la función logarítmica

## Caracterizando modelos logarítmicos

Los sismos o movimientos telúricos son sacudidas bruscas de la corteza terrestre producidas por la liberación de energía acumulada en forma de ondas. A lo largo del tiempo se han utilizado diversas escalas para medir esta energía, siendo la de mayor popularidad la de Richter. En las imágenes se indica la magnitud de algunos de los sismos más importantes en nuestro país.

Las redes sociales han sido de gran utilidad para que las personas puedan comunicarse cuando ocurren sucesos como los descritos.

Durante el terremoto de 2010 en Chile, los *hashtag* #FuerzaChile, #Chile y #Terremoto fueron tendencia en la red social Twitter.

- ¿Cómo piensas que las personas se pudieron comunicar tras los terremotos de 1960 y 1985?
- ¿Por qué crees que es importante la comunicación cuando ocurren eventos como los terremotos?
- ¿Cómo se relaciona la escala de Richter con la función logarítmica? Averigua en internet y describe con tus palabras esta relación.

Fuente: Centro Sismológico Nacional, Universidad de Chile. (s.f.). Grandes terremotos en Chile. <https://www.csn.uchile.cl/sismologia/grandes-terremotos-en-chile/>

Archivo editorial.



1960. Magnitud 9,5  $M_w$



1985. Magnitud 8,0  $M_w$



2010. Magnitud 8,8  $M_w$

MW: Magnitud de momento  
GettyImages/Gary S. Chapman

## « Función logarítmica

La **función logarítmica** se puede definir como  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ . En esta expresión,  $a$  es la **base** del logaritmo y  $x$  es su **argumento**.

Cuando la base del logaritmo es 10, no es necesario escribirla, es decir, se escribe log.

El valor de la base  $a$  del logaritmo define si la función es creciente o decreciente:

- Si  $0 < a < 1$ , la función es **decreciente**.
- Si  $1 < a$ , la función es **creciente**.



- 1 ¿Qué forma tendría la gráfica de la función logarítmica  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x)$ , si  $a = 1$ ?
- 2 La función  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ , ¿es creciente o decreciente?, ¿por qué?
- 3 La función  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_{10}(x)$ , ¿es creciente o decreciente?, ¿por qué?

### EJEMPLO 1 » Aplicación de la función logarítmica.

La expresión que permite determinar la magnitud de un sismo mediante la escala de Richter se puede expresar de la siguiente manera:

$$10^M = \frac{A \cdot (\Delta t)^3}{1,62}$$

En ella, las variables utilizadas son

- $M$ : magnitud del sismo.
- $A$ : amplitud de las ondas sísmicas medida en milímetros (mm).
- $\Delta t$ : tiempo, medido en segundos (s), que transcurre entre el inicio de las ondas primarias y el inicio de las ondas secundarias.

¿Qué expresión permite determinar la magnitud  $M$  de un sismo para  $\Delta t = 10$  s?

#### Paso a Paso

1. Aplica las propiedades de los logaritmos para despejar  $M$  en la expresión de la escala de Richter.

$$10^M = \frac{A \cdot (\Delta t)^3}{1,62} \leftarrow \text{Reemplazas } \Delta t = 10.$$

$$\log(10^M) = \log\left(\frac{A \cdot (10)^3}{1,62}\right) \leftarrow \text{Aplicas logaritmo.}$$

$$\log(10^M) = \log\left(\frac{A \cdot 1000}{1,62}\right) \leftarrow \text{Calculas } 10^3.$$

$$M \cdot \log(10) = \log\left(\frac{A \cdot 1000}{1,62}\right) \leftarrow \text{Aplicas propiedades del logaritmo } (\log(10) = 1).$$

$$M = \log\left(\frac{A \cdot 1000}{1,62}\right) \leftarrow \text{Determinas la expresión para } M.$$

2. Responde.

La expresión que permite determinar la magnitud de un sismo es  $M = \log\left(\frac{A \cdot 1000}{1,62}\right)$ .

- 4  ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función  $M(A)$  anterior?, ¿es una función creciente o decreciente? Grafiquen la función  $M(A)$  accediendo al *software* matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy>. Luego, respondan y comparen sus resultados con los del resto del curso.



## « Función logaritmo natural

Cuando la base de un logaritmo es el número irracional  $e$  (con  $e \approx 2,718281\dots$ ), se dice que es un **logaritmo natural** y se escribe  $\log_e(x) = \ln(x)$ .

Así, la **función logaritmo natural** se define como  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \ln(x)$ .



5 ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función logaritmo natural?, ¿es una función creciente o decreciente?

## Culto a los muertos

### Los lickanantay y otras culturas del Norte Grande

En las fiestas y ceremonias lickanantay (atacameñas) se expresa una profunda e intensa interacción con la naturaleza y con el culto a los muertos, manifestada en las invitaciones al espíritu de la tierra, pachamama; de los cerros, tata-cerros; y de los antepasados, tata-abuelos.

Hoy subsisten sus patrones tradicionales de creencias, cognición y simbolismo, basados en concepciones mitológicas tradicionales y reactualizados mediante la experiencia ritual de su cosmovisión.

BDA U2\_ACT\_8  
U2\_VID\_8

Fuente: Centro de Estudios Agrarios y Ambientales. (s.f.). Ceremonias y rituales. <https://www.ceachile.cl/humedales/calama/ceremonias.htm>

### EJEMPLO 2 » Aplicación del logaritmo natural.

La datación por carbono 14 es un procedimiento que permite determinar la antigüedad de objetos de origen biológico mediante la siguiente función:

$$T = \frac{T_{1/2}}{-\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right)$$

En ella, las variables utilizadas son

- $T$ : tiempo de antigüedad de un objeto biológico (años).
- $T_{1/2}$ : período de semidesintegración del carbono 14 (constante e igual a 5 730 años, aproximadamente).
- $N_0$ : cantidad de carbono 14 al morir el espécimen (g).
- $N_f$ : cantidad de carbono 14 al encontrar el espécimen (g).

¿Qué antigüedad se estima para una momia de la cultura chinchorro, que habitó el Norte Grande de Chile, que posee un 45 % del carbono 14 que tenía cuando el individuo estaba vivo?

#### Paso a Paso

1. Identifica los datos y relacionalos con los términos de la expresión de  $T$ .

$$\frac{N_f}{N_0} = 0,45 \quad \left| \quad T_{1/2} \approx 5730 \quad \left| \quad -\ln 2 \approx -0,693\right.\right.$$

2. Reemplaza los valores anteriores en la expresión de  $T$  y desarrolla.

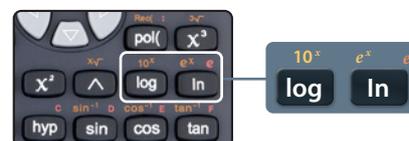
$$T = \frac{T_{1/2}}{-\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right) \approx \frac{5730}{-0,63} \cdot \ln(0,45) \approx 7262,62$$

3. Responde.

La antigüedad de la momia chinchorro se puede estimar en 7 262,62 años.

Accede a un simulador de la gráfica en: <https://www.desmos.com/calculator?lang=es>

6 ¿Cómo puedes comprobar los resultados anteriores usando una calculadora científica? Las funciones **log** y **ln** tienen asignadas teclas especiales, como se muestra en la imagen. También puedes acceder a una calculadora científica en <https://bit.ly/3MlnSNt>



## « Gráfica de la función logarítmica

La función logarítmica, definida como  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , se puede graficar en forma manual a partir de algunos de sus puntos o usando un *software* matemático en línea.

Para la función  $f$  anterior, la recta  $x = 0$  es asíntota a su gráfica. »

### EJEMPLO 3 » Gráfica de la función logarítmica.

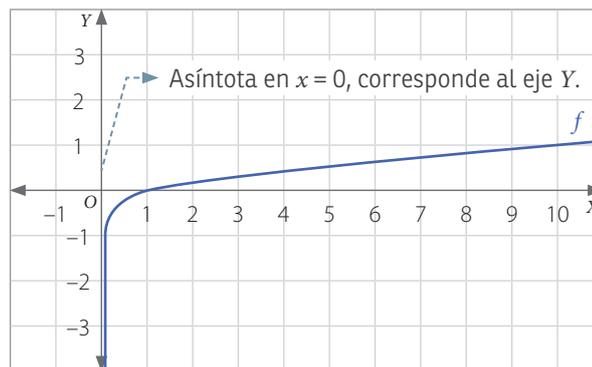
¿Cuáles son los gráficos de las funciones logarítmicas  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log(x)$ , y  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $g(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$ ?

#### Paso a Paso

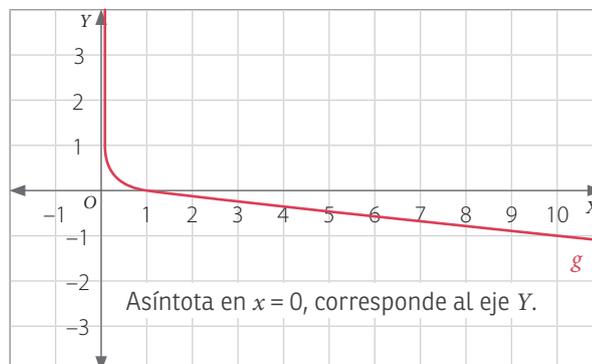
1. Confecciona una tabla con diferentes valores para las funciones  $f$  y  $g$ . Utiliza una calculadora científica y redondea los resultados decimales a la centésima.

$x$	0,1	0,5	0,75	1	2	5	8	9	10
$f(x) = \log(x)$	-1	-0,30	-0,12	0	0,30	0,70	0,90	0,95	1
$g(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$	1	0,30	0,12	0	-0,30	-0,70	-0,90	-0,95	-1

2. Representa los datos de  $f$  en el plano cartesiano.



3. Representa los datos de  $g$  en el plano cartesiano.



## « Relación entre las funciones logarítmica y exponencial

Las funciones logarítmica  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , y exponencial  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $g(x) = a^x$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , son **inversas**, es decir, se cumple que  $g = f^{-1}$  y  $f = g^{-1}$ .



- 7 ¿Cuál es la función inversa de la función logaritmo natural? Justifica tu respuesta mediante un argumento.

### EJEMPLO 4 » Análisis de las gráficas de las funciones logarítmica y exponencial.

¿Qué relación existe entre las gráficas de las funciones logarítmica  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log(x)$ , y exponencial  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $g(x) = 10^x$ ?

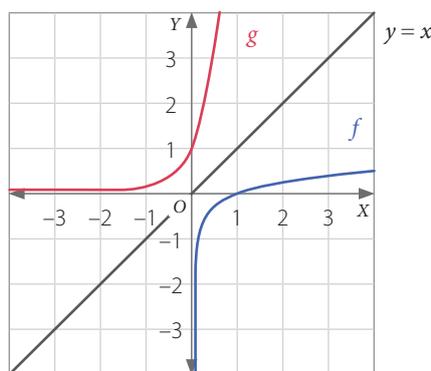
#### Paso a Paso

1. Confecciona tablas con diferentes valores de las funciones  $f$  y  $g$ . Utiliza una calculadora científica y redondea los resultados decimales a la centésima para  $f$  y a la milésima para  $g$ .

$x$	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$f(x) = \log(x)$	-1	-0,70	-0,30	0	0,18	0,30	0,40	0,48	0,54

$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$g(x) = 10^x$	0,001	0,003	0,010	0,032	0,100	0,316	1	3,162	10

2. Grafica y analiza las funciones  $f$  y  $g$  en el plano cartesiano.



Asíntota en  $y = 0$ ,  
corresponde al eje X.

- El dominio de  $f$  es el recorrido de  $g$  y el recorrido de  $f$  es el dominio de  $g$ .
- La composición de las funciones  $f$  y  $g$  es la identidad, es decir,  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ .
- Las gráficas de las funciones  $f$  y  $g$  son simétricas respecto de la recta  $y = x$ . Esta característica se presenta siempre entre las funciones inversas y se puede apreciar en la gráfica.

- 8 Considerando las funciones  $f$  y  $g$  anteriores, si  $f(m) = n$ , ¿cuál es el valor de  $g(n)$ ?

- 9 Para una función  $f$  cualquiera, ¿en qué se diferencian las funciones  $f^{-1}$  y  $\frac{1}{f}$ ? Expliquen.

## » Un huerto al interior del colegio

### Ciencias (Química)

Un huerto es un ecosistema terrestre en el que pueden interactuar verduras, legumbres y árboles frutales. Un agente necesario para el correcto desarrollo de un ecosistema es el suelo y, particularmente, su pH, que es un indicador de su acidez, de manera que a menor pH, mayor acidez y a mayor pH, menor acidez. Para calcular su valor, se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{pH} = -\log C$$

En ella, la variable  $C$  corresponde a la concentración molar de iones de hidrógeno y se mide en molaridad (M).

#### Apliquemos lo estudiado.

Los estudiantes de un taller de Química de un colegio construirán un huerto. Para ello, midieron el pH del suelo del patio, como se muestra en la imagen adjunta.

Para poder cultivar pimientos, el suelo del huerto debe tener un pH igual a 7 como mínimo, por lo que intentarán disminuir la acidez aplicando sustancias adecuadas.

La siguiente tabla muestra la concentración molar de iones de hidrógeno tras aplicar estas sustancias a lo largo de 6 semanas:

Semana	1	2	3	4	5	6
$C(M)$	$2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-8}$

El pH es una medida que indica la acidez o la alcalinidad del agua. Se define como la concentración de iones de hidrógeno en el agua. La escala del pH es logarítmica con valores de 0 a 14.



Fuente: Hanna instruments. (s.f).  
¿Por qué es tan importante controlar el PH de la tierra? (1ª parte).  
<https://bit.ly/3VtD3Xq>

### EJEMPLO 5 » Uso de la función logarítmica para predecir.

¿Podrán cultivar pimientos en el huerto tras las 6 semanas de aplicación de las sustancias?

#### Paso a Paso

1. Calcula el pH del suelo a partir de los valores de la tabla.

Considera la relación  $\text{pH} = -\log C$  como una función y construye la tabla de valores correspondiente. Redondea los resultados decimales a la décima.

Semana	1	2	3	4	5	6
$C(M)$	$2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-8}$
pH	4,7	5,2	5,7	6	6,5	7,1

Observa que:

$$\begin{aligned}\log(2 \cdot 10^{-5}) &= \log 2 + \log 10^{-5} \\ &= \log 2 - 5 \log 10 \\ &= \log 2 - 5 \\ &= -4,69897 \dots \\ &\approx -4,7\end{aligned}$$

2. Responde a partir de la tabla anterior.

Dado que en la semana 6 la concentración molar del suelo es  $8 \cdot 10^{-8} M$ , el valor correspondiente de pH es  $7,1 > 7$ . Por lo tanto, sí será posible plantar pimientos.

10  ¿Cómo es la gráfica que se obtiene a partir de la función  $\text{pH}(C) = -\log C$ , creciente o decreciente? Pueden usar un *software* matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy> para responder.



 U2\_ACT\_9 a 11  
U2\_VID\_9 y 10

## Modificando parámetros de la función logarítmica

Como ya se mencionó, el pH es un indicador del grado de acidez de una sustancia y se puede determinar a partir de la expresión  $\text{pH} = -\log C$ , en que  $C$  representa la concentración molar de iones de hidrógeno en la sustancia.

La acidez es un factor muy importante para el desarrollo de muchos procesos industriales. Por ejemplo, en la producción de agua potable y en la fabricación de productos lácteos es necesario mantener niveles de acidez controlados para que los diferentes procesos puedan realizarse de forma óptima.

- ¿Qué área de la ciencia te parece interesante?, ¿por qué?
- ¿Qué sustancias ácidas y básicas conoces? Nombra dos de cada tipo.
- Si  $\text{pH} < 7$ , se considera que una sustancia es ácida y si  $\text{pH} > 7$ , básica. En la imagen, la tira indicadora muestra que el pH es cercano a 2, entonces, ¿corresponde al valor de una sustancia ácida o básica?



↑ Tira indicadora de pH.

Getty Images/Peter Dazeley



Para conocer el pH de algunas sustancias y su relación con la lluvia ácida, conéctate a <https://bit.ly/2ESylxk>.  
¿Cuál es el pH del agua pura?

## « Desplazamientos en el eje X

La gráfica de una función logarítmica  $f: ]-b, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x + b)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $b \neq 0$ , experimentará los siguientes **desplazamientos en el eje X** dependiendo de los valores que tome el parámetro  $b$ :

- Si  $b < 0$ , la gráfica de  $f$  se desplazará  $b$  unidades horizontalmente hacia la **derecha**.
- Si  $b > 0$ , la gráfica de  $f$  se desplazará  $b$  unidades horizontalmente hacia la **izquierda**.

En ambos casos, la recta  $x = -b$  es **asíntota** a las gráficas.



### EJEMPLO 6 » Análisis del desplazamiento de la gráfica de la función pH.

¿Cómo puede desplazarse 0,1 unidades hacia la izquierda la gráfica de la función pH?

Ingresa a una simulación gráfica en:  
<https://www.desmos.com/calculator?lang=es>

#### Paso a Paso

1. Escribe la expresión de la función pH y deduce la de la función desplazada.

Por definición, la función pH corresponde a  $\text{pH}(C) = -\log C$ , en que  $C$  representa la concentración molar de iones de hidrógeno. Para desplazar 0,1 unidades hacia la izquierda la gráfica de esta función se debe sumar 0,1 a su argumento. De esta manera, la expresión que determina la función desplazada  $\text{pH}_d$  es la siguiente:

$$\text{pH}_d(C) = -\log(C + 0,1)$$

2. Analiza y grafica las funciones logarítmicas.

- La gráfica de la función  $\text{pH}_d = -\log(C + 0,1)$  se encuentra 0,1 unidades a la izquierda de la gráfica de la función  $\text{pH} = -\log(C)$ .
- Atendiendo solo a la función logaritmo que define a pH y  $\text{pH}_d$ , es decir, sin considerar los intervalos posibles de pH y de  $C$  en los experimentos de laboratorio, el dominio y el recorrido de las funciones son los siguientes:

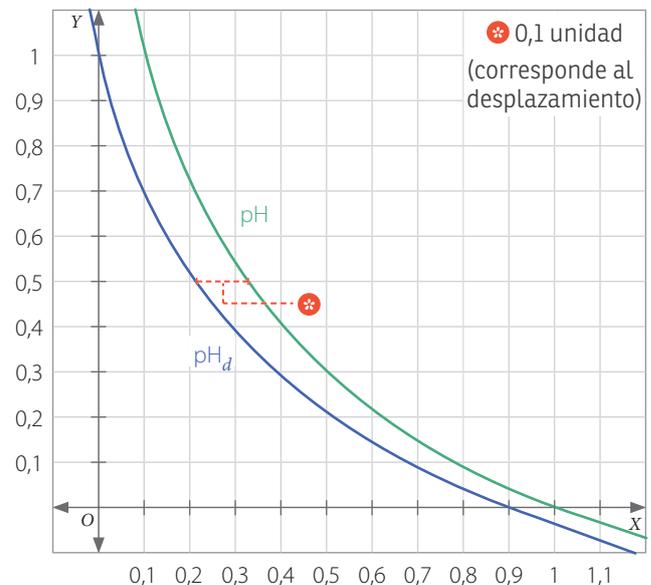
➤ Función pH:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\text{pH}) &= \mathbb{R}^+ \\ \text{rec}(\text{pH}) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

➤ Función  $\text{pH}_d$ :

$$\begin{aligned} \text{dom}(\text{pH}_d) &= ]-0,1; +\infty[ \\ \text{rec}(\text{pH}_d) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Para desplazar  $b$  unidades a la izquierda la gráfica de una función logarítmica  $f(x) = \log_a(x)$ , hay que sumar  $b$  unidades a su argumento y para trasladarla  $b$  unidades a la derecha, hay que restar  $b$  unidades a su argumento.



1 ¿Cuáles son las rectas asíntotas de las gráficas de las funciones pH y  $\text{pH}_d$ ? ¿cómo lo supiste?

2 ¿Cuál es la ecuación de la función cuya gráfica está desplazada 0,1 unidades a la derecha de la gráfica de  $\text{pH}(C) = -\log C$ ?

## » Mientras más tiempo en redes sociales, ¿más aislamiento social?

### Ciencias para la Ciudadanía

Una de las principales razones por las que las personas participan en redes sociales es para estar en comunicación con los amigos y amigas y saber qué hacen.

Paradójicamente, diversos estudios concluyen que mientras más tiempo pasa una persona en redes sociales, más aislada se siente socialmente.

Ante esto surge un cuestionamiento: la creciente penetración de internet y la adopción del uso de redes sociales ¿nos conecta más o, al contrario, nos desconecta de nuestro entorno?

#### Apliquemos lo estudiado.

Magdalena y Pedro decidieron comparar los tiempos que pasan semanalmente en redes sociales durante dos meses. Para ello, construyeron la siguiente tabla:

Tiempo en redes sociales								
Semana	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiempo de Magdalena (h)	1,6	2	2,3	2,6	2,8	3	3,2	3,3
Tiempo de Pedro (h)	2	2,3	2,5	2,8	3,1	3,2	3,3	3,5

¿Cuánto tiempo pasas en redes sociales cada día?,  
¿Te beneficias utilizándolas? ¿En qué contextos?  
Argumenta críticamente tu respuesta.



## EJEMPLO 7 >> Análisis de situación usando la función logarítmica.

¿Qué relación puede establecerse entre los tiempos de Magdalena y Pedro utilizando la función logarítmica?

### Paso a Paso

1. Relaciona el tiempo en redes sociales de cada joven con la semana en que se produce y aplica la función logarítmica.

Define la variable  $x$  como el número de la semana considerada y aplica una función logaritmo que modele los tiempos. Por ejemplo, la función logaritmo en base 2 permite hacer una buena aproximación (los valores están redondeados a la centésima).

#### Magdalena

$$x = 1 \rightarrow y = \log_2(1 + 2) \approx 1,58$$

$$x = 2 \rightarrow y = \log_2(2 + 2) = 2$$

...

$$x = 8 \rightarrow y = \log_2(8 + 2) \approx 3,32$$

#### Pedro

$$x = 1 \rightarrow y = \log_2(1 + 3) = 2$$

$$x = 2 \rightarrow y = \log_2(2 + 3) \approx 2,32$$

...

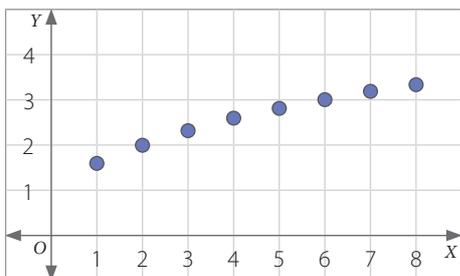
$$x = 8 \rightarrow y = \log_2(8 + 3) \approx 3,45$$

Compara estos valores con los de la tabla Tiempo en redes sociales.

2. Determina las funciones que modelan los tiempos a partir de las regularidades anteriores y construye sus gráficas. (Considera como dominio los números naturales y recorrido los números reales).

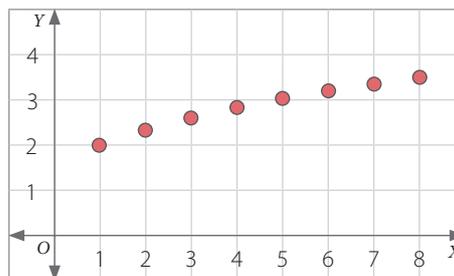
#### Magdalena

La función es  $M(x) = \log_2(x + 2)$ .

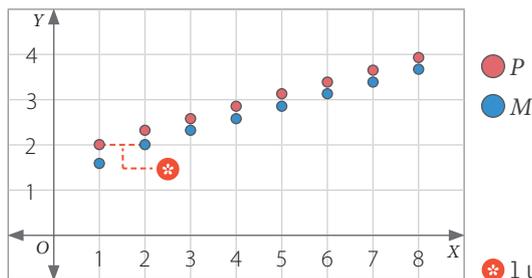


#### Pedro

La función es  $P(x) = \log_2(x + 3)$ .



3. Dibuja las gráficas juntas y compáralas.



⊛ 1 unidad (corresponde al desplazamiento)

4. Interpreta las gráficas y relaciona los tiempos.

- La gráfica de la función  $P$  corresponde a una traslación de la función  $M$  una unidad a la izquierda a lo largo del eje  $X$ .
- El comportamiento de los tiempos de conexión a redes sociales de Magdalena y Pedro a lo largo de las semanas corresponde a un crecimiento de similares características.

## « Desplazamientos en el eje Y

La gráfica de una función logarítmica  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x) + c$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  y  $c \in \mathbb{R}$ , experimentará los siguientes **desplazamientos en el eje Y** dependiendo de los valores que tome el parámetro  $c$ :

- Si  $c > 0$ , la gráfica de  $f$  se desplazará  $c$  unidades verticalmente hacia **arriba**.
- Si  $c < 0$ , la gráfica de  $f$  se desplazará  $c$  unidades verticalmente hacia **abajo**.



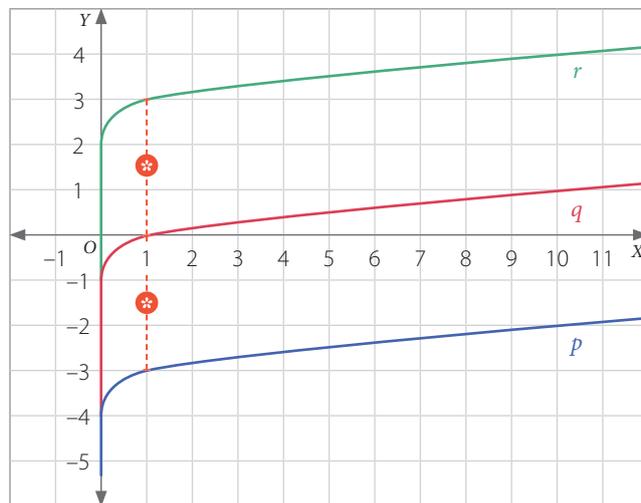
### EJEMPLO 8 » Análisis de la gráfica de la función $f(x) = \log_a(x) + c$ al modificar el valor $c$ .

¿Cómo cambia la gráfica de la función logarítmica  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log(x) + c$ , para  $c = -3$ ,  $c = 0$  y  $c = 3$ ?

#### Paso a Paso

1. Grafica las funciones aplicando los desplazamientos en el eje Y.

Denomina a las funciones  $p(x) = \log(x) - 3$ ,  $q(x) = \log(x)$  y  $r(x) = \log(x) + 3$ . Luego, grafica  $q(x)$  y, mediante desplazamientos 3 unidades hacia abajo y 3 unidades hacia arriba, obtén las gráficas de  $p(x)$  y  $r(x)$ , respectivamente.



\* 3 unidades

Ingresa a una simulación gráfica en:  
<https://www.desmos.com/calculator?lang=es>

2. Analiza las gráficas anteriores.

- La gráfica de la función  $p(x) = \log(x) - 3$  se encuentra 3 unidades por debajo de la gráfica de la función  $q(x) = \log(x)$ .
- La gráfica de la función  $r(x) = \log(x) + 3$  se encuentra 3 unidades por encima de la gráfica de la función  $q(x) = \log(x)$ .
- Para trasladar  $c$  unidades hacia abajo la gráfica de una función logarítmica  $f(x) = \log_a(x)$  hay que restarle  $c$  unidades y para trasladarla  $c$  unidades hacia arriba, hay que sumarle  $c$  unidades.

3 ¿Cuántas unidades y en qué sentido está desplazada la gráfica de la función  $r$  respecto de la gráfica de la función  $p$ ?

4 ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones  $p$ ,  $q$  y  $r$ , respectivamente?

## « Desplazamientos simultáneos en los ejes X e Y

La gráfica de una función logarítmica  $f: ]-b, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x + b) + c$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , experimentará los siguientes desplazamientos respecto de los ejes cartesianos dependiendo de los valores que tomen los parámetros  $b$  y  $c$ :

- El valor de  $b$  determinará el **desplazamiento horizontal a lo largo del eje X**.
- El valor de  $c$  determinará el **desplazamiento vertical a lo largo del eje Y**.



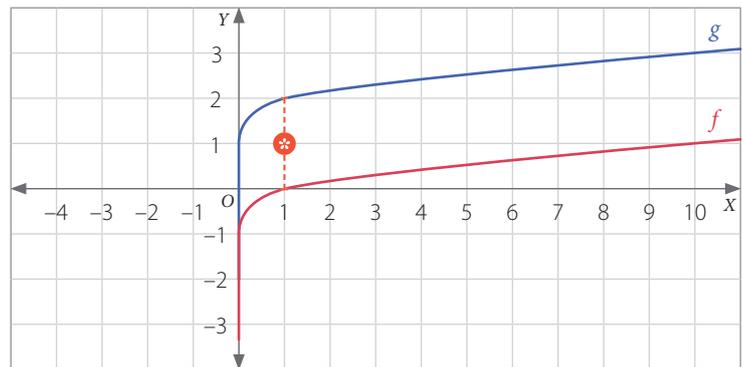
### EJEMPLO 9 » Desplazamiento de la gráfica de la función $f(x) = \log(x)$ en ambos ejes.

¿Cómo se obtiene la gráfica de la función  $h(x) = \log(x + 3) + 2$  a partir de la gráfica de la función  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log(x)$ ?

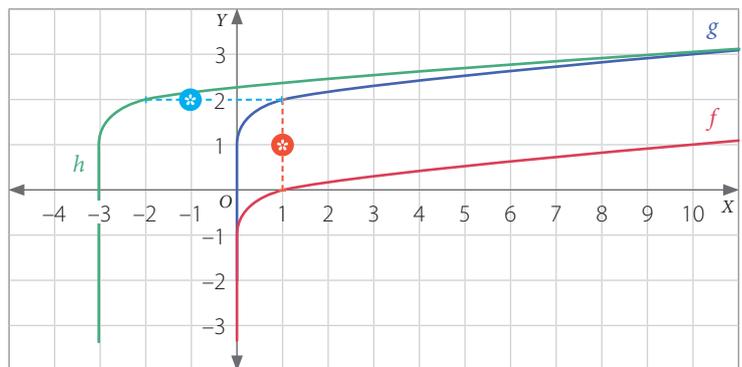
#### Paso a Paso

1. Grafica la función  $f(x) = \log(x)$  y desplázala 2 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de la función intermedia  $g(x) = \log(x) + 2$ .

Ingresar a una simulación gráfica en:  
<https://www.desmos.com/calculator?lang=es>



2. Desplaza 3 unidades hacia la izquierda la gráfica de la función  $g(x) = \log(x) + 2$  para obtener la gráfica de la función  $h(x) = \log(x + 3) + 2$ .



\* 2 unidades

\* 3 unidades

### Para terminar la Lección 4...

- ¿Qué características tienen los modelos definidos por la función logarítmica y qué simplificaciones hubo que realizar para estudiar los fenómenos que describe?
- ¿Qué estrategias aplicaste para graficar funciones logarítmicas y para desplazar estas gráficas en el plano cartesiano?
- ¿De qué manera puedes hacer un buen uso de las redes sociales y de los contenidos de internet para informarte y participar de la sociedad?



U2\_ACT\_12 y 13

# Síntesis de Unidad 2

## LECCIÓN 3 » Aplicación de modelos con la función exponencial

### Aprendiste...

#### Función exponencial

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = a^x$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

- Si  $0 < a < 1$ , es **decreciente**.
- Si  $1 < a$ , es **creciente**.

#### Crecimiento y decrecimiento

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = a^{bx}$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $b \neq 0$ .

Es **creciente** si

- $1 < a$  y  $b > 0$
- $0 < a < 1$  y  $b < 0$

Es **decreciente** si

- $1 < a$  y  $b < 0$
- $0 < a < 1$  y  $b > 0$

#### Desplazamientos en el eje X

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = a^{x+c}$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  y  $c \neq 0$ .

- Si  $c < 0$ , la gráfica se desplaza  $c$  unidades a la **derecha**.
- Si  $c > 0$ , la gráfica se desplaza  $c$  unidades a la **izquierda**.

#### Desplazamientos en el eje Y

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $f(x) = a^x + d$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $d \in \mathbb{R}$  y  $d \neq 0$ .

- Si  $d > 0$ , la gráfica se desplaza  $d$  unidades hacia **arriba**.
- Si  $d < 0$ , la gráfica se desplaza  $d$  unidades hacia **abajo**.

Puedes construir las gráficas de funciones en: <https://www.desmos.com/calculator?lang=es>  
¿Qué problemas tuviste con esta función?, ¿cómo los resolviste?

### Aplicaste...

- Características de las funciones exponenciales para encontrar soluciones a los problemas y fundamentar decisiones.
- Desplazamientos de la gráfica de modelos exponenciales en el plano a través de la modificación de sus parámetros para ajustarlos a fenómenos y así poder estudiarlos y predecir posibles escenarios de solución a diversos problemas.



¿Qué ejemplo se te ocurre para mostrar que aplicaste esta habilidad?



¿Por qué crees que es importante usar herramientas para predecir hechos y fenómenos?

### Desarrollaste...

La perseverancia y la proactividad para dirigir tus pensamientos a la resolución de problemas.



¿Qué tanto ha estado presente en ti esta actitud?

## LECCIÓN 4 » Aplicación de modelos con la función logarítmica

### Aprendiste...

#### Función logarítmica

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

#### Crecimiento y decrecimiento

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

- Es **decreciente** si  $0 < a < 1$ .
- Es **creciente** si  $1 < a$ .

#### Función logaritmo y función exponencial

Sean  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $g(x) = a^x$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .

Entonces,  $f$  y  $g$  son **inversas**, es decir, se cumple que  $g = f^{-1}$  y  $f = g^{-1}$ .

#### Desplazamientos en el eje X

$f: ]-b, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x + b)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $b \neq 0$ .

- Si  $b < 0$ , la gráfica se desplaza  $b$  unidades a la **derecha**.
- Si  $b > 0$ , la gráfica se desplaza  $b$  unidades a la **izquierda**.

#### Desplazamientos en el eje Y

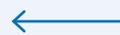
$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \log_a(x) + c$ , con  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  y  $c \neq 0$ .

- Si  $c > 0$ , la gráfica se desplaza  $c$  unidades hacia **arriba**.
- Si  $c < 0$ , la gráfica se desplaza  $c$  unidades hacia **abajo**.

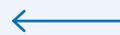
Puedes construir las gráficas de funciones en: <https://www.desmos.com/calculator?lang=es>  
¿Qué diferencias y qué similitudes identificaste entre las funciones logarítmica y exponencial?

### Aplicaste...

- Elementos de las funciones logarítmicas para aplicar y evaluar modelos predictivos y estrategias de resolución de problemas.
- Desplazamientos de la gráfica de modelos logarítmicos en el plano a través de la modificación de sus parámetros para ajustarlos a diversas situaciones y resolver problemas.



¿Qué sabías sobre los logaritmos con anterioridad?



¿Qué pasos has seguido para desplazar las gráficas en el plano cartesiano?

### Desarrollaste...

La curiosidad necesaria para acceder a la información de múltiples formas, pudiendo así investigar, comunicarte y participar en eventos comunitarios.



¿Por qué crees que es acertado acceder a la información de múltiples formas y no solo de una manera?



U2\_ACT\_14 a 19

U2\_VID\_14



Unidad

# 3

## Resuelvo problemas en formas circulares de mi entorno

### La circunferencia y sus elementos

- ¿Qué forma tiene la noria de la imagen?
- ¿Cómo son entre sí las distancias desde las cabinas al centro de la rueda, iguales o diferentes?

### Descubriendo la geometría de las cosas

Consigue una rueda de una bicicleta, triciclo, coche u otro vehículo y usando una huincha determina las medidas aproximadas de su radio, de su diámetro y de su perímetro.

- Calcula el doble de la medida de su radio. ¿Con cuál de las medidas que determinaste coincide?, ¿por qué?
- Divide su perímetro por la medida de su diámetro. ¿Qué cociente obtienes?, ¿coincide con el valor que obtuvieron tus compañeros o compañeras?, ¿por qué?



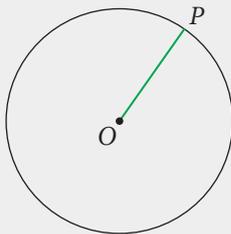
Gettyimages/Hans Peter Meritten

♣ London Eye (Ojo de Londres), Reino Unido.

## Conocimientos previos

### Conocimientos previos

En una **circunferencia** de centro  $O$  se tiene:

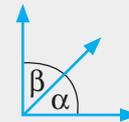


**Radio** ( $\overline{OP}$ ), segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. Generalmente se anota  $r$ .

**Perímetro** ( $P$ ): Longitud del contorno de una figura plana, en la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ , corresponde a  $P = 2\pi r$ .

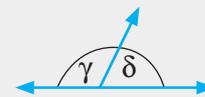
Dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es igual a  $90^\circ$ , es decir,

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$



Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es igual a  $180^\circ$ , es decir,

$$\gamma + \delta = 180^\circ.$$

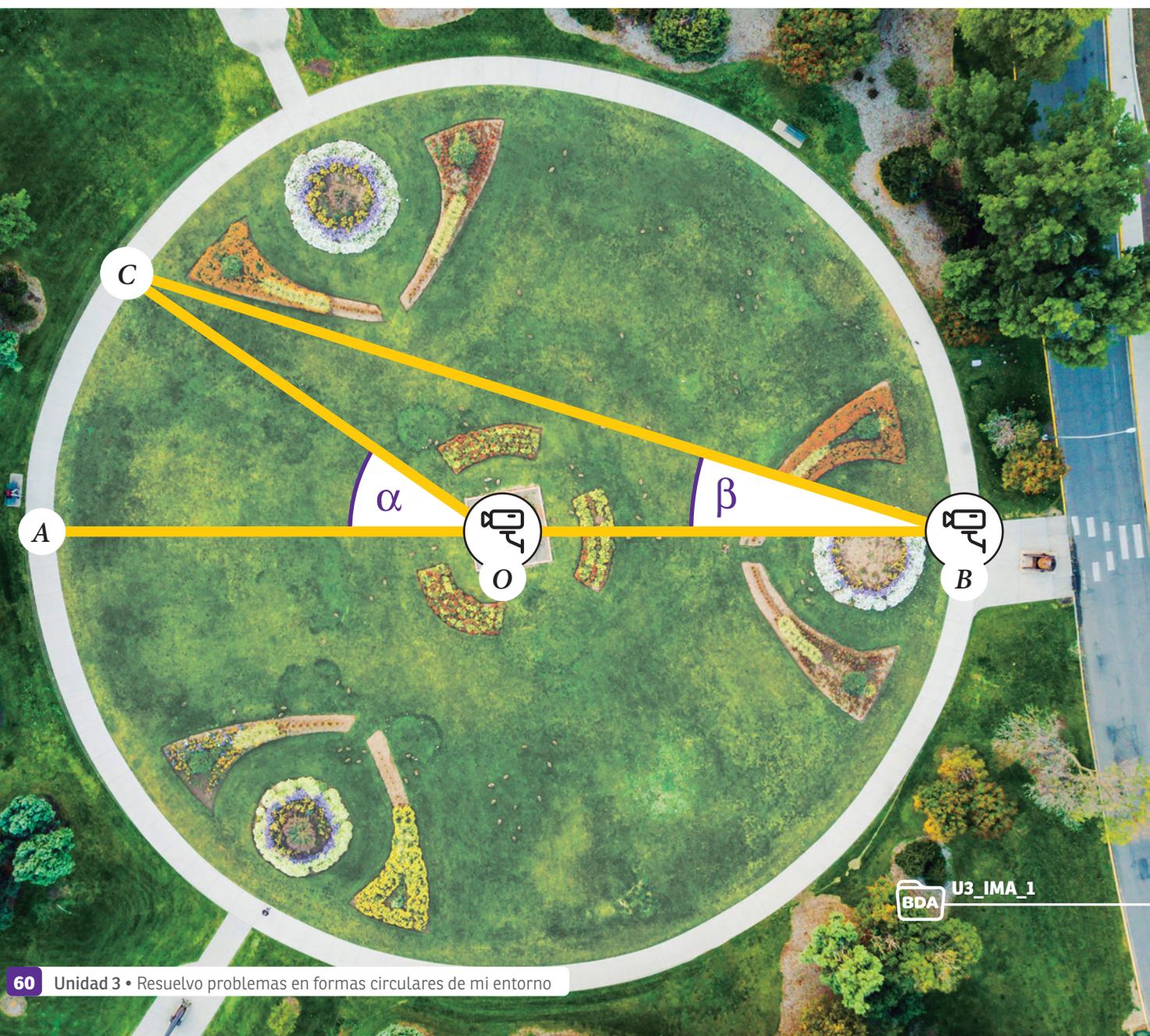


# Resolución de problemas de ángulos en circunferencias

## Calculando ángulos central e inscrito

En el parque de una ciudad hay instaladas cámaras de vigilancia en puntos estratégicos. La ubicada en el punto  $B$ , enfocada con un ángulo de  $20^\circ$  respecto del segmento  $\overline{AB}$ , ha detectado un objeto sospechoso en el punto  $C$ . El encargado de seguridad quiere dirigir la cámara en  $O$  hacia el objeto. Para enfocarla correctamente, necesita conocer la medida del  $\sphericalangle COA$ .

- ¿Qué figura geométrica se destaca en el parque?  
¿Con qué elementos de esta figura puedes asociar el segmento  $\overline{AB}$  y el punto  $O$ ?
- ¿El valor de  $\alpha$  es mayor o menor que el de  $\beta$ ?  
¿Cómo lo sabes?

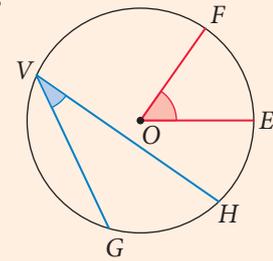


## ◀ Circunferencia, ángulo central y ángulo inscrito

Una **circunferencia** es el lugar geométrico formado por todos los puntos que están a la misma distancia de un punto  $O$  que se denomina centro.

En ella se pueden definir ángulos centrales e inscritos:

- **Ángulo central:** su vértice es el centro de la circunferencia y sus lados corresponden a dos de sus radios. Por ejemplo,  $\sphericalangle EOF$ .
- **Ángulo inscrito:** su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados corresponden a dos cuerdas. Por ejemplo,  $\sphericalangle GVH$ .



1 ¿Cuál es el vértice y los lados del  $\sphericalangle GVH$ ?

### EJEMPLO 1 >> Relación entre las medidas del ángulo central y del ángulo inscrito.

En la situación del parque, ¿qué relación existe entre las medidas del ángulo central  $\sphericalangle COA$  y el inscrito  $\sphericalangle CBA$  y cuál es el valor de  $\alpha$ ? Y, de acuerdo con esta relación, ¿cuál es la medida del ángulo  $\sphericalangle COA$  que permite enfocar correctamente la cámara en  $O$ ?

#### Paso a Paso

1. Analiza el triángulo  $BCO$  y determina una expresión para la suma de sus ángulos interiores.

Como los segmentos  $\overline{CO}$  y  $\overline{OB}$  son radios de la circunferencia, el triángulo  $BCO$  es isósceles con base  $\overline{CB}$ . Por lo tanto, los ángulos  $\sphericalangle CBO$  y  $\sphericalangle OCB$  son congruentes, es decir, se cumple:

$$m(\sphericalangle CBO) = m(\sphericalangle OCB) = \beta$$

La suma de los ángulos interiores del triángulo  $BCO$  es  $180^\circ$ , por lo tanto:

$$m(\sphericalangle BOC) + \beta + \beta = 180^\circ$$

$$m(\sphericalangle BOC) + 2\beta = 180^\circ$$

2. Relaciona la expresión obtenida con la medida del  $\sphericalangle COA$ .

Dado que los ángulos  $\sphericalangle COA$  y  $\sphericalangle BOC$  son suplementarios, se cumple que:

$$m(\sphericalangle BOC) + \alpha = 180^\circ$$

Por lo tanto, se verifican las siguientes ecuaciones:

$$m(\sphericalangle BOC) + 2\beta = 180^\circ$$

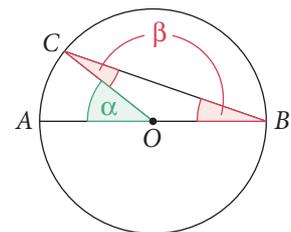
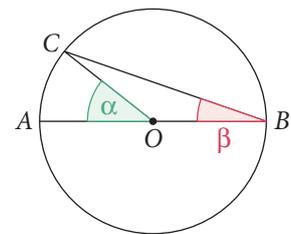
$$m(\sphericalangle BOC) + \alpha = 180^\circ$$

Restando ambas ecuaciones, obtienes la relación  $2\beta - \alpha = 0^\circ$ , es decir:

$$2\beta = \alpha$$

3. Responde.

La medida del ángulo central  $\sphericalangle COA$  que permite enfocar la cámara correctamente, equivale al doble de la medida del ángulo inscrito  $\sphericalangle CBA$ , por lo tanto, como  $\beta = 20^\circ$ , entonces,  $m(\sphericalangle COA) = \alpha = 40^\circ$ .

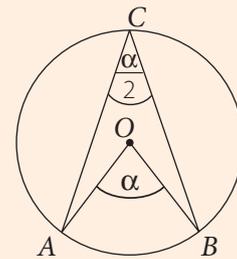


Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/Wj7d4DRf> y puedes visualizar la relación entre el ángulo central e inscrito.

## « Medidas de los ángulos central e inscrito que determinan el mismo arco

En toda circunferencia la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco. En la circunferencia de centro  $O$  se tiene:

$$m(\sphericalangle ACB) = \frac{m(\sphericalangle AOB)}{2} = \frac{\alpha}{2}$$



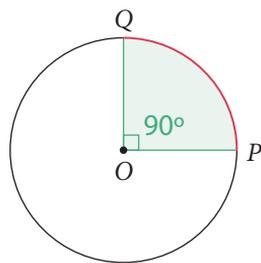
### EJEMPLO 2 » Relación entre la medida del ángulo central y la del arco que determina.

En la situación del parque, ¿cuál es la medida angular del arco  $\widehat{CA}$  determinado por los ángulos  $\sphericalangle COA$  y  $\sphericalangle CBA$ ?

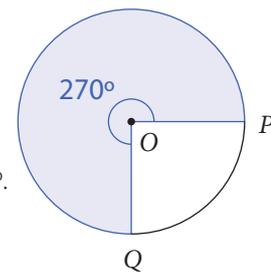
#### Paso a Paso

- Asocia la medida de un ángulo central con la medida angular del arco  $\widehat{PQ}$  que determina.

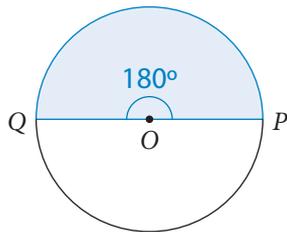
$\frac{1}{4}$  de circunferencia  
equivale a  $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ .



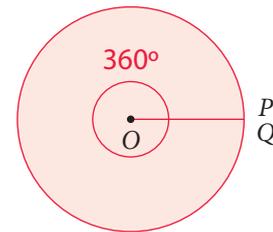
$\frac{3}{4}$  de circunferencia  
equivale a  $\frac{3 \cdot 360^\circ}{4} = 270^\circ$ .



$\frac{1}{2}$  de circunferencia  
equivale a  $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ .



1 circunferencia  
completa equivale  
a  $360^\circ$ .



- Responde.

La medida angular del arco  $\widehat{CA}$  expresada en grados sexagesimales equivale a la del ángulo central que lo subtiende, es decir,  $m(\widehat{CA}) = \alpha = 40^\circ$ .

## « Relación entre la medida del ángulo central y la medida angular del arco que determina

La medida de un arco de circunferencia puede definirse en unidades de longitud o en grados sexagesimales. En este último caso corresponde a su medida angular.

En una circunferencia, las medidas expresadas en grados sexagesimales de **un ángulo central y del arco que determina son iguales**.



- Conéctate a <https://bit.ly/40LvMUA> para que manipules los ángulos inscrito y central y visualices la relación de sus medidas con las del arco que determinan en la circunferencia.



## Afunalhue

### Arquitectura del pueblo mapuche

El Centro de Capacitación Indígena *Kom che ñi ruka* («La casa de todos», en español), ubicado en la localidad de Afunalhue, Región de La Araucanía, fue construido en el año 1997 y se originó como un proyecto educativo (*kimeltun*) que buscaba mejorar la calidad de vida de las comunidades mapuche residentes en el sector.

Desde el acceso mismo a la edificación se encuentra plasmado el uso del mapudungun en señaléticas escritas, que también distinguen los recintos y las habitaciones, las cuales reciben nombres de comunidades que han participado desde sus inicios en el centro de capacitación.

#### Apliquemos lo estudiado

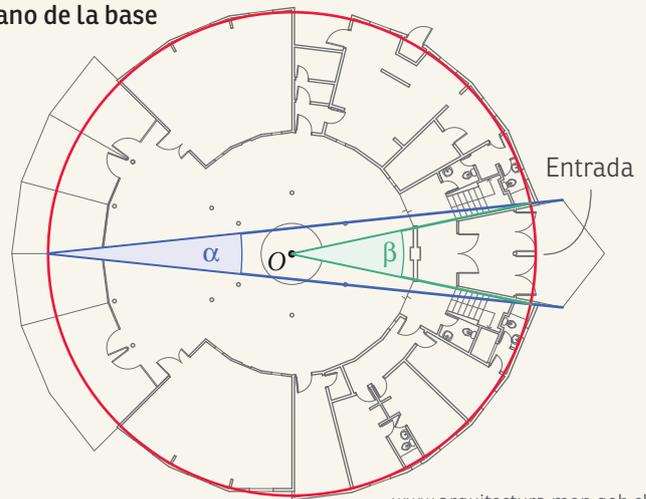
Su construcción se presenta con una forma cónica y su base corresponde a una circunferencia de 75 m de perímetro, aproximadamente.

Observa el plano de la base circular del centro de capacitación. En él se representan el ángulo inscrito de medida  $\alpha = 15^\circ$ , el ángulo del centro de medida  $\beta$  y el arco que determinan ambos ángulos, que corresponde a la entrada al edificio.



Centro de Capacitación Indígena Afunalhue, Región de La Araucanía.

#### Plano de la base



www.arquitectura.mop.gob.cl

Fuente: Dirección de Arquitectura. (s.f.). *Guía de diseño arquitectónico mapuche para edificios y espacios públicos*. Ministerio de Obras Públicas de Chile. [https://arquitectura.mop.gob.cl/Documents/Guia\\_diseño\\_arquitectonico\\_MAPUCHE.pdf](https://arquitectura.mop.gob.cl/Documents/Guia_diseño_arquitectonico_MAPUCHE.pdf)

### EJEMPLO 3 >> Cálculo de la longitud del arco determinado por un ángulo inscrito.

Aproximadamente, ¿cuál es la medida de la entrada del centro de capacitación mapuche?

#### Paso a Paso

1. Determina la medida  $\beta$  del ángulo del centro.

Como la medida del ángulo del centro equivale al doble de la medida del ángulo inscrito correspondiente y  $\alpha = 15^\circ$ , el valor de  $\beta$  es

$$\beta = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$$

2. Calcula la longitud  $x$  de la entrada aplicando una proporción.

$$\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{75 \text{ m}} \quad \blacktriangleright \quad x = \frac{30^\circ \cdot 75 \text{ m}}{360^\circ} = 6,25 \text{ m}$$

3. Responde.

La medida de la entrada del centro de capacitación es, aproximadamente, 6,25 m.

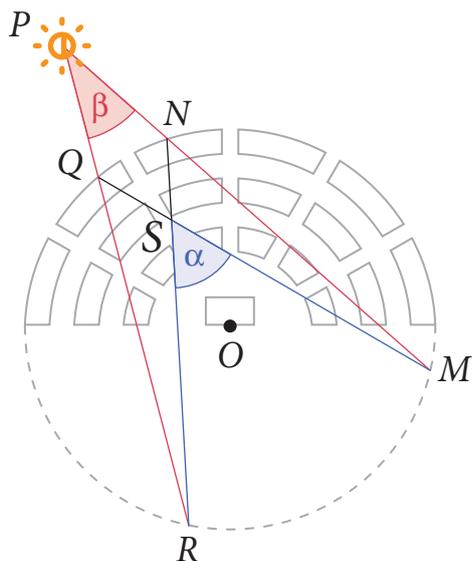
- 3 ¿Cómo explicarían geoméricamente la proporción aplicada en el Paso 2? Realicen un bosquejo y compartan con el curso su respuesta.

## Calculando ángulos interior, exterior, semiinscrito y exinscrito

Durante la presentación de una obra circense se encargó a uno de los iluminadores que dirigiera los dos focos de su equipo hacia los puntos  $M$  y  $R$ , que se muestran en el esquema del anfiteatro. Durante la primera mitad del espectáculo el equipo debe permanecer en el punto  $S$  y durante la segunda, en el punto  $P$ . Él quiere saber qué ángulo deben formar los dos focos de su equipo en el punto  $S$  y en cuántos grados debe variar su amplitud en el punto  $P$ .

- ¿Has asistido a un circo o has visto un espectáculo circense en televisión o internet? ¿Qué acto te gusta de los que suelen representarse allí?
- ¿Qué forma tiene el anfiteatro de la figura?
- ¿Son los ángulos  $\sphericalangle RSM$  y  $\sphericalangle RPM$  centrales o inscritos?, ¿o son de otro tipo?
- ¿El iluminador tendrá que abrir más los focos de su equipo o cerrarlos más cuando se traslade del punto  $S$  al punto  $P$ ?
- ¿Crees que se cumple  $\alpha = 2\beta$  en esta situación? Compara tu respuesta con la del resto de tu curso y coméntenla.

Esquema del anfiteatro



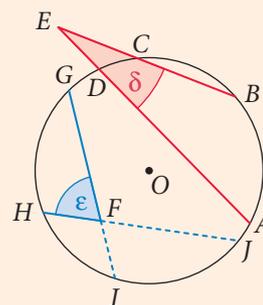
Lee una reseña del circo tradicional chileno en <https://bit.ly/40LwJME>  
¿Qué atractivos tiene el circo para ti?



## « Ángulo interior y ángulo exterior

En una **circunferencia** de centro  $O$  se definen ángulos interiores y exteriores.

- **Ángulo interior:** su vértice se encuentra dentro de la región acotada por la circunferencia y sus lados son secantes a ella.
- **Ángulo exterior:** su vértice se encuentra fuera de la región acotada por la circunferencia y sus lados son secantes o tangentes a ella.



- 1 ¿Cuál de los ángulos de la figura es interior, el rojo o el azul?, ¿y exterior?
- 2 ¿La medida del ángulo  $\sphericalangle IFJ$  de la figura es  $\epsilon$  o  $(180^\circ - \epsilon)$ ?, ¿cómo lo sabes?

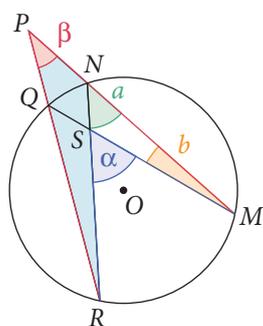
Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/s9w6FwzA> y puedes visualizar el ángulo interior y exterior.

### EJEMPLO 4 » Relación entre las medidas de un ángulo interior y de los arcos que determina.

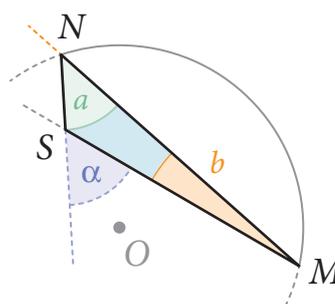
En la situación del anfiteatro, ¿cómo puede determinarse la medida  $\alpha$  del  $\sphericalangle RSM$  que formarán los dos focos del equipo de alumbrado en el punto  $S$ ?

#### Paso a Paso

1. Representa gráficamente la situación.



Zoom del triángulo  $MNS$ .



2. Relaciona las medidas  $a$  y  $b$  con las medidas angulares de los arcos que determinan los ángulos.

Dado que la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia equivale a la mitad de la medida angular del arco que determina, entonces, las medidas  $a$  y  $b$  de los ángulos  $\sphericalangle RNM$  y  $\sphericalangle NMQ$ , respectivamente, son

$$a = \frac{m(\widehat{RM})}{2}$$

$$b = \frac{m(\widehat{NQ})}{2}$$

3. Determina el valor de  $\alpha$  para responder.

Como el  $\sphericalangle RSM$  es exterior al triángulo  $MNS$  y los ángulos  $\sphericalangle RNM$  y  $\sphericalangle NMQ$  son interiores no adyacentes a él, se cumple lo siguiente:

$$\sphericalangle \alpha = a + b = \frac{m(\widehat{RM})}{2} + \frac{m(\widehat{NQ})}{2} = \frac{m(\widehat{RM}) + m(\widehat{NQ})}{2}$$

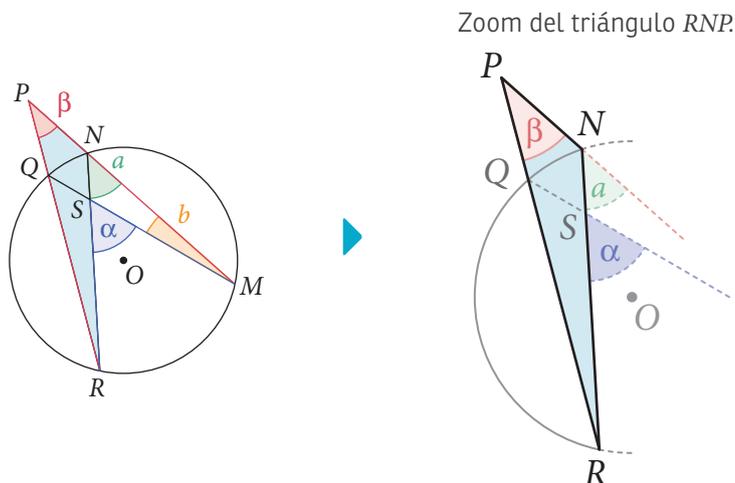
- 3 ¿Cómo se relacionan la medida de un ángulo interior cuyo vértice se encuentra en el centro de la circunferencia y la medida de un ángulo central que determina el mismo arco? Expliquen.

### EJEMPLO 5 >> Relación entre las medidas de un ángulo exterior y de los arcos que determina.

¿Cómo puede determinarse la medida  $\beta$  del  $\sphericalangle RPM$  que formarán los dos focos del equipo de alumbrado en el punto  $P$ ?

#### Paso a Paso

1. Representa gráficamente la situación.



Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/VYsqaefUF> y puedes visualizar el ángulo interior y exterior.

2. Escribe nuevamente las expresiones de las medidas  $a$  y  $b$  en función de las medidas angulares de los arcos que subtenden los ángulos.

$$a = \frac{m(\widehat{RM})}{2}$$

$$b = \frac{m(\widehat{NQ})}{2}$$

3. Relaciona el valor de  $\beta$  con las expresiones de  $a$  y  $b$  anteriores.

Observa el triángulo  $RNP$  en la representación gráfica inicial. En él, el  $\sphericalangle NRP$  inscrito en la circunferencia mide  $b$ , ya que determina el mismo arco que el  $\sphericalangle NMQ$ . Entonces, en el triángulo  $RNP$  se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \beta + b + (180^\circ - a) &= 180^\circ \\ \beta + b + 180^\circ - a - 180^\circ &= 180^\circ - 180^\circ \\ \beta + b - a &= 0^\circ \\ \beta &= a - b \end{aligned}$$

4. Reemplaza los valores de  $a$  y  $b$  y responde.

$$\beta = a - b = \frac{m(\widehat{RM})}{2} - \frac{m(\widehat{NQ})}{2} = \frac{m(\widehat{RM}) - m(\widehat{NQ})}{2}$$

### << Relación entre la medida de los ángulos interior y exterior, y la de los arcos que determinan

En una circunferencia se cumplen las siguientes relaciones:

- La medida de un ángulo interior a ella, expresada en grados sexagesimales, corresponde a la semisuma de **las medidas angulares de los arcos que determina**.
- La medida de un ángulo exterior, expresada en grados sexagesimales, corresponde a la semidiferencia positiva de **las medidas angulares de los arcos que determina**.



## « Ángulos semiinscritos y exinscritos y sus medidas

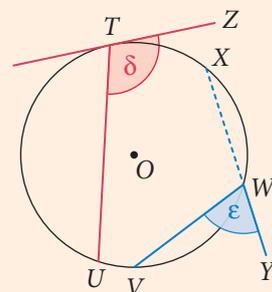
En una circunferencia de centro  $O$  se definen ángulos semiinscritos y exinscritos.

- **Ángulo semiinscritos:** su vértice es un punto de la circunferencia (llamado punto de tangencia) y sus lados son una tangente y una secante a ella. En la figura, la medida del ángulo semiinscritos  $\sphericalangle UTZ$  se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$$\delta = \frac{m(\widehat{UT})}{2}$$

- **Ángulo exinscritos:** su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son una secante a ella y la prolongación de una de sus cuerdas. En la figura, la medida del ángulo exinscritos  $\sphericalangle VWY$  se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$$\epsilon = \frac{m(\widehat{VX})}{2}$$

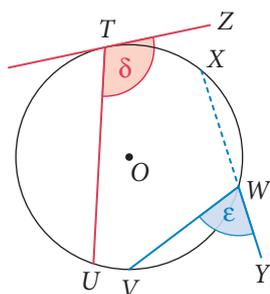


Los arcos  $\widehat{UT}$  y  $\widehat{VX}$  se miden en el sentido  $O$ .

- 4 ¿Son iguales las medidas angulares de los arcos  $\widehat{UT}$  y  $\widehat{TU}$ ? Explica.

### EJEMPLO 6 » Cálculo de las medidas de los ángulos semiinscritos y exinscritos.

¿Cuáles son las medidas  $\delta$  y  $\epsilon$  de los ángulos  $\sphericalangle UTZ$  y  $\sphericalangle VWY$ , respectivamente, en la siguiente circunferencia en que se indican las medidas angulares de algunos de sus arcos?



$$m(\widehat{UV}) = 20^\circ$$

$$m(\widehat{VW}) = 75^\circ$$

$$m(\widehat{WX}) = 60^\circ$$

$$m(\widehat{XT}) = 55^\circ$$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/JVuSdzfz> y puedes visualizar los ángulos estudiados.

#### Paso a Paso

1. Determina las medidas angulares de los arcos  $\widehat{UT}$  y  $\widehat{VX}$ .

$$m(\widehat{UT}) = m(\widehat{UV}) + m(\widehat{VW}) + m(\widehat{WX}) + m(\widehat{XT}) = 20^\circ + 75^\circ + 60^\circ + 55^\circ = 210^\circ$$

$$m(\widehat{VX}) = m(\widehat{VW}) + m(\widehat{WX}) = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ$$

2. Aplica las fórmulas para determinar los valores de  $\delta$  y  $\epsilon$ .

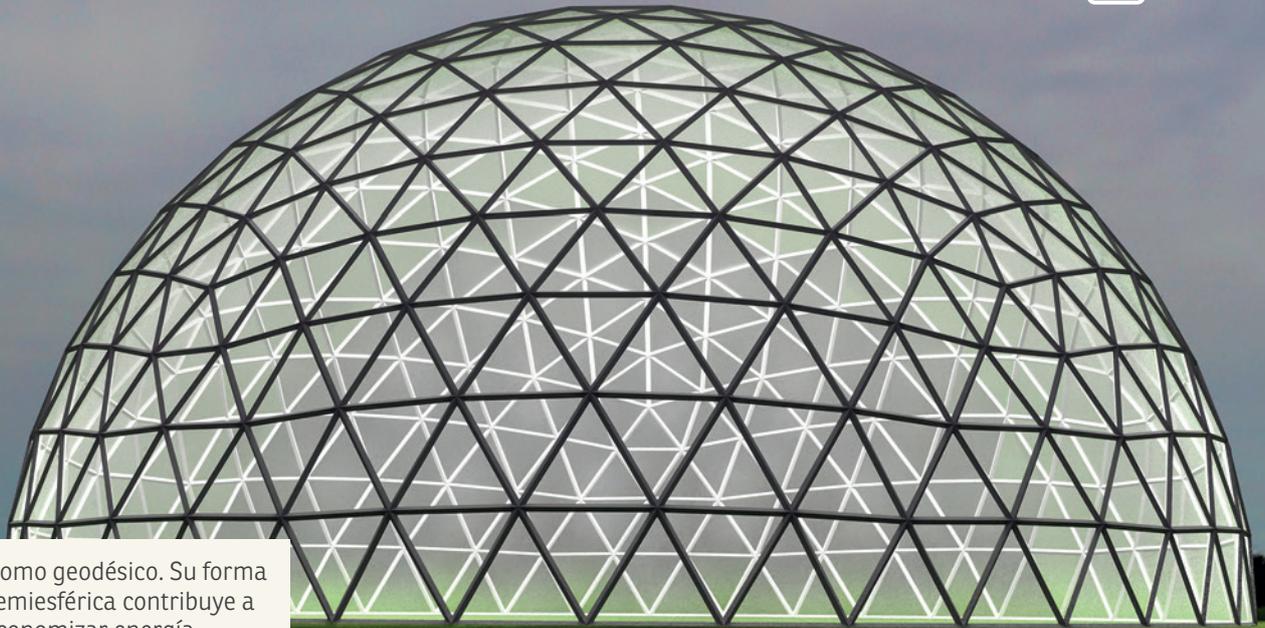
$$\delta = \frac{m(\widehat{UT})}{2} = \frac{210^\circ}{2} = 105^\circ$$

$$\epsilon = \frac{m(\widehat{VX})}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ$$

3. Responde.

La medida del ángulo semiinscritos  $\sphericalangle UTZ$  es  $105^\circ$  y la del ángulo exinscritos  $\sphericalangle VWY$ ,  $67,5^\circ$ .

- 5 ¿Cómo podrían obtener el valor de  $\epsilon$  considerando que el ángulo  $\sphericalangle XWV$  está inscrito en la circunferencia y determina el arco  $\widehat{XV}$ ? Expliquen.



Domo geodésico. Su forma semiesférica contribuye a economizar energía.

↑ Cúpula geodésica, ilustración.

GettyImages/ROBERT BROOK/SCIENCE PHOTO LIBRARY

Las construcciones sustentables son estructuras planificadas, diseñadas y construidas para aprovechar los recursos naturales y generar un menor impacto en el medioambiente y en la salud de las personas. Sus principales características son las siguientes:

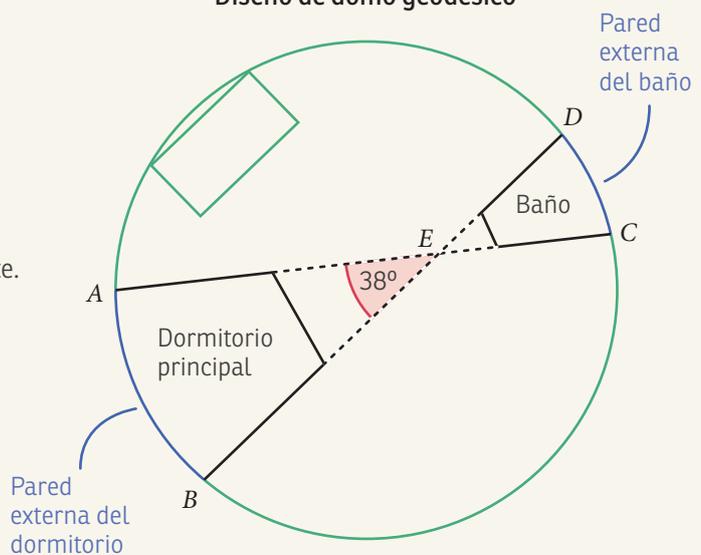
- Reutilizan el agua.
- Ahorran energía.
- Usan la energía solar.
- Juntan agua de lluvia.
- Reciclan materiales.
- Emplean materiales amigables con el medioambiente.
- Utilizan materiales no tóxicos.

Un domo geodésico es una de las estructuras más fuertes y versátiles que existen y utiliza los recursos naturales y la luz solar. Es amigable con el entorno natural y representa una fuerte economía en el sistema de calefacción debido a que los flujos interiores de aire son circulares y, por lo tanto, fáciles de calefactar. Además, esta estructura conserva en su interior una temperatura estable.

### Apliquemos lo estudiado

Una empresa constructora está diseñando un domo geodésico cuyo diámetro mide 12 m. A continuación, se muestran algunas de sus secciones y medidas:

Diseño de domo geodésico



Fuente: Sánchez, A. (s.f.). ¿Qué son las construcciones sustentables? Klarea. <https://www.klarea.mx/blog/que-son-las-construcciones-sustentables>

### EJEMPLO 7 >> Cálculo de la longitud de uno de los arcos que determina un ángulo interior.

¿Cuál es la longitud de la pared externa del baño si la de la pared del dormitorio principal es 5,23 m?

#### Paso a Paso

1. Relaciona los elementos del diseño con los de una circunferencia.

- $\sphericalangle AEB$  ▶ ángulo interior.
- $\widehat{AB}$  y  $\widehat{CD}$  ▶ arcos de circunferencia determinados por el  $\sphericalangle AEB$  y  $\sphericalangle CED$ .
- Longitud del arco  $\widehat{AB}$  ▶ 5,23 m

2. Calcula el perímetro  $P$  de la circunferencia.

Considerando la medida del radio de la circunferencia  $r = 6$  m y la aproximación  $\pi \approx 3,14$ , queda:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot r \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \text{ m} = 37,68 \text{ m}$$

3. Calcula la medida angular del arco  $\widehat{AB}$ .

Utilizando la longitud del arco  $\widehat{AB}$  y el perímetro de la circunferencia, se puede aplicar una proporción:

$$\frac{m(\widehat{AB})}{360^\circ} = \frac{5,23 \text{ m}}{37,68 \text{ m}} \quad \triangleright \quad m(\widehat{AB}) = \frac{360^\circ \cdot 5,23 \text{ m}}{37,68 \text{ m}} \approx 50^\circ$$

4. Calcula la medida angular del arco  $\widehat{CD}$ .

Como el  $\sphericalangle AEB$  es interior y determina los arcos  $\widehat{AB}$  y  $\widehat{CD}$ , se aplica la fórmula correspondiente:

$$38^\circ = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2} \quad \triangleright \quad m(\widehat{CD}) \approx 2 \cdot 38^\circ - 50^\circ = 76^\circ - 50^\circ = 26^\circ$$

5. Calcula la longitud  $x$  del arco  $\widehat{CD}$ .

Utilizando la medida angular del arco y el perímetro de la circunferencia, se aplica una proporción:

$$\begin{aligned} \frac{26^\circ}{360^\circ} &\approx \frac{x}{37,68 \text{ m}} \\ x &\approx \frac{26^\circ \cdot 37,68 \text{ m}}{360^\circ} \\ &\approx 2,72 \text{ m} \end{aligned}$$

6. Responde.

La longitud de la pared externa del baño es 2,72 m, aproximadamente.

- 6  Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/N6Au35qb> y puedes acceder a un simulador virtual para comprender de mejor forma lo estudiado.



#### Para terminar la Lección 5...

- ¿Qué objetos con forma de circunferencia observas a tu alrededor?, ¿abundan o más bien escasean?
- ¿Qué herramientas tecnológicas o manuales puedes utilizar para comprobar los resultados obtenidos?
- ¿Cómo pueden ayudarte a resolver problemas geométricos las relaciones entre ángulos en una circunferencia?

# Resolución de problemas de segmentos en circunferencias

## Calculando la longitud de cuerdas

El tratamiento de aguas residuales consiste en una serie de procesos físicos, químicos y biológicos aplicados para remover los contaminantes presentes en el agua desechada, cuyo origen puede ser domiciliario, agrícola, industrial, etc. Una de las operaciones incluidas en el tratamiento de aguas residuales es la de sedimentación, que se realiza en tanques de diversas formas. En el de la imagen, cuyo diámetro mide 14 m, se están instalando dos andamios rectos para la circulación del personal de la planta. El andamio  $\overline{AB}$  ya está terminado y se necesita averiguar la longitud del tramo que falta para completar el andamio  $\overline{CD}$ .

- ¿Por qué crees que es importante eliminar los contaminantes de las aguas residuales? ¿Qué efectos nocivos podría tener descargar aguas residuales no depuradas en masas de agua natural?
- Considerando la información que se entrega, ¿crees que es posible conocer la longitud del tramo que falta para completar el andamio  $\overline{CD}$ ? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuánto podría medir el tramo faltante  $\overline{DE}$  del andamio? Propón un valor y compáralo con los que sugieran tus compañeros y compañeras.

Datos:

$$m(\overline{AE}) = 5 \text{ m}$$

$$m(\overline{BE}) = 8 \text{ m}$$

$$m(\overline{CE}) = 9,6 \text{ m}$$

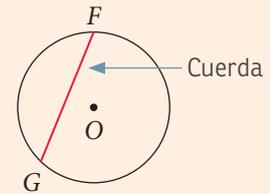
↓ Planta de tratamiento de aguas residuales.



GettyImages/Kuzihar

## « Cuerda

Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos diferentes de una circunferencia. En la circunferencia de centro  $O$  de la imagen,  $\overline{FG}$  es una cuerda.



- 1 ¿Puede una cuerda de una circunferencia ser un radio de ella?, ¿y ser un diámetro?, ¿por qué?
- 2 ¿Cuál es la longitud máxima de una cuerda en una circunferencia cuyo radio mide 3,5 cm?, ¿por qué?

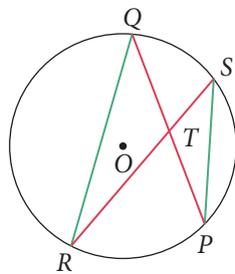
### EJEMPLO 1 >> Relación entre las longitudes de los segmentos en dos cuerdas que se intersecan.

¿Qué relación matemática existe entre las medidas de los segmentos que quedan determinados en dos cuerdas que se intersecan en una circunferencia?

#### Paso a Paso

1. Considera las cuerdas  $\overline{PQ}$  y  $\overline{RS}$  que se intersecan en la circunferencia de centro  $O$  de la figura y traza los segmentos  $\overline{PS}$  y  $\overline{RQ}$ .

En la figura se cumplen las siguientes relaciones de congruencia ( $\cong$ ):



$$\begin{aligned} \sphericalangle RSP &\cong \sphericalangle RQP \\ \sphericalangle SRQ &\cong \sphericalangle SPQ \\ \sphericalangle PTS &\cong \sphericalangle QTR \end{aligned}$$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/aBkw2cGu> y puedes visualizar la relación entre las longitudes de los segmentos en dos cuerdas que se intersecan.

2. Determina la relación que existe entre los triángulos  $PST$  y  $RQT$ .

De acuerdo con el criterio AA (Ángulo-Ángulo) de semejanza de triángulos, se puede afirmar que los triángulos  $PST$  y  $RQT$  son semejantes, es decir, que

$$\Delta PST \sim \Delta RQT$$

De esta semejanza se pueden deducir relaciones matemáticas entre las medidas de los lados de los triángulos. Una de ellas es

$$\frac{m(\overline{QT})}{m(\overline{RT})} = \frac{m(\overline{ST})}{m(\overline{PT})}$$

3. Responde.

La relación matemática entre las medidas de los segmentos que quedan determinados en dos cuerdas que se intersecan en una circunferencia es

$$m(\overline{QT}) \cdot m(\overline{PT}) = m(\overline{RT}) \cdot m(\overline{ST})$$

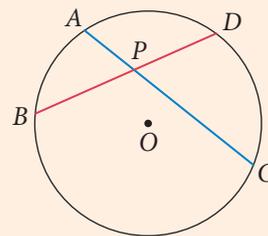
- 3 ¿Qué establece el criterio AA de semejanza de triángulos? Explica.
- 4 ¿Cómo se justifican las relaciones de congruencia  $\sphericalangle RSP \cong \sphericalangle RQP$ ,  $\sphericalangle SRQ \cong \sphericalangle SPQ$  y  $\sphericalangle PTS \cong \sphericalangle QTR$ ? Explica cada una de ellas.

## « Teorema de las cuerdas

Si en una circunferencia dos cuerdas se intersectan, el producto de las medidas de los segmentos que quedan definidos en cada una es el mismo.

En la figura, se cumple lo siguiente:

$$m(\overline{AP}) \cdot m(\overline{CP}) = m(\overline{BP}) \cdot m(\overline{DP})$$



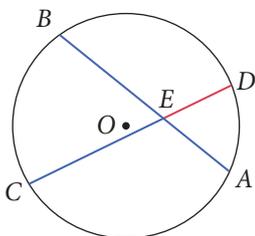
- 5 ¿A qué elementos de la circunferencia corresponderían las cuerdas y los segmentos que determinan si la intersección ocurriera en su centro?

### EJEMPLO 2 » Cálculo de la medida de un segmento usando el teorema de las cuerdas.

¿Cuál es la medida del tramo  $\overline{DE}$  del andamio en la situación inicial del tanque de sedimentación?

#### Paso a Paso

1. Representa gráficamente la situación y escribe las medidas de los segmentos.



La medida del segmento  $\overline{AE}$  es igual a 5 metros.

La medida del segmento  $\overline{BE}$  es igual a 8 metros.

La medida del segmento  $\overline{CE}$  es igual a 9,6 metros.

La medida del segmento  $\overline{DE}$  es desconocida.

2. Aplica el teorema de las cuerdas, reemplaza los datos y calcula.

$$m(\overline{AE}) \cdot m(\overline{BE}) = m(\overline{CE}) \cdot m(\overline{DE})$$

$$5 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} = 9,6 \text{ m} \cdot m(\overline{DE})$$

$$40 \text{ m}^2 = 9,6 \text{ m} \cdot m(\overline{DE})$$

$$4,1\overline{6} \text{ m} = m(\overline{DE})$$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/ynkyfHvn> y puedes visualizar el teorema de las cuerdas.

3. Responde redondeando a la décima el resultado.

El tramo  $\overline{DE}$  del andamio mide 4,2 m, aproximadamente.

- 6 Teniendo en consideración las medidas de los andamios  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ , ¿cuál de ellos pasa más cerca del centro del tanque?, ¿cómo lo saben?

- 7 ¿Qué otra aplicación podría tener el teorema de las cuerdas? Observen un video conectándose a <https://bit.ly/43c6PDu> y describan el planteamiento del problema que se propone, la estrategia aplicada para resolverlo y su solución.



U3\_ACT\_8  
U3\_VID\_12

## » Una plaza inclusiva para eliminar barreras

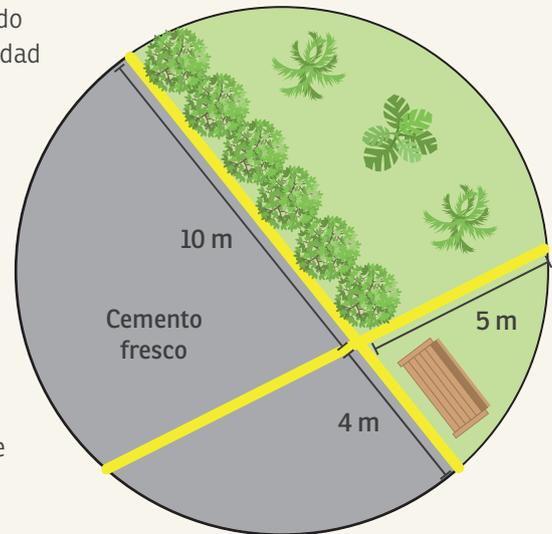
### Educación Física y Salud

Una plaza inclusiva incorpora desde su diseño el concepto de inclusión. Su objetivo principal es posibilitar que usuarios de todas las capacidades se desarrollen física, cognitiva, social y emocionalmente, brindando desafíos y experiencias adecuados para todos los niveles de habilidad e interés.

### Apliquemos lo estudiado

Un grupo de estudiantes está habilitando una plaza inclusiva en el interior de su colegio. La forma del diseño es circular y se encuentra dividida en cuatro sectores, como se muestra en la imagen adjunta. Las líneas divisorias se trazarán con ligustrinas que se plantarán cada 50 cm.

Como es necesario calcular la cantidad de ligustrinas que necesitarán para la demarcación y el cemento de dos de los sectores todavía está fresco, solo pudieron medir directamente la longitud de tres de los cuatro segmentos que sembrarán.

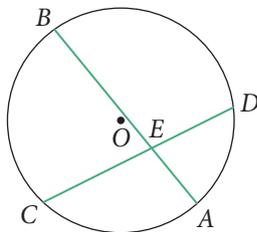


### EJEMPLO 3 » Uso del teorema de las cuerdas para resolver un problema.

¿Cuál es la medida del segmento desconocido de la plaza?

#### Paso a Paso

1. Representa gráficamente la situación y escribe las medidas de los segmentos.



La medida del segmento  $\overline{AE}$  es igual a 4 metros.

La medida del segmento  $\overline{BE}$  es igual a 10 metros.

La medida del segmento  $\overline{DE}$  es igual a 5 metros.

La medida del segmento  $\overline{CE}$  es desconocida.

2. Aplica el teorema de las cuerdas y resuelve.

$$\begin{aligned}m(\overline{AE}) \cdot m(\overline{BE}) &= m(\overline{CE}) \cdot m(\overline{DE}) \\4 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} &= m(\overline{CE}) \cdot 5 \text{ m} \\40 \text{ m}^2 &= m(\overline{CE}) \cdot 5 \text{ m} \\8 \text{ m} &= m(\overline{CE})\end{aligned}$$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/PKNFPukz> y puedes visualizar una actividad relacionada con el teorema de las cuerdas.

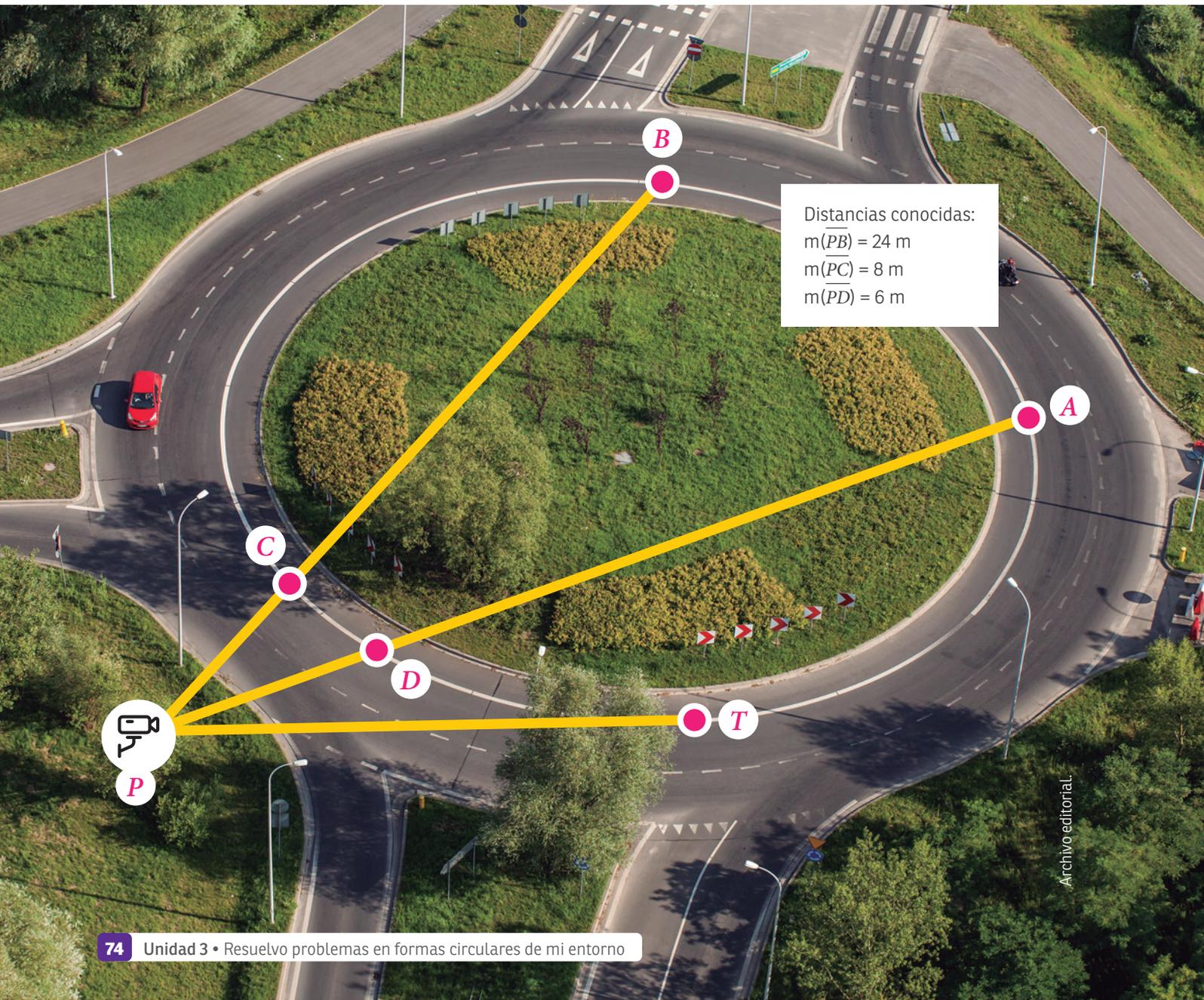
3. Responde.

La medida del segmento desconocido es 8 m.

## Calculando la longitud de secantes y tangentes

En el punto  $P$ , ubicado junto a una rotonda, se instalará un radar de tránsito estacionario para controlar la velocidad de circulación de los vehículos que la transitan. En la imagen se destacan 5 puntos estratégicos de la construcción vial.

- ¿Pasas a diario por alguna rotonda? ¿Qué forma tienen?
- ¿Qué condiciones debe tener el tránsito en un lugar para justificar la construcción de una rotonda?
- De acuerdo con la imagen, ¿crees que el punto  $A$  está más lejos o más cerca del radar que el punto  $B$ ? ¿En qué basas tu respuesta?
- Intuitivamente, ¿piensas que es posible calcular la distancia del punto  $T$  al radar relacionándola matemáticamente con las distancias conocidas? ¿Cómo podrías hacerlo? Argumenta.

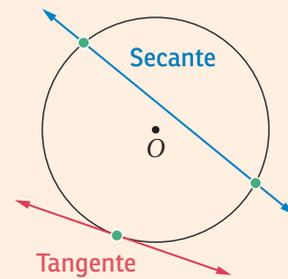


## « Secantes y tangentes

Una recta es **secante** a una circunferencia si tiene dos puntos en común con ella.

Una recta es **tangente** a una circunferencia si tiene un punto en común con ella.

En la circunferencia de centro  $O$  de la figura, se muestran una recta secante y una tangente a ella.



- 1 Si seleccionas dos puntos de una circunferencia, ¿cuántas rectas secantes diferentes que pasen por ellos puedes trazar?
- 2 En la situación de la rotonda, ¿el segmento  $\overline{PT}$  es secante o tangente a la circunferencia?, ¿y el segmento  $\overline{PA}$ ?

### EJEMPLO 4 » Relación entre las longitudes de los segmentos determinados en dos secantes.

¿Cuál es la medida del segmento secante  $\overline{PA}$  en la situación de la rotonda?

#### Paso a Paso

1. Representa y analiza la geometría de la rotonda considerando las secantes  $\overline{PB}$  y  $\overline{PA}$ .

Dibuja los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{DB}$  que definen los triángulos  $PAC$  y  $PBD$  y constata la siguiente relación de congruencia entre ángulos:

$$\sphericalangle PAC \cong \sphericalangle PBD$$

Esta relación se verifica porque ambos son ángulos inscritos y determinan el mismo arco de circunferencia  $\widehat{CD}$ .

2. Determina la relación que existe entre los triángulos  $PAC$  y  $PBD$ .

Como el ángulo  $\sphericalangle APB$  (de medida  $\epsilon$ ) es común a ambos triángulos y de acuerdo con el criterio AA (Ángulo-Ángulo) de semejanza de triángulos, se puede afirmar que los triángulos  $PAC$  y  $PBD$  son semejantes, es decir, que  $\Delta PAC \sim \Delta PBD$ .

De esta relación se pueden deducir relaciones matemáticas entre las medidas de los lados de los triángulos. Una de ellas es

$$\frac{m(\overline{PA})}{m(\overline{PB})} = \frac{m(\overline{PC})}{m(\overline{PD})} \Leftrightarrow m(\overline{PA}) \cdot m(\overline{PD}) = m(\overline{PB}) \cdot m(\overline{PC})$$

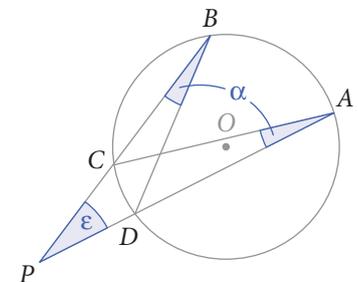
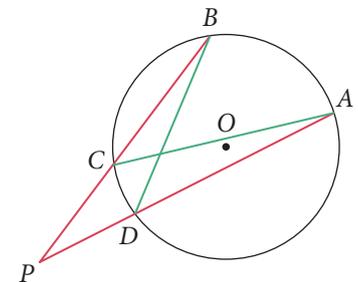
3. Reemplaza los valores conocidos en la segunda expresión anterior.

Las medidas conocidas son  $m(\overline{PB}) = 24$  m,  $m(\overline{PC}) = 8$  m y  $m(\overline{PD}) = 6$  m.

$$m(\overline{PA}) = \frac{m(\overline{PC}) \cdot m(\overline{PB})}{m(\overline{PD})} = \frac{8 \text{ m} \cdot 24 \text{ m}}{6 \text{ m}} = 32 \text{ m}$$

4. Responde.

La medida del segmento  $\overline{PA}$  es 32 m.



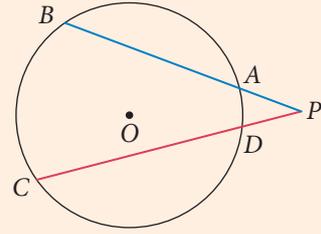
Ingresar a <https://www.geogebra.org/m/SXfChG2m> y puedes visualizar la posición relativa de rectas y circunferencias.

- 3 ¿Cómo podrían calcular la longitud del segmento  $\overline{DA}$  en la situación de la rotonda? Expliquen a través de una secuencia de pasos.

## « Teorema de las secantes

Si desde un punto exterior se trazan hacia una circunferencia dos secantes no paralelas entre sí, se cumple que el producto de la longitud de una de las secantes por la longitud de su segmento externo es igual al producto de la longitud de la otra secante por la longitud de su segmento externo.

En la figura, se cumple lo siguiente:  $m(\overline{PB}) \cdot m(\overline{PA}) = m(\overline{PC}) \cdot m(\overline{PD})$



## EJEMPLO 5 » Relación entre las longitudes de los segmentos determinados en una secante y una tangente.

¿Cuál es la medida del segmento tangente  $\overline{PT}$  en la situación de la rotonda?

### Paso a Paso

1. Representa y analiza la geometría de la rotonda considerando los segmentos  $\overline{PT}$  y  $\overline{PB}$ .

Dibuja los segmentos  $\overline{TB}$  y  $\overline{CT}$  que definen los triángulos  $PTB$  y  $PCT$  y constata la siguiente relación de congruencia entre ángulos:

$$\sphericalangle PBT \cong \sphericalangle PTC$$

Esta relación se verifica porque el  $\sphericalangle PBT$  es inscrito y el  $\sphericalangle PTC$  es semiinscrito, y ambos determinan el mismo arco de circunferencia  $\widehat{CT}$ .

2. Determina la relación que existe entre los triángulos  $PTB$  y  $PCT$ .

De acuerdo con el criterio AA (Ángulo-Ángulo) de semejanza de triángulos, se cumple que  $\Delta PTB \sim \Delta PCT$ .

De esta relación se puede deducir la siguiente igualdad:

$$\frac{m(\overline{PT})}{m(\overline{PB})} = \frac{m(\overline{PC})}{m(\overline{PT})} \Leftrightarrow [m(\overline{PT})]^2 = m(\overline{PC}) \cdot m(\overline{PB})$$

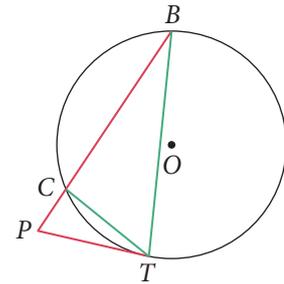
3. Reemplaza los valores conocidos en la segunda expresión anterior. Se considerará como medida "u".

Las medidas conocidas son  $m(\overline{PB}) = 24$  u y  $m(\overline{PC}) = 8$  u.

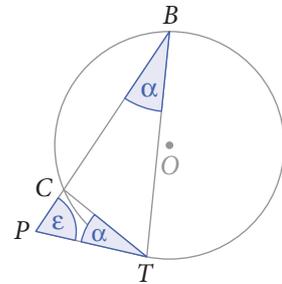
$$[m(\overline{PT})]^2 = 8 \text{ u} \cdot 24 \text{ u} \Leftrightarrow m(\overline{PT}) = \sqrt{8 \text{ u} \cdot 24 \text{ u}} = \sqrt{192} \text{ u}$$

4. Responde. Redondea tu resultado a la centésima.

La medida del segmento  $\overline{PT}$  es 13,86 u, aproximadamente.



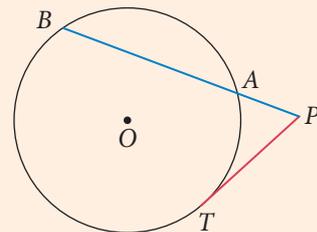
Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/HhWquTAX> y puedes visualizar una actividad relacionada con lo estudiado.



## « Teorema de la secante y la tangente

Si desde un punto exterior se trazan una tangente y una secante a una circunferencia, se cumple que el producto de la longitud de la secante por la longitud de su segmento externo es igual al cuadrado de la longitud de la tangente.

En la figura, se cumple lo siguiente:  $m(\overline{PB}) \cdot m(\overline{PA}) = [m(\overline{PT})]^2$



## » Principio de progresión en la práctica de un deporte

### Educación Física y Salud

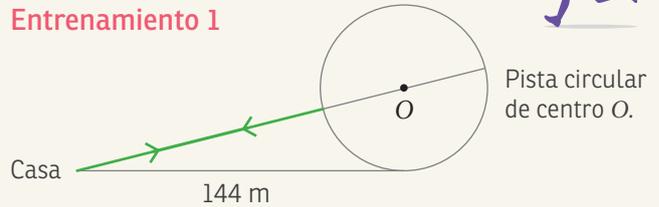
El principio de progresión aplicado a un corredor puede consistir en aumentar gradualmente la distancia recorrida en los entrenamientos y, en una etapa más avanzada, incrementar progresivamente la rapidez de la zancada.

#### Apliquemos lo estudiado

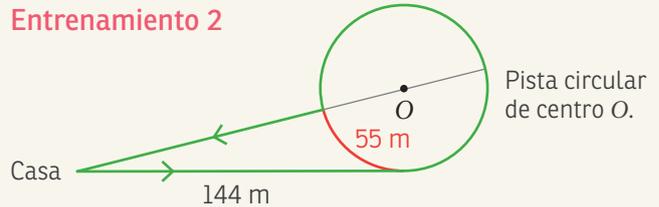
Omar comenzará a correr para mejorar su estado físico. Sus entrenamientos comienzan desde su casa en dirección a una pista circular cuyo radio mide 42 m y los ha planificado de manera de empezar cubriendo distancias cortas para luego ir aumentándolas gradualmente. Sus dos primeros entrenamientos se muestran en la imagen adjunta.

#### Circuito de entrenamiento de Omar

##### Entrenamiento 1



##### Entrenamiento 2



### EJEMPLO 6 » Uso del teorema de la secante y la tangente para resolver un problema.

¿Cuál fue la diferencia entre las distancias recorridas por Omar en sus dos primeros entrenamientos?

#### Paso a Paso

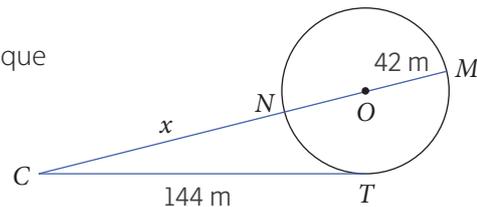
1. Representa gráficamente la situación, calcula el perímetro  $P$  (redondeado a la unidad) de la circunferencia usando  $\pi \approx 3,14$  y determina la medida  $x$  del segmento externo de la secante.

$$P = 2 \cdot \pi \cdot 42 \text{ m} \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 42 \text{ m} = 263,76 \text{ m} \approx 264 \text{ m}$$

Según el teorema de la secante y la tangente, se cumple que

$$\begin{aligned} x \cdot (84 + x) &= 144^2 \\ 84x + x^2 &= 20736 \\ x^2 + 84x - 20736 &= 0 \\ (x + 192)(x - 108) &= 0 \end{aligned}$$

Como  $x$  representa una distancia, se debe considerar solo su valor positivo  $x = 108$ .



2. Determina las distancias  $d_1$  y  $d_2$  recorridas en los entrenamientos 1 y 2, respectivamente.

$$\begin{aligned} d_1 &= 108 \text{ m} + 108 \text{ m} = 216 \text{ m} & d_2 &= 144 \text{ m} + P - 55 \text{ m} + 108 \text{ m} \\ & & &\approx 144 \text{ m} + 264 \text{ m} - 55 \text{ m} + 108 \text{ m} = 461 \text{ m} \end{aligned}$$

3. Responde.

La diferencia aproximada entre las distancias recorridas fue  $d_1 - d_2 = 461 \text{ m} - 216 \text{ m} = 245 \text{ m}$ .

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/dsC6S9tG> y puedes visualizar una actividad relacionada con lo estudiado.

### Para terminar la Lección 6...

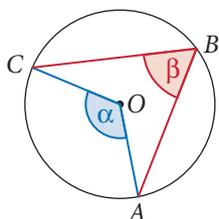
- ¿Qué problemas concretos podrías resolver aplicando los teoremas estudiados en la lección?
- ¿Cómo te ayudó el trabajo colaborativo para resolver los problemas planteados?
- ¿De qué manera apoyaron tu trabajo las representaciones gráficas?

# Síntesis de Unidad 3

## LECCIÓN 5 >> Resolución de problemas de ángulos en circunferencias

### Aprendiste...

#### Ángulo central y ángulo inscrito



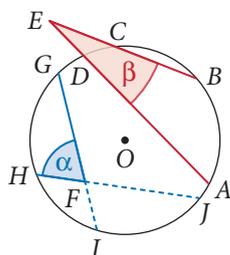
En la circunferencia de centro  $O$  se cumple que:

- $\sphericalangle CBA$  es inscrito.
- $\sphericalangle COA$  es central.

$$\alpha = m(\widehat{CA}) = 2\beta$$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/Wj7d4DRf> para visualizar lo estudiado.

#### Ángulo interior y ángulo exterior



En la circunferencia de centro  $O$  se cumple que:

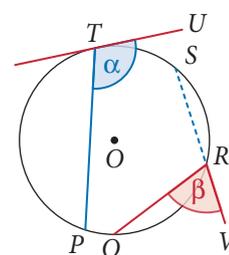
- $\sphericalangle AEB$  es exterior.
- $\sphericalangle GFH$  es interior.

$$\alpha = \frac{m(\widehat{GH}) + m(\widehat{IJ})}{2}$$

$$\beta = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/s9w6FwzA> para visualizar lo estudiado.

#### Ángulos semiinscritos y exinscritos



En la circunferencia de centro  $O$  se cumple que:

- $\sphericalangle PTU$  es semiinscrito.
- $\sphericalangle QRV$  es exinscrito.

$$\alpha = \frac{m(\widehat{PT})}{2}$$

$$\beta = \frac{m(\widehat{QS})}{2}$$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/JVuSdzfz> para visualizar lo estudiado.

### ¿Cómo harás para recordar estas relaciones métricas?

### Aplicaste...

- Relaciones métricas entre ángulos y arcos de una circunferencia para construir y evaluar estrategias colaborativas de resolución de problemas.
- Diversas representaciones de ángulos y arcos de una circunferencia para verificar y justificar las relaciones métricas establecidas entre ellos.



¿Frente a qué tipo de problemas puede ser beneficioso trabajar de forma colaborativa?



¿De qué otra manera justificarías las relaciones establecidas?

### Desarrollaste...

Tus aprendizajes y la resolución de problemas utilizando las herramientas disponibles.

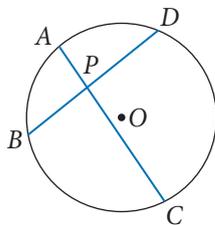


¿Qué piensas acerca del uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje?

## LECCIÓN 6 >> Resolución de problemas de segmentos en circunferencias

### Aprendiste...

#### Teorema de las cuerdas

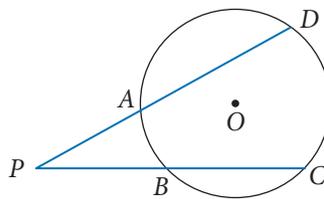


En la circunferencia de centro  $O$  se cumple que:

- $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  son cuerdas.
- $m(\overline{AP}) \cdot m(\overline{CP}) = m(\overline{BP}) \cdot m(\overline{DP})$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/ynkyfHvn> para visualizar lo estudiado.

#### Teorema de las secantes

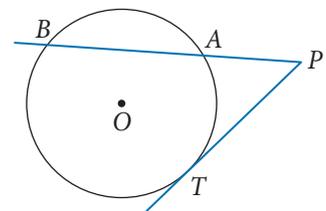


En la circunferencia de centro  $O$  se cumple que:

- $\overline{PD}$  y  $\overline{PC}$  son secantes.
- $m(\overline{PA}) \cdot m(\overline{PD}) = m(\overline{PB}) \cdot m(\overline{PC})$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/HhWquTAX> para visualizar lo estudiado.

#### Teorema de la secante y la tangente



En la circunferencia de centro  $O$  se cumple que:

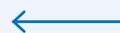
- $\overline{PT}$  es tangente en el punto  $T$ .
- $\overline{PB}$  es secante.
- $[m(\overline{PT})]^2 = m(\overline{PB}) \cdot m(\overline{PA})$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/dsC6S9tG> para visualizar lo estudiado.

¿Cuál de estos teoremas te pareció más complicado de aplicar?, ¿por qué?

### Aplicaste...

- Relaciones métricas entre segmentos de una circunferencia para emplear estrategias de resolución de problemas.
- Argumentos matemáticos para evaluar las relaciones métricas establecidas entre los segmentos de una circunferencia.



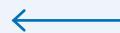
¿Qué pasos seguiste para resolver los problemas propuestos?



¿Qué dificultades tuviste para aplicar las relaciones métricas establecidas?

### Desarrollaste...

Flexibilidad para resolver problemas en la circunferencia y para reelaborar estrategias personales.



¿Qué ejemplos podrías nombrar que muestren la presencia en ti de esta actitud?



U3\_ACT\_12 a 17

---

## Unidad 1

### Tomo decisiones en el ámbito económico

Tasas de interés e índices económicos

1

---

## Unidad 2

### Construyo modelos para comprender mi entorno

Funciones potencia, seno y coseno

24

---

## Unidad 3

### Decido por mi salud y mi bienestar

Modelos binomial y normal

52



Texto del Estudiante

# MATEMÁTICA 4 MEDIO



Unidad

# 1

## Tomo decisiones en el ámbito económico

### Tasas de interés e índices económicos

- ¿Qué índices económicos conoces?
- ¿Cómo piensas que influye la economía del país en tu vida cotidiana?

### Buscando y utilizando herramientas digitales

Averigua en internet el valor en UF de una propiedad nueva o usada. Busca en la red un convertidor de UF a pesos y viceversa.

- ¿Cuál es el valor de la propiedad en UF y en pesos en el día de hoy?
- ¿Cuál será su valor en pesos en 30 días más?, ¿aumentará o disminuirá?, ¿por qué crees que ocurre esta variación?
- ¿Qué factores tendrías en cuenta si tuvieras que comprar la propiedad?, ¿por qué?



Getty/Imágenes/DEV IMAGES (editado)



Ingresa a <https://bit.ly/3yb7GpF> para ver la historia del dinero.

## Conocimientos previos

### Porcentaje (%)

Cantidad de partes que se consideran de las 100 partes iguales en que se divide un total. Se puede expresar como una fracción de denominador 100 o como una razón de consecuente 100.

### Variación porcentual

Describe la relación porcentual entre un valor inicial y uno final, expresado en términos del valor inicial.

### Interés simple

Variación en el tiempo de una cantidad de dinero que se puede expresar como un porcentaje de la cantidad inicial.

La fórmula para calcular el dinero existente  $C_n$  a partir de un monto inicial  $C_0$ , tras  $n$  periodos de vigencia de una tasa de interés simple  $i$  (interés expresado como decimal o fracción), es

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

### Interés compuesto

Variación en el tiempo de una cantidad de dinero en que se van sumando los intereses obtenidos en cada período, generando nuevos intereses.

La fórmula para calcular el dinero existente  $C_n$ , a partir de un monto inicial  $C_0$ , tras  $n$  periodos de vigencia de una tasa de interés compuesto  $r$  (interés expresado como decimal o fracción), es

$$C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n$$

# Toma de decisiones en mi economía personal

## Calculando el sueldo líquido

Fernando recibió su liquidación de sueldo. En ella se muestran los montos correspondientes a los sueldos base e imponible y los descuentos legales, tales como cotizaciones previsionales, de salud y el seguro de cesantía. Este documento que entrega el empleador al trabajador es el comprobante legal del pago del sueldo por su trabajo.

Empresa:	_____
RUT:	_____
Dirección:	_____
Fono:	_____

LIQUIDACIÓN DE SUELDO	
Trabajador:	Fernando
RUT:	12.345.678-9
Mes:	Agosto

HABERES		DESCUENTOS LEGALES	
1 Sueldo base	\$ 450 000	AFP	11,44 % \$ 64 350
2 Gratificación legal	\$ 112 500	Seg. cesantía	0,60 % \$ 3 375
Bonos producción	\$ -	Fonasa	7,00 % \$ 39 375
3 Sueldo imponible	\$ 562 500		\$ 107 100
Asig. familiar	\$ -		
Locomoción	\$ 30 000		
Colación	\$ 25 000		
Total Haberes	\$ 617 500	Total descuentos	\$ 107 100
		Sueldo líquido	\$ 510 400
		Anticipos	\$ -
		Líquido a pagar	\$ 510 400

Recibo y firma conforme

- ¿Por qué el sueldo líquido es menor que el sueldo imponible de Fernando?
- ¿Cómo se calculó el sueldo líquido de Fernando? Explica.
- ¿Cuánto dinero recibirá en definitiva Fernando de acuerdo con su liquidación de sueldo?
- Consigue una liquidación de sueldo e identifica sus principales elementos. ¿Cuál es el sueldo base que muestra?, ¿a cuánto ascienden los descuentos legales?, ¿cuál es el sueldo líquido?

1

**Sueldo base:** monto de dinero fijo que recibe el trabajador por los servicios prestados.

2

**Gratificación legal:** monto de dinero que corresponde a una parte de las utilidades con que el empleador beneficia al trabajador.

3

**Total imponible:** ingreso sobre el que se realizan los descuentos legales. En este caso corresponde a la suma del sueldo base y la gratificación legal.

4

### Descuentos legales

**Cotizaciones previsionales para pensiones:** parte del sueldo imponible que se destina a una AFP (Administradora de Fondos de Pensiones).

**Seguro de cesantía:** parte del sueldo imponible que se destina a financiar un derecho que protege al trabajador en caso de cesantía.

**Cotizaciones previsionales para salud:** parte del sueldo imponible que se destina a una institución que gestiona la cobertura de atención en salud.

Para analizar otros ejemplos ingresa a <https://bit.ly/3XNU111>.

## « Sueldos base y líquido

El **sueldo base** es el pago en dinero, obligatorio y fijo, pagado por períodos iguales, que recibe un trabajador por la prestación de sus servicios y determinado en su contrato.

El **sueldo líquido** es el monto de dinero final que se paga al trabajador luego de realizar todos los descuentos establecidos por la legislación. »

Algunos conceptos e instituciones relevantes para determinar el sueldo de un trabajador son los siguientes:

## « Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP)

Una pensión es un beneficio previsional que tienen los afiliados que consiste en un monto de dinero que reciben tras jubilarse o adquirir algún grado de invalidez.

Las **AFP** son las instituciones encargadas de administrar los ahorros previsionales de los trabajadores, haciéndolos crecer en el largo plazo para que puedan tener una mejor pensión.

Todo trabajador dependiente debe cotizar obligatoriamente un 10% que se aplica sobre el sueldo imponible. Dicho monto lo paga directamente el empleador a la AFP. Además, las AFP cobran una comisión por la gestión que realizan, cuyo valor depende de la institución a la que se esté afiliado.



- 1 Considerando que en la liquidación de sueldo de Fernando se observa que el descuento correspondiente a las cotizaciones previsionales para pensiones es de 11,44 %, ¿cómo puedes calcular el porcentaje de comisión que cobra su AFP?

## « Seguro de cesantía individual

Es un fondo que se genera a partir del descuento del 0,6% del sueldo imponible de un trabajador y que se acumula en una cuenta individual. La Administradora de Fondos de Cesantía (AFC) es el organismo cuyo objetivo es administrar las prestaciones y beneficios del Seguro de Cesantía. »

## « Fondo Nacional de Salud (Fonasa)

Fonasa es un servicio público encargado de recaudar, administrar y distribuir los dineros destinados a salud estatales y de los cotizantes. Funciona con un sistema de reparto solidario: todos los beneficiarios asociados aportan el 7% de sus ingresos imposables y acceden a un plan único de salud, independiente de su aporte y condiciones de salud que presente.

Hay cuatro categorías de beneficiarios: **grupo A**, **grupo B**, **grupo C** y **grupo D**. El **A** es la categoría de las personas con menos recursos. »

Alejandra está revisando en su tablet algunos detalles de su liquidación de sueldo. Además de la información de la imagen, se sabe que está afiliada a Fonasa y que no posee asignaciones por locomoción ni por colación.

Sueldo base	\$ 500 000
Gratificación legal	\$ 125 000
Comisión de AFP	1,44 %



Gettyimages/FG Trade Latin

### EJEMPLO 1 >> Cálculo de un sueldo líquido.

¿Cuál es el sueldo líquido que recibe Alejandra?

#### Paso a Paso

1. Determina el sueldo imponible y los descuentos legales.

El sueldo total imponible se calcula como la suma del sueldo base y la gratificación, es decir:

$$\$500\,000 + \$125\,000 = \$625\,000$$

- Cotizaciones previsionales para pensiones (10 % + 1,44 % = 11,44 %):

$$\$625\,000 \cdot 0,1144 = \$71\,500$$

- Seguro de cesantía (0,6 %):

$$\$625\,000 \cdot 0,006 = \$3\,750$$

- Cotizaciones previsionales para salud (7 %):

$$\$625\,000 \cdot 0,07 = \$43\,750$$

2. Determina el descuento total.

Es la suma de los descuentos calculados en el paso anterior:

$$\$71\,500 + \$3\,750 + \$43\,750 = \$119\,000$$

3. Determina el sueldo líquido.

Se calcula como la diferencia entre el sueldo imponible y el descuento total:

$$\$625\,000 - \$119\,000 = \$506\,000$$

4. Responde.

El sueldo líquido de Alejandra es \$506 000.

2 ¿Por qué Alejandra tiene un sueldo líquido menor que Fernando si su sueldo base es mayor? Revisa la liquidación de sueldo de Fernando y compárala con la de Alejandra. Luego, explica.

3  ¿Aumentaría o disminuiría el sueldo líquido de Alejandra si decidiera cambiarse a una AFP que cobra una comisión de 0,58 %?, ¿en qué porcentaje? Respondan accediendo a una calculadora de sueldo en <https://bit.ly/3XNUI11> ¿Recomendarían el cambio? Expliquen.



## » Administrando un sueldo en Chile

### Educación Ciudadana

De acuerdo con los datos entregados por la Encuesta Suplementaria de Ingresos (ESI) 2021, se puede concluir que en Chile se registra un considerable atraso salarial, un problema estructural y de largo plazo que va más allá de las consecuencias negativas coyunturales sobre el mundo del trabajo que ha generado la pandemia mundial COVID-19.

#### Apliquemos lo estudiado

Mariana es una joven que acaba de comenzar a trabajar y su sueldo base será de \$420 000, su gratificación de \$105 000 y su bono de producción de \$50 000.

Investigando, leyó en un diario electrónico de economía que una estrategia para administrar adecuadamente su sueldo es la regla 50/30/20, que sugiere asignar el 50 % del sueldo a gastos fijos o básicos, el 30 % a actividades personales o recreativas y el 20 % a ahorro.



GettyImages/Image Source

### EJEMPLO 2 » Distribución de un sueldo en gastos y ahorro.

¿Cuál es la distribución que puede hacer Mariana de su sueldo si aplica la regla 50/30/20?

#### Paso a Paso

1. Calcula el sueldo imponible total.

$$\$420\,000 + \$105\,000 + \$50\,000 = \$575\,000$$

2. Calcula los descuentos legales totales.

Cotizaciones previsionales para pensiones (11,44 %):	Seguro de cesantía (0,6 %):	Cotizaciones previsionales para salud (7 %):
$\$575\,000 \cdot 0,1144 = \$65\,780$	$\$575\,000 \cdot 0,006 = \$3\,450$	$\$575\,000 \cdot 0,07 = \$40\,250$

Por lo tanto, los descuentos legales totales son

$$\$65\,780 + \$3\,450 + \$40\,250 = \$109\,480$$

3. Calcula el sueldo líquido.

$$\$575\,000 - \$109\,480 = \$465\,520$$

4. Aplica la regla 50/30/20.

Gastos fijos (50 %):	Actividades personales (30 %):	Ahorro (20 %):
$\$465\,520 \cdot 0,5 = \$232\,760$	$\$465\,520 \cdot 0,3 = \$139\,656$	$\$465\,520 \cdot 0,2 = \$93\,104$

5. Responde.

Según la regla 50/30/20, Mariana podría distribuir su sueldo mensualmente en \$232 760 para gastos fijos, \$139 656 para actividades personales y \$93 104 para ahorro.

## Solicitando créditos y ahorrando

El crédito es un préstamo de dinero que una parte otorga a otra con el compromiso de que en el futuro quien lo recibe devolverá dicho préstamo en forma gradual (mediante el pago de cuotas) o en un solo pago y con un interés adicional que compensa a quien presta por todo el tiempo que no tuvo ese dinero.

Ingresa a <https://bit.ly/3IgH1wi> e infórmate de los tres principales tipos de crédito que existen. A partir de esta información, responde:



- ¿Cuáles son los tres principales tipos de crédito?
- ¿En qué se diferencian estos tres tipos de crédito?
- ¿En qué circunstancias crees que es necesario pedir un crédito? Nombra dos.
- ¿En qué información pondrías atención si tuvieras que pedir un crédito?

Imagina que Alejandro quiere reparar su automóvil y está evaluando diversas posibilidades de crédito para costear los arreglos. Algunos de los conceptos que debe conocer para decidir bien son los que se muestran en la tabla adjunta. Al respecto, responde:

- ¿Cuáles de ellos conoces?
- ¿Cuál de ellos tendrías en cuenta para decidirte por el crédito más conveniente?

Concepto
Tasa de interés mensual
Valor cuota
Gastos asociados
Seguro de desgravamen
Total de intereses
Costo total



Gettyimages/sakchai vongsasiripat

Alejandro va a pedir un crédito de consumo de \$1 000 000, que pagará en 12 meses y quiere evaluar la mejor alternativa disponible. Tras averiguar en internet, accedió a una simulación que arrojó los siguientes datos para su crédito en tres instituciones financieras:

Comparación de créditos de consumo			
Concepto	Institución A	Institución B	Institución C
Tasa de interés mensual (%)	1,44	2,43	1,89
Valor cuota (\$)	93 106	103 220	95 785
Gastos asociados (\$)	10 314	9 352	9 011
Seguro de desgravamen (\$)	7 829	10 956	12 518
Total de intereses (\$)	99 129	218 332	127 891
Costo total (\$)	1 117 272	1 238 640	1 149 420

### EJEMPLO 3 >> Análisis de la selección de un crédito.

Antes de simular su crédito, Alejandro pretendía pedirlo en la institución **C**, ya que posee un gran prestigio y, tras hacer la simulación, pudo observar que es la que tiene menos gastos asociados. ¿Es la más conveniente o Alejandro debería optar por otra de las instituciones?

#### Paso a Paso

- Define los conceptos de la tabla de comparación de los créditos.
  - Tasa de interés mensual: la determina la institución financiera que otorga el crédito y corresponde a un porcentaje del saldo de la deuda que debe pagarse para ir disminuyéndola.
  - Valor cuota: monto de dinero que se paga mensualmente para pagar el crédito.
  - Gastos asociados: monto de dinero que se paga por gastos administrativos de la institución financiera relacionados con el crédito.
  - Seguro de desgravamen: monto de dinero que se paga para cubrir el saldo de la deuda de un crédito en caso del eventual fallecimiento del endeudado.
  - Total de intereses: monto total de dinero que se paga por el crédito al aplicar la tasa de interés.
  - Costo total: monto total de dinero que se paga por el crédito, incluyendo los intereses, los gastos asociados y el seguro de desgravamen.
- Determina los conceptos relevantes para seleccionar el crédito más conveniente.  
Puedes ver que la institución con menor tasa de interés es también la que tiene el menor valor cuota y el menor costo total.
- Decide cuál es la institución que ofrece el crédito más conveniente.  
A pesar de que la institución **C** es la que tiene los menores gastos asociados, son conceptos más relevantes en la decisión de Alejandro el valor cuota y el costo total. Dado que la institución **A** es la que tiene los menores valores en estos conceptos, es la que ofrece el crédito más conveniente.

-  ¿Cuál de los tres créditos descritos es el menos conveniente? Respondan a partir de la información de la tabla de comparación de créditos de consumo. Adicionalmente, ingresen a <https://www.sernac.cl/portal/619/w3-article-22278.html> para simular otros créditos con o sin seguro, variando el monto del crédito, el período, además analicen los pro y contra de considerarlo con y sin seguro.



## « Amortización

Al pedir un crédito, se firma un acuerdo con el banco en el que quedan estipulados el plazo y las condiciones de la deuda. Una de estas condiciones es el sistema de **amortización**. Uno muy utilizado es el sistema de amortización de cuota fija, en el que la cuota es constante a lo largo del período por el que se extiende el crédito a una tasa de interés fija.

Si se solicita un crédito de  $\$A$ , y lo queremos pagar (amortizar) en  $n$  meses con una tasa de interés  $i$  mensual, abonaremos al final de cada mes una cuota fija  $\$R$ , que puede calcularse mediante la fórmula adjunta.

$$\triangleright R = \frac{A \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

La cuota anterior se descompone en dos cantidades de dinero: el interés y la amortización. »

### EJEMPLO 4 » Cálculo de la cuota fija de un crédito.

Amparo quiere pedir un crédito de \$600 000, que pagará en 6 meses con una tasa de interés mensual de 2,5 %. ¿Cuál es el valor de la cuota fija que deberá pagar mensualmente por su crédito?

#### Paso a Paso

1. Identifica las variables que aparecen en la fórmula de la cuota fija para el pago de un crédito.

$$R = \frac{A \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$R$ : cantidad de dinero correspondiente a la cuota fija.

$A$ : cantidad de dinero correspondiente al crédito solicitado.

$i$ : tasa de interés mensual expresada como número decimal.

$n$ : cantidad de meses en que se pagará el crédito.

2. Reemplaza los valores en la fórmula y redondea el resultado a la unidad.

$$R = \frac{600\,000 \cdot 0,025}{1 - (1 + 0,025)^{-6}} = 108\,929,982 \dots \approx 108\,930$$

3. Responde.

La cuota fija, redondeada a la unidad, será de \$108 930.

La institución que financiará el crédito de Amparo le envió la siguiente tabla de amortización con los montos que deberá pagar mensualmente (con los valores decimales redondeados a la unidad):

Tabla de amortización del crédito de Amparo				
Número de cuota	Valor cuota (\$)	Interés (\$)	Amortización (\$)	Saldo de la deuda (\$)
0	–	–	–	600 000
1	108 930	15 000	93 930	506 070
2	108 930	12 652	96 278	<b>409 792</b>
3	108 930	<b>10 245</b>	98 685	311 107
4	108 930	7 778	101 152	209 954
5	108 930	5 249	103 681	106 273
6	108 930	2 657	<b>106 273</b>	0

Los intereses siempre se aplican a la deuda restante (Saldo de la deuda (\$)).

### EJEMPLO 5 >> Análisis de la tabla de amortización.

¿Cómo se calcularon los valores destacados en la tabla de amortización del crédito de Amparo?



#### Paso a Paso

1. Analiza el monto destacado con rojo.

Este valor corresponde al saldo de la deuda correspondiente a la segunda cuota y se calcula como la diferencia en pesos entre el saldo del período anterior y la amortización del período en curso:

$$506\,070 - 96\,278 = \mathbf{409\,792}$$

2. Analiza el monto destacado con azul.

Este valor corresponde al interés correspondiente a la tercera cuota y se calcula en pesos como el 2,5 % del saldo de la deuda del período anterior, es decir:  $0,025 \cdot 409\,792 = 10\,244,8 \approx \mathbf{10\,245}$

3. Analiza el monto destacado con verde.

Este valor corresponde a la amortización correspondiente a la sexta cuota y se calcula como la diferencia en pesos entre el valor de la cuota y el interés del período en curso:  $108\,930 - 2\,657 = \mathbf{106\,273}$

- 2  ¿Cómo puede obtenerse una tabla de amortización usando una calculadora en línea? Ingresen a <https://bit.ly/3IrmeGg> para simular el crédito de Amparo a partir del plazo del crédito en meses, del monto del crédito y de la tasa de interés mensual y respondan.



### << Ahorro a plazo fijo

El **ahorro a plazo fijo** es una forma de inversión que consiste en entregar una cantidad de dinero a una institución financiera durante un tiempo determinado, tras el cual se puede retirar la inversión con los intereses pactados inicialmente. Si se ingresa una cantidad de dinero  $C$  por un plazo de  $n$  meses a una tasa de interés mensual  $i$ , el monto de dinero  $Q$  que se retira al final del plazo se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$Q = C \cdot (1 + i)^n$$

La expresión anterior se relaciona con una función exponencial, con la variable independiente  $n$  (meses),  $C$  valor inicial y con base  $(1 + i)$  como el factor de crecimiento  $a$ , es decir,  $f(t) = c \cdot a^t$ .



### EJEMPLO 6 >> Cálculo de un ahorro a plazo fijo.

Si se ahorra \$1 000 000 durante 1 año con un interés de 0,25 % mensual y sin comisiones, ¿cuánto dinero se retirará al final del período?

#### Paso a Paso

1. Reemplaza los valores en la expresión para calcular el monto final de dinero redondeado a la unidad. Utiliza una calculadora científica.

$$Q = C \cdot (1 + i)^{12} = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,0025)^{12} = 1\,030\,415,95\dots \approx 1\,030\,416$$

2. Responde.

El monto final que se retirará será \$1 030 416.

## Nuevo crédito indígena

### Un apoyo a nuestros pueblos originarios

Este crédito busca apoyar a personas y organizaciones pertenecientes a pueblos originarios a través de un programa específico de financiamiento (créditos e incentivos) para inversiones que permitan potenciar sus emprendimientos silvoagropecuarios o de actividades conexas.

Pueden participar todos los usuarios que hayan acreditado su condición de cliente de INDAP (Instituto de Desarrollo Agropecuario) y obtenido en la CONADI (Corporación Nacional de Desarrollo Indígena) el certificado que acredita su condición de pertenecer a un pueblo originario.

Un tipo de estos créditos es el de corto plazo individual, destinado a pequeñas y pequeños productores agrícolas y campesinos y campesinas individuales.

**Fuente:** Instituto de Desarrollo Agropecuario. (s.f.).  
Nuevo crédito indígena. Ministerio de Agricultura de Chile.  
<https://www.indap.gob.cl/plataforma-de-servicios/nuevo-credito-indigena>

## Beneficios

- Los créditos, tanto de corto plazo como de largo plazo, serán no reajustables.
- Tasa de interés de 6 % anual para los créditos de corto plazo y largo plazo. En caso de simple retardo o mora, la tasa de interés será de 9 % anual.



### Apliquemos lo estudiado

Las terrazas y las eras de cultivo son sistemas agrícolas ancestrales que funcionan como ejemplo de manejo sostenible, contribuyendo a la seguridad alimentaria de las comunidades de la Región de Antofagasta a través de la producción de papas, zanahoria, habas, alfalfa, trigo y maíz, entre otros.

Una comunidad **atacameña** implementará las terrazas y las eras de cultivo ancestrales en Calama y San Pedro de Atacama. Para financiar su proyecto solicitaron un crédito indígena de corto plazo (1 año) por 280 UF el 1 de enero de 2023.



↓ Terrazas y eras de cultivo.



## EJEMPLO 7 >> Cálculo del monto de dinero que se pagará por un crédito.

¿Cuál es monto final que deberá pagar la comunidad atacameña?

### Paso a Paso

1. Averigua el valor de la UF en la fecha de solicitud del crédito.

En el link <https://bit.ly/3kwHDGa> de la página del SII se puede obtener la siguiente tabla:



Valor UF (\$), enero de 2023					
1	<b>35 122,26</b>	11	35 219,37	21	35 253,41
2	35 133,53	12	35 222,77	22	35 256,82
3	35 144,81	13	35 226,17	23	35 260,23
4	35 156,09	14	35 229,58	24	35 263,64
5	35 167,38	15	35 232,98	25	35 267,04
6	35 178,67	16	35 236,39	26	35 270,45
7	35 189,96	17	35 239,79	27	35 273,86
8	35 201,26	18	35 243,20	28	35 277,27
9	35 212,56	19	35 246,60	29	35 280,68
10	35 215,96	20	35 250,01	30	35 284,09
-	-	-	-	31	35 287,50

Fuente: Servicio de Impuestos Internos, 2023.

Se destaca con rojo el valor de la UF el día 1 de enero de 2023: **\$35 122,26**.

2. Expresa el monto del crédito en pesos. Redondea el resultado a la unidad.

El valor en pesos  $C$  de las 280 UF solicitadas es

$$C = 280 \cdot \$35\,122,26 = \$9\,834\,232,8 \approx \$9\,834\,233$$

3. Aplica el interés anual.

La tasa de interés anual es de 6 %, que escrito en forma decimal corresponde a  $i = 0,06$ .

Por lo tanto, el monto de dinero  $Q$  que se pagará por el crédito es

$$\begin{aligned} Q &= C \cdot (1 + i) = \$9\,834\,233 \cdot (1 + 0,06) \\ &= \$9\,834\,233 \cdot 1,06 \\ &= \$10\,424\,286,98 \approx \$10\,424\,287 \end{aligned}$$

4. Responde.

El monto final que se pagará por el crédito es \$10 424 287.

- 3 Si en el ejemplo anterior ocurre una morosidad de 1 año, ¿cuánto dinero se pagaría? Explica.

### Para terminar la Lección 1...

- ¿Qué modelos económicos utilizaste para fundamentar las decisiones económicas estudiadas en la lección?
- ¿Qué herramientas tecnológicas o manuales empleaste para justificar las argumentaciones aplicadas en la toma de decisiones?
- ¿Qué ideas personales acerca de los conceptos económicos estudiados pudiste reelaborar a partir de los ejemplos analizados en la lección?



# Toma de decisiones con indicadores económicos

## Calculando precios

Para estimar la tasa de variación de los precios de productos y servicios se usan índices económicos como el IPC (Índice de Precios al Consumidor). En él se toman en cuenta los precios de un conjunto predeterminado de bienes y servicios que se consideran básicos de acuerdo con encuestas sobre los gastos que se realizan en los hogares de un país. A este conjunto se le llama canasta familiar. Además de alimentos, la canasta incluye gastos en vivienda y servicios básicos, vestuario y calzado, salud, transporte, comunicaciones y educación, entre otros.

- ¿Qué alimentos de los que se muestran en la imagen consumes a diario? Nombra 3.
- Según tu experiencia, ¿los precios de estos y otros productos tienden a aumentar o a disminuir con el paso del tiempo? Por ejemplo, ¿cuánto costaba una docena de huevos hace 10 años y cuánto cuesta ahora? Consulta a familiares o amigos y averigua en internet.
- Actualmente, ¿qué factores influyen en la variación del IPC? ¿Cómo lo interpretas?
- Averigua en medios informativos la variación mensual del IPC del mes anterior. Intuitivamente, ¿cómo interpretas este valor?

**Fuente:** Instituto Nacional de Estadísticas. (s.f).  
 Índice de Precios al Consumidor. Ministerio de Economía, Fomento y Turismo de Chile.  
<https://www.ine.gob.cl/ine-ciudadano/definiciones-estadisticas/economia/indice-de-precios-al-consumidor>

Archivo editorial.



## « IPC: Índice de Precios al Consumidor

El **Índice de Precios al Consumidor** (IPC) es un indicador económico que mide, mes a mes, la variación de precios de una canasta de bienes y servicios representativa del consumo de los hogares urbanos del conjunto de las capitales regionales y sus zonas próximas.

Se expresa como puntos respecto de un año base al que se le asigna un puntaje de 100.

La tasa de variación del IPC entre dos momentos, inicial y final, se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Tasa de variación del IPC} = \frac{\text{IPC}_{\text{final}} - \text{IPC}_{\text{inicial}}}{\text{IPC}_{\text{inicial}}} \cdot 100$$

La base del índice corresponde a la temporalidad en la cual se fija el valor del índice en 100. En el caso del IPC, la base referencial corresponde al año 2018 y proviene de la VIII Encuesta de Presupuestos Familiares.



Fuente: Instituto Nacional de Estadísticas (INE). <https://bit.ly/3ZaBbno>

- 1 ¿Cuál es el valor de la tasa de variación del IPC si se cumple  $\text{IPC}_{\text{inicial}} = \text{IPC}_{\text{final}}$ ?, ¿cómo interpretas este valor?
- 2 ¿La tasa de variación del IPC es positiva o negativa si se produce un aumento en el precio de la canasta de bienes y servicios en un período dado? Explica.

### EJEMPLO 1 » Cálculo de la tasa de variación mensual del IPC.

¿Cuál fue la tasa de variación mensual del IPC durante el mes de abril de 2022? ¿Cómo lo interpretas?

#### Paso a Paso

1. Ingresa a la página del SII a través del link [www.sii.cl](http://www.sii.cl) y en la sección **Valores y fechas** encontrarás los valores **UTM-UTA-IPC** de 2022.
2. Identifica los valores del IPC del mes de abril y del mes inmediatamente anterior, marzo.

$$\text{IPC}_{\text{marzo}} = 118,26$$

$$\text{IPC}_{\text{abril}} = 119,91$$

3. Aplica la relación para calcular la tasa de variación del IPC. Redondea el resultado a la décima.

$$\frac{119,91 - 118,26}{118,26} \cdot 100 = \frac{1,65}{118,26} \cdot 100 = 1,395... \approx 1,4$$

4. Responde.

La tasa de variación mensual del IPC de abril de 2022 fue 1,4 %, aproximadamente, lo anterior quiere decir que la cesta de compra que se evalúa ha resultado en conjunto un 1,4 %, aproximadamente, más cara respecto del mes anterior.

Fuente: Servicio de Impuestos Internos (SII). <https://bit.ly/3ZBjsVW>

IPC de 2022

Mes	IPC
Enero	115,77
Febrero	116,10
Marzo	118,26
Abril	119,91
Mayo	121,35
Junio	122,48
Julio	124,16
Agosto	125,67
Septiembre	126,75
Octubre	127,41
Noviembre	128,65
Diciembre	129,02



Ingresa a <https://bit.ly/3ZzsDWW> para acceder a una calculadora de IPC del INE.

- 3 De acuerdo con la tabla, ¿en qué mes piensas que la tasa de variación del IPC fue mayor, en febrero o en julio?, ¿por qué? Responde sin realizar el cálculo completo y justifica tu conjetura.

## « Inflación

La **inflación** es un proceso económico que consiste en un alza en los precios de los bienes y servicios, lo que genera una pérdida en el valor del dinero para poder adquirirlos o hacer uso de ellos. Su valor se puede estimar a partir de la variación del IPC. Para calcular la inflación anual debe considerarse el IPC de un mismo mes de dos años consecutivos y encontrar la tasa de variación del IPC en ese período.

Las principales consecuencias del aumento de la inflación influyen en el poder adquisitivo de las personas, ya que disminuye el valor del dinero que utilizamos para realizar compras cotidianas. »

### EJEMPLO 2 » Cálculo manual de la inflación anual.

¿Cuál fue la inflación de 2022 en Chile?

#### Paso a Paso

1. Identifica los datos que necesitas para hacer el cálculo.

Una buena estimación del valor de la inflación de 2022 se obtiene calculando la tasa de variación del IPC entre los meses de diciembre de 2021 y de 2022. Por lo tanto, los datos que se necesita conocer son los valores del IPC de diciembre de 2021 y de diciembre de 2022.

2. Busca los valores del IPC en la página del SII ([www.sii.cl](http://www.sii.cl)).

Los valores son los siguientes:

IPC de diciembre de 2021	IPC de diciembre de 2022
114,39	129,02

3. Aplica la relación para calcular la tasa de variación del IPC anual. Redondea el resultado a la décima.

$$\frac{129,02 - 114,39}{114,39} \cdot 100 = \frac{14,63}{114,39} \cdot 100 = 12,789... \approx 12,8$$

4. Responde.

La inflación de 2022 en Chile puede estimarse a partir de los valores del IPC en 12,8 %, aproximadamente.



- 4 ¿Cómo puedes validar el resultado obtenido para la inflación de 2022 en Chile? Busca en internet al menos 2 fuentes confiables y compara el valor obtenido con el real.

### EJEMPLO 3 » Cálculo de la inflación anual usando una calculadora en línea.

¿Cuál fue la inflación de 2019 en Chile?

#### Paso a Paso

1. Accede a la calculadora de IPC del INE (Instituto Nacional de Estadísticas).

El link es <https://bit.ly/3ZzsDWV> y el código QR es el siguiente:



La calculadora se ve así:

**Calculadora IPC**

Calculadora IPC, es una aplicación desarrollada por el Instituto Nacional de Estadísticas que permite calcular la tasa de variación del Índice de Precios al Consumidor (IPC) entre dos períodos. Adicionalmente, a través de esta herramienta es posible actualizar valores monetarios expresados en pesos, utilizando la variación oficial del período.

Revise la actualización del manual metodológico IPC 2018=100., con los ajustes y mejoras de la calculadora IPC. En este encontrará ejemplos prácticos para su utilización.

Período de Cálculo

Inicio: Febrero 2023

Término: Febrero 2023

Valor a Ajustar: Valor en Pesos

Calcular

Variación del Período

# Sin variación

Nota: Internamente se realizan los cálculos con 12 decimales y las variaciones resultantes correspondientes a las series empalmadas para fines de reajustabilidad. La variación presentada es a un decimal, ya que la variación oficial del índice también es a un decimal.

2. Ingrese los períodos inicial y final, es decir, diciembre de 2018 y diciembre de 2019.

Período de Cálculo

Inicio: Diciembre 2018

Término: Diciembre 2019

Valor a Ajustar: Valor en Pesos

Calcular

Variación del Período

Diciembre 2018 a Diciembre 2019

# 0,0 %

Nota: Internamente se realizan los cálculos con 12 decimales y las variaciones resultantes correspondientes a las series empalmadas para fines de reajustabilidad. La variación presentada es a un decimal, ya que la variación oficial del índice también es a un decimal.

3. Presiona el botón **Calcular**.

Obtendrás el siguiente valor:

Período de Cálculo

Inicio: Diciembre 2018

Término: Diciembre 2019

Valor a Ajustar: Valor en Pesos

Calcular

Variación del Período

Diciembre 2018 a Diciembre 2019

# 3,0 %

Nota: Internamente se realizan los cálculos con 12 decimales y las variaciones resultantes correspondientes a las series empalmadas para fines de reajustabilidad. La variación presentada es a un decimal, ya que la variación oficial del índice también es a un decimal.

4. Responde.

La inflación de 2019 en Chile puede estimarse a partir de los valores del IPC en 3 %, aproximadamente. Puede interpretarse, por ejemplo, si un producto en diciembre del 2018 tiene un precio de \$10 000, en diciembre del año 2019 aumentará en un 3 %, es decir, tendrá un valor de \$10 300.

5 ¿Qué razones podrían explicar el aumento de la inflación en Chile de 3 % en 2019 a 12,8 % en 2022? Investiguen e intercambien opiniones para justificar al menos 2 razones que justifiquen este aumento.

6 ¿Qué significa que la inflación de un país sea elevada?, ¿cómo se traduce en la capacidad de la población de comprar productos y acceder a servicios? Expliquen en conjunto. Compartan y discutan sus respuestas con las de otros grupos.

## » Poder adquisitivo y el rol del Estado

### Educación Ciudadana

Las ayudas gubernamentales han sido fundamentales para la supervivencia de personas y empresas durante episodios como los confinamientos debido a la pandemia y como apoyo a la recuperación económica. Sin embargo, uno de los problemas que han generado en los países de la región es un aumento de la inflación.

El poder adquisitivo es la cantidad de bienes y servicios que pueden obtenerse con una cantidad de dinero fija según el nivel de precios. Al aumentar la inflación, el poder adquisitivo de un trabajador disminuye y esto influye en su capacidad para gestionar su bienestar y el de su familia.

#### EJEMPLO 4 » Relación entre el poder adquisitivo y la inflación.

En 2021 una persona ganaba \$500 000 mensuales. ¿Cuál debió ser su sueldo en 2022 para mantener su poder adquisitivo?

#### Paso a Paso

1. Describe la relación entre el poder adquisitivo y la inflación.

Si aumenta el precio de un grupo de productos y servicios, la misma cantidad de dinero no alcanzará para comprarlos. Por lo tanto, el poder adquisitivo de un monto de dinero disminuye cuando la inflación aumenta.

Para mantener en el tiempo el poder adquisitivo de una cantidad de dinero hay que reajustarlo de acuerdo con el valor de la inflación.

2. Averigua el valor de la inflación en 2022.

El cálculo fue hecho antes y corresponde a 12,8 %, aproximadamente.

3. Aplica este reajuste al sueldo de 2021.

$$\begin{aligned} \$500\,000 + \$500\,000 \cdot 0,128 &= \$500\,000 \cdot (1 + 0,128) \\ &= \$500\,000 \cdot 1,128 \\ &= \$564\,000 \end{aligned}$$

4. Puedes comprobar tu resultado usando la calculadora de IPC del INE.

The image shows a calculator interface for calculating inflation. On the left, under 'Período de Cálculo', the start date is 'Diciembre 2021' and the end date is 'Diciembre 2022'. The 'Valor a Ajustar' is set to '500000'. A 'Calcular' button is visible. On the right, under 'Variación del Período', the period is 'Diciembre 2021 a Diciembre 2022', the inflation rate is '12,8 %', and the 'Valor ajustado' is '564.000'. A small note at the bottom states: 'Nota: Internamente se realizan los cálculos con 12 decimales y las variaciones resultantes correspondientes a las series empalmadas para fines de reajustabilidad. La variación presentada es a un decimal, ya que la variación oficial del índice también es a un decimal.'

5. Responde.

Para mantener su poder adquisitivo, un sueldo mensual que en 2021 era de \$500 000, en 2022 debió ser de \$564 000, aproximadamente.

- 7 ¿Qué ocurre con el poder adquisitivo del sueldo mensual del trabajador que en 2021 ganaba \$500 000 si en 2022, tras el reajuste real, quedó ganando \$520 000? Explica tu respuesta al resto del curso.

## Alfarería

### Un símbolo de la artesanía diaguita

Los diaguitas habitaron la zona costera de las actuales regiones de Atacama y Coquimbo. Aún hoy sus descendientes conservan su tradición alfarera y cerámica de recipientes y jarros para satisfacer necesidades de cocción y de almacenamiento de agua y alimentos, pero también para rendir culto a sus dioses y a sus difuntos.

La Cultura Diaguita se extendió tanto al interior de los valles, como en la costa. Se trata de sociedades agromarítimas que en los cursos medios de los valles cultivaban quínoa, poroto, zapallo, entre otros.

En sus diseños abundan figuras zoomorfas y los motivos y ornamentos geométricos de triángulos, rombos, espirales, escalas ordenadas simétricamente de tres o más colores y superficies finamente bruñidas que dan cuenta de sus creencias y de su cosmovisión.



Archivo editorial.

↑ Jarro pato

### Apliquemos lo estudiado

Una tienda *online* vende diversos artículos artesanales y en diciembre de 2022 puso a la venta el jarro pato adjunto al precio que allí se muestra.

Fuente: memoria chilena. (s.f.). Pueblo Diaguita. Biblioteca Nacional de Chile. <http://www.memoriachilena.gob.cl/602/w3-article-97190.html>

### EJEMPLO 5 >> Cálculo de la variación de un precio de acuerdo con la inflación.

Si en enero de 2023 la tienda reajustó los precios de todos sus productos de acuerdo con el valor de la inflación de 2022 (12,8 %) y, además, agregó un interés mensual de 1 % durante 2023, ¿cuál fue el precio del jarro pato en septiembre de 2023?

#### Paso a Paso

1. Calcula el precio inicial  $P_i$  para 2023.

Se aplica el reajuste de 12,8 % al precio de 2022:

$$\begin{aligned} P_i &= \$44\,000 \cdot (1 + 0,128) \\ &= \$44\,000 \cdot 1,128 \\ &= \$49\,632 \end{aligned}$$

2. Calcula el precio  $P_s$  de septiembre de 2023. Redondéalo a la decena.

Se aplica un modelo de interés compuesto en que el monto inicial es \$49 632 (calculado en el paso anterior), la tasa de interés es 0,01 (correspondiente a 1 %) y la cantidad de períodos es 9 (dado que septiembre es el noveno mes del año):

$$\begin{aligned} P_s &= \$49\,632 \cdot (1 + 0,01)^9 \\ &= \$49\,632 \cdot (1,01)^9 \\ &= \$54\,281,787\dots \approx \$54\,280 \end{aligned}$$

3. Responde.

El precio del jarro pato en septiembre de 2023 fue de \$54 280, aproximadamente.

## Conociendo Los tipos de cambio

El tipo de cambio o tasa de cambio es la relación entre el valor de una moneda y otra, es decir, nos indica cuántas unidades de una moneda se necesitan para obtener una unidad de otra.

- Sin considerar el dólar estadounidense (USD) ni el euro (€), ¿qué otras monedas extranjeras conoces?
- ¿Qué moneda equivale a más pesos chilenos (CLP), un dólar estadounidense o un euro? Busca este dato en una fuente actualizada.
- ¿Cuál es la moneda de mayor valor en el mundo? Investiga en internet a qué país pertenece y a cuántos pesos chilenos equivale.
- ¿Qué importancia crees que tiene el tipo de cambio en la economía de un país?



Gettyimages/John Woodworth

## « Tipo de cambio

El **tipo de cambio nominal** corresponde a la cantidad de pesos chilenos que equivalen a una unidad de moneda extranjera. Este valor cambia día a día, por lo que al momento de realizarse una transacción, es necesario consultar la equivalencia.

Un tipo de cambio importante es el **Dólar Observado**, que corresponde al precio promedio ponderado en pesos chilenos del dólar estadounidense obtenido a partir de las transacciones bancarias realizadas el día hábil anterior.

- 1 ¿Cuál es el valor del Dólar Observado el día de hoy? Accede a la Base de Datos Estadísticos del Banco Central de Chile en el link <https://bit.ly/3KU7Qtd>, busca la fecha de hoy y responde.



### EJEMPLO 6 » Cambio nominal de dólares estadounidenses a pesos chilenos.

Camila compró el *joystick* que se muestra en la imagen en una tienda virtual en el extranjero. ¿A cuántos pesos chilenos equivalía su precio el día de la compra: 13 de febrero de 2023?



Controlador de juegos con cable, mando de juegos de PC con doble vibración Turbo y botones de disparo para computador y consolas (negro)

4,3 ★★★★★ (8 063)

USD **31,20**

Envío GRATIS a Chile.

Gettyimages/Yevgen Romanenko

### Paso a Paso

1. Accede a la Base de Datos Estadísticos del Banco Central de Chile y busca el valor del Dólar Observado el 13 de febrero de 2023.

Fecha	Frecuencia	Cálculo
2023	Diaria	Serie original

Tipos de cambio (pesos por dólar) ⓘ								
Sel.	Serie	01.Feb.2023	09.Feb.2023	10.Feb.2023	13.Feb.2023	14.Feb.2023	15.Feb.2023	16.Feb.2023
<input type="checkbox"/>	Dólar observado	799,46	793,19	796,27	800,78	793,79	789,49	

Mostrando registros del 1 al 1 de un total de 1

2. Realiza la conversión entre monedas.

Multiplica los 31,2 USD por el valor del Dólar Observado el día señalado, \$800,78.

$$31,2 \cdot 800,78 = 24\,984,336 \approx 24\,984$$

3. Responde.

El precio del *joystick* el 13 de febrero de 2023 equivalía a \$24 984.

## EJEMPLO 7 >> Toma de decisión de acuerdo con el tipo de cambio.

Camila, unos días después de comprar el *joystick*, compró la cámara digital de la imagen en la misma tienda. Pudo haberla comprado el 28 de febrero de 2023, pero la compró el 6 de marzo de 2023. ¿Fue una buena decisión para su economía? (Considera que para los artículos de más de US \$41, se debe pagar 6% por Arancel aduanero más un 19% por IVA).



Cámara DSLR con lente de 18–55mm | Wi-Fi integrado | Sensor de 24.1 MP | Procesador de imagen DIGITAL 5+ y videos Full HD

4,7 ★★★★★ (3024)

USD **50<sup>70</sup>**

Envío GRATIS a Chile.

Getty/Imágenes/Howard Kingsnorth

### Paso a Paso

1. Calcula el total en dólares a pagar por el artículo. Redondea el total a la centésima.

Arancel aduanero (6%):  $50,7 \cdot (1 + 0,06) = 50,7 \cdot 1,06 = 53,742$ .

IVA (19%):  $53,742 \cdot (1 + 0,19) = 53,742 \cdot 1,19 = 63,95298$ .

Al redondear a la centésima se cancelaría: US \$63,95.

2. Accede nuevamente a la Base de Datos Estadísticos del Banco Central de Chile y busca el valor del Dólar Observado los dos días mencionados.

Tipos de cambio (pesos por dólar) ⓘ								
Sel.	Serie	2023	28.Feb.2023	01.Mar.2023	02.Mar.2023	03.Mar.2023	06.Mar.2023	07.
<input type="checkbox"/>	Dólar observado	318,67	831,24	829,97	815,24	814,56	808,91	

3. Realiza la conversión entre monedas para los dos días.

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{28 \text{ de febrero de 2023}} & \mathbf{6 \text{ de marzo de 2023}} \\ \hline 63,95 \cdot 831,24 = 53\,157,798 \approx 53\,158 & 63,95 \cdot 808,91 = 51\,729,7945 \approx 51\,730 \end{array}$$

4. Responde.

Comprar la cámara el 6 de marzo y no el 28 de febrero de 2023 fue una buena decisión de Camila, ya que le permitió ahorrar  $\$53\,178 - \$51\,730 = \$1\,448$ .

## EJEMPLO 8 >> Cálculo del porcentaje de variación del dólar.

¿Cuál fue el porcentaje de variación del dólar entre el 28 de febrero y el 6 de marzo de 2023?

### Paso a Paso

1. Determina el porcentaje a partir de los dos valores del Dólar Observado: 831,24 y 808,91.

$$\frac{808,91 - 831,24}{831,24} \cdot 100 = \frac{-22,33}{831,24} \cdot 100 = -2,6863... \approx -2,69$$

2. Responde.

El porcentaje de variación del dólar entre el 28 de febrero y el 6 de marzo de 2023 fue  $-2,69\%$ , aproximadamente.

2  ¿Cómo interpretan este porcentaje negativo? Discutan en forma grupal y respondan.

## » URGENCIA CLIMÁTICA

### Banco Interamericano de Desarrollo por un crecimiento sustentable

El Banco Interamericano de Desarrollo (BID) es una organización financiera que tiene como misión mejorar la calidad de vida en América Latina y el Caribe a través de apoyo monetario y técnico para reducir la pobreza y la desigualdad, propiciando el desarrollo de una manera sostenible y respetuosa con el clima.

#### Apliquemos lo estudiado

Actualmente se está implementando un proyecto de cooperación técnica mediante un subsidio que el BID ha otorgado al país. Sus principales características se muestran en la tabla adjunta.

Detalles del proyecto	
Número de proyecto	CH-T1247
Fecha de aprobación	7 de diciembre, 2020
País	Chile
Sector	Medioambiente y desastres naturales.
Subsector	Conservación de la biodiversidad y de zonas protegidas.
Etapa del proyecto	Implementación.
Costo total	USD 250 000

Fuente: <https://www.iadb.org/en/project/CH-T1247>

### EJEMPLO 9 » Cálculo del valor de un monto de dinero en el tiempo.

¿A cuántos pesos chilenos asciende el aporte del BID a Chile considerando el precio del dólar en la fecha de su aprobación? Teniendo en cuenta la inflación de 2021 y 2022, ¿qué cantidad de pesos chilenos es equivalente, a inicios de 2023, al aporte hecho por el BID?

#### Paso a Paso

1. Calcula a cuántos pesos equivalen USD 250 000 el 07 de diciembre de 2020.

04.Dic.2020	07.Dic.2020	08.Dic.2020
752,03	747,61	744,82

>  $250\,000 \cdot 747,61 = 186\,902\,500$

2. Aplica los valores de inflación de 2021 y 2022 (obtenidos de <https://bit.ly/3ZzsDWV>) para calcular el monto actualizado a principios de 2023.

#### Inflación 2021

Período de Cálculo

Inicio: Diciembre 2020

Término: Diciembre 2021

Valor a Ajustar: 186902500

Variación del Período: Diciembre 2020 a Diciembre 2021

**7,2 %**

Valor ajustado: 200.359.480

#### Inflación 2022

Período de Cálculo

Inicio: Diciembre 2021

Término: Diciembre 2022

Valor a Ajustar: 186902500

Variación del Período: Diciembre 2021 a Diciembre 2022

**12,8 %**

Valor ajustado: 226.005.493

3. Responde.

En la fecha de su aprobación, el aporte del BID equivalía a \$186 902 500 y, considerando la inflación de 2021 y 2022, a inicios de 2023, se observa que el valor aumenta año a año, quedando en \$226 005 493.

### Para terminar la Lección 2...

- ¿Qué aplicaciones prácticas en tu vida tienen los modelos económicos utilizados en la lección?
- ¿Qué ventajas para ti tuvo el usar calculadoras *online* para determinar algunas medidas económicas?
- ¿Por qué crees que es importante ser responsable al usar herramientas de internet?

# Síntesis de Unidad 1

## LECCIÓN 1 >> Toma de decisiones en mi economía personal

### Aprendiste...

#### Sueldos base y líquido

El **sueldo base** es el pago en dinero que recibe un trabajador por la prestación de sus servicios que está determinado en su contrato.

El **sueldo líquido** es el monto de dinero final que se paga al trabajador luego de realizar los descuentos establecidos en la ley.

#### Amortización

Si se pide un crédito de \$ $A$  y su pago o **amortización** se realizará en  $n$  meses con una tasa de interés mensual  $i$ , habrá que abonar una cuota fija de \$ $R$ :

$$R = \frac{A \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

#### Ahorro a plazo fijo

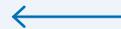
Si se ingresa como **ahorro** una cantidad de dinero  $C$  por un **plazo fijo** de  $n$  meses a una tasa de interés mensual  $i$ , el monto de dinero  $Q$  que se retira al final del plazo se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$Q = C \cdot (1 + i)^n$$

¿Cuál de estos conceptos te costó más comprender?, ¿por qué?

### Aplicaste...

- Argumentos y lenguaje simbólico para justificar la diferencia en los sueldos de acuerdo con las variables que influyen en su cálculo.
- La evaluación de modelos crediticios y de ahorro para comparar y decidir los escenarios económicos más convenientes para la economía personal.



¿En qué otra situación podrías utilizar esta habilidad?



¿Cuál es la utilidad de aplicar esta habilidad?

### Desarrollaste...

La responsabilidad por las decisiones que se toman en el ámbito económico, considerando sus implicancias para ti mismo y para los demás.



¿Qué señales te permiten reconocer esta actitud en otras personas?

## LECCIÓN 2 » Toma de decisiones con indicadores económicos

### Aprendiste...

#### Índice de Precios al Consumidor (IPC)

El IPC es un indicador económico que mide la variación de los precios en Chile. La tasa de variación del IPC entre dos momentos, inicial y final, se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\frac{IPC_{\text{final}} - IPC_{\text{inicial}}}{IPC_{\text{inicial}}} \cdot 100$$

#### Inflación

La **inflación** es un proceso económico que consiste en un alza en los precios de los bienes y servicios, lo que genera una pérdida en el valor del dinero para poder adquirirlos o hacer uso de ellos. Su valor se puede estimar a partir de la variación del IPC.

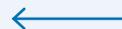
#### Tipo de cambio nominal

El **tipo de cambio nominal** corresponde a la cantidad de pesos chilenos que equivalen a una unidad de moneda extranjera. Este valor cambia día a día, por lo que al momento de realizarse una transacción, es necesario consultar la equivalencia.

¿Qué sabías de estos conceptos antes de estudiarlos en esta unidad?

### Aplicaste...

- Un análisis crítico para evaluar fenómenos como la variación en los precios y en el valor del dinero en el tiempo.
- Diferentes estrategias y representaciones para justificar decisiones en el ámbito económico basadas en indicadores económicos.



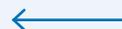
¿Qué conclusiones pudiste obtener de este análisis y qué tan relevantes son para tomar decisiones económicas?



¿De qué manera aprovechaste las herramientas de internet para resolver los problemas?

### Desarrollaste...

Flexibilidad durante el trabajo colaborativo, respetando y acogiendo puntos de vista distintos a los tuyos.



¿Por qué mantener esta actitud puede ser positivo o deseable?



U1\_ACT\_13 a 18



Unidad

# 2

## Construyo modelos para comprender mi entorno

### Funciones potencia, seno y coseno

- ¿Te gustaría practicar un deporte como el *cross country*?, ¿por qué?
- ¿Qué precauciones tomarías si cultivaras este deporte?

#### Estilos de vida a tu alrededor

**Un estilo de vida saludable incluye la práctica de deportes. El *cross country* es una especialidad del ciclismo de montaña que consiste en recorrer a gran velocidad circuitos naturales que posean tramos planos, en subida y en bajada.**

- Aplicando la trigonometría y usando una calculadora, ¿qué dato de interés podría estimar un ciclista si conoce la altura de un cerro y la longitud de una de sus laderas?
- ¿Qué impacto tiene en la descontaminación de las ciudades el uso de la bicicleta? Accede a la información de la Comisión Nacional de Seguridad de Tránsito (Conaset) en el link <https://bit.ly/4062wal> e indica cuál fue la cantidad de CO<sub>2</sub> que, según el estudio, se evitó arrojar al medioambiente gracias al uso de la bicicleta.





Archivo editorial



Ingresa a <https://bit.ly/3YOp9Ps> para conocer algunas ventajas del uso de la bicicleta.

## Conocimientos previos

### Potencia

Expresión matemática que representa la multiplicación iterada de un número (base) que se escribe como factor tantas veces como indica otro número (exponente). En la potencia:

$$4^7 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16384$$

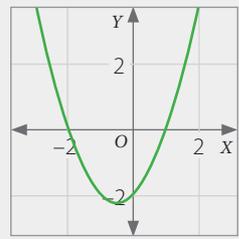
Su base es 4, el exponente es 7 y su valor es 16384.

### Función cuadrática

Función que se representa mediante un polinomio de segundo grado, cuya expresión general es la siguiente:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

A continuación se muestra la gráfica de  $f(x) = x^2 + x - 2$ , que corresponde a una parábola.



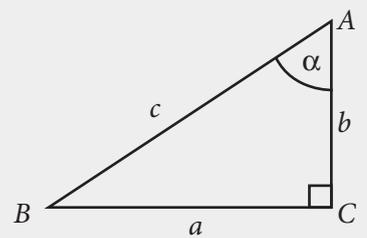
### Razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo  $ABC$  se definen las razones trigonométricas para el ángulo ( $\alpha$ ) de la siguiente forma:

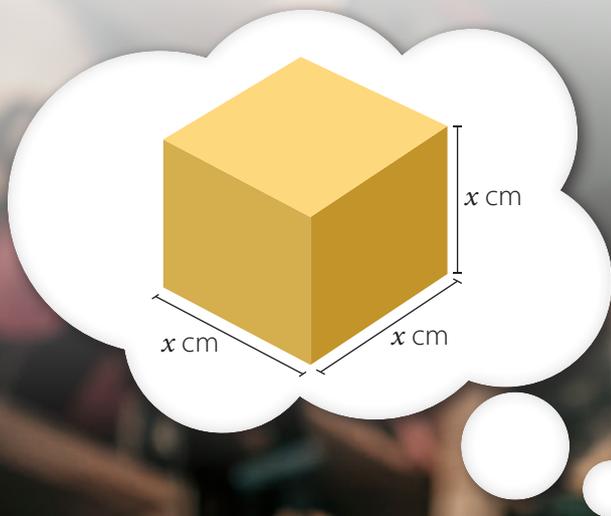
$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{a}{b}$$



# Aplicación de modelos con la función potencia



## Caracterizando la función potencia

Un artesano está pensando en fabricar cubos de madera de distintos colores que integran un set de juegos didácticos para niños que él ofrece en una feria y a través de sus redes sociales. Dentro de los costos que debe considerar en su negocio están el área de la superficie de los cubos y el volumen que ocupan.

- ¿Cuántas aristas, caras y vértices tiene cada figura 3D de la imagen?
- ¿Todas las aristas de un cubo tienen la misma longitud o son diferentes?
- ¿Cómo podrías modelar matemáticamente el área de la superficie y el volumen que ocupan los cubos de madera? Trabajen en parejas y justifiquen sus propuestas.



Algunos fenómenos o situaciones se pueden modelar usando funciones. Por ejemplo, el perímetro de un cuadrado se puede modelar a través de la función definida por  $f(x) = 4x$ , en que  $x$  representa la medida del lado del cuadrado y  $f$  su perímetro.

Para construir modelos del área de la superficie y del volumen de un cubo usaremos uno en que la medida de su arista se representa por  $x$ .

### EJEMPLO 1 >> Construcción de modelos con potencias de exponente 2 y exponente 3.

¿Qué modelos matemáticos permiten describir el área de la superficie y el volumen de cubos como los del artesano?

#### Paso a Paso

1. Crea tablas en que se representen la medida de la arista de un cubo y los valores del área y del volumen respectivos. Recuerda que un cubo tiene 6 caras compuestas por cuadrados, esto te servirá para calcular el área.

Medida de la arista (cm)	Área de la superficie (cm <sup>2</sup> )
1	$6 \cdot 1^2$
2	$6 \cdot 2^2$
3	$6 \cdot 3^2$
⋮	⋮

Medida de la arista (cm)	Volumen (cm <sup>3</sup> )
1	$1^3$
2	$2^3$
3	$3^3$
⋮	⋮

2. Generaliza las expresiones anteriores.

Representa la medida de la arista mediante la variable  $x$  y escribe la expresión general para el área y para el volumen.

Medida de la arista (cm)	Área de la superficie (cm <sup>2</sup> )
$x$	$6 \cdot x^2$

Medida de la arista (cm)	Volumen (cm <sup>3</sup> )
$x$	$x^3$

3. Responde.

Las expresiones que modelan el área de la superficie (medida en cm<sup>2</sup>) y el volumen de un cubo (medida en cm<sup>3</sup>) y de arista  $x$  son:

**Área de la superficie:**  $6x^2$

**Volumen:**  $x^3$

### << Función potencia

Se llama **función potencia** a aquella que se representa de la forma  $f(x) = ax^n$ , en que  $a$  es un número real distinto de 0 y  $n$  es un número natural mayor o igual que 2.



- 1 ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función potencia recién definida? Accede a un *software* matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy>, grafica algunas funciones potencia para distintos valores de  $a$  y  $n$  y plantea conjeturas. Compara tus respuestas con las del resto del curso.
- 2 ¿Son funciones potencia las que modelan el área de la superficie y el volumen de un cubo? De serlo, ¿cuáles serían los valores de  $a$  y  $n$  en cada una de ellas?



## » URGENCIA CLIMÁTICA

### Vertido de petróleo. Las manchas mortales.

En los últimos 50 años se han producido al menos 130 derrames graves de petróleo desde barcos petroleros y plataformas de extracción que, en algunos casos, han provocado alteraciones en los ecosistemas marinos y costeros que tardan décadas en recuperarse.

#### ¿Qué daño concreto causa el petróleo en el mar?

- Crea una película sobre la superficie marina que impide la entrada de la luz en el agua y provoca la muerte de muchas especies de algas que no pueden realizar la fotosíntesis.
- Ensucia el agua y, debido a la toxicidad de sus componentes, causa la muerte directa de muchas especies animales y vegetales.
- A largo plazo, el derrame causa daños en el sistema reproductivo y de alimentación de todos los organismos del ecosistema marino.

#### ¿Cómo mitigar el deterioro que los derrames de petróleo le originan al medioambiente?

- Usar dispersantes para descomponer el petróleo.
- Recuperar el petróleo usando máquinas.
- Agregar bacterias que se alimentan de petróleo.
- No transportar petróleo muy cerca de la costa.

#### ¿Cómo evitar los derrames de petróleo?

- Diseñar barcos con doble casco y otros reforzamientos.
- Abandonar definitivamente el consumo de petróleo.

Puedes obtener más información en <https://bbc.in/2T08kA6>



### Apliquemos lo estudiado

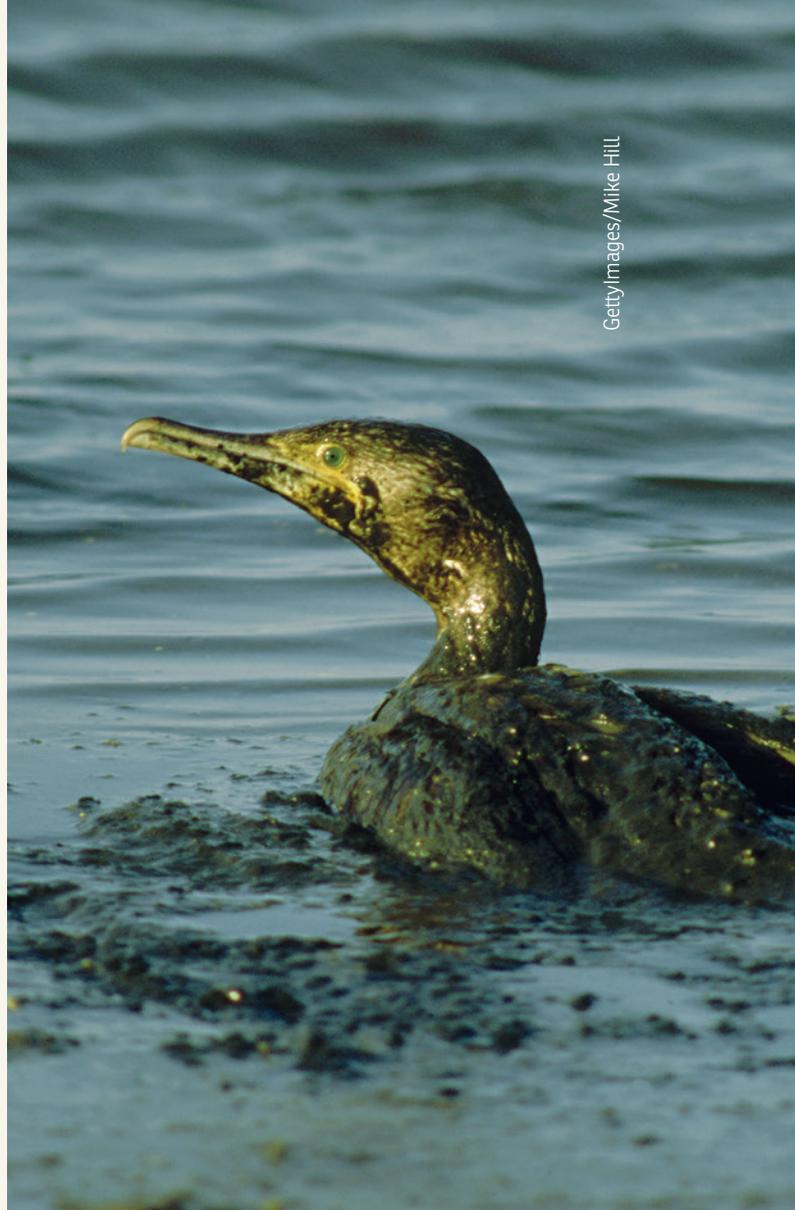
Un grupo de estudiantes de ingeniería determinó que el área  $A$ , expresada en metros cuadrados, de la mancha de petróleo producida por  $1 \text{ m}^3$  de petróleo al cabo de  $x$  horas (con  $x \leq 5$  h) del derrame se puede obtener usando la siguiente expresión:

$$A = 2000x^3$$

U2\_ACT\_2

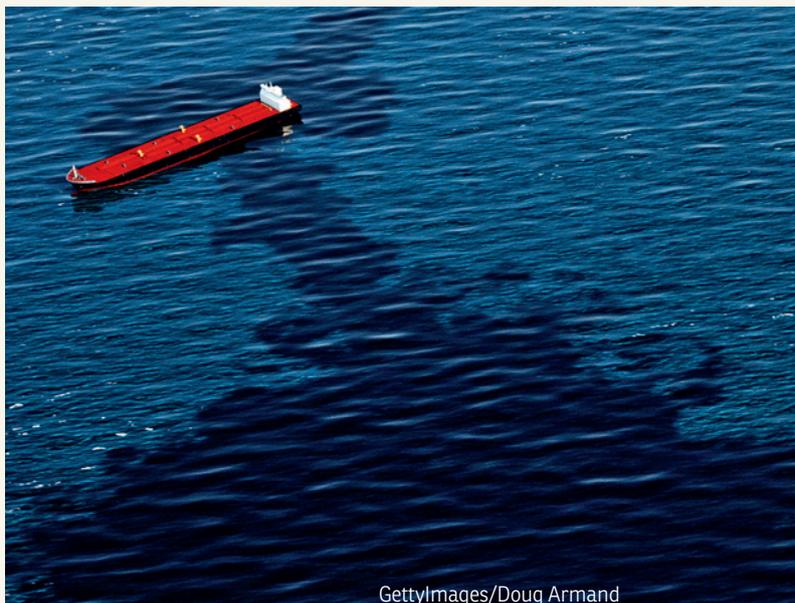


Derrame de petróleo en el mar. ➔



Getty Images/Mike Hill

➤ Cormorán bañado en aceite. Baréin, Golfo Pérsico.



Getty Images/Doug Armand

## EJEMPLO 2 >> Determinación del dominio y del recorrido de la función potencia $f(x) = 2000x^3$ .

¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función determinada por los estudiantes que modela el área de la mancha de petróleo?

### Paso a Paso

1. Escribe la expresión de la función y sus restricciones.

La función para  $x \leq 5$  h se puede expresar así:

$$A(x) = 2000x^3$$

En que:

A: área de la mancha de petróleo ( $m^2$ ).

$x$ : cantidad de horas.

2. Determina el dominio, expresado en horas (h) y el recorrido, expresado en metros cuadrados ( $m^2$ ).

Dominio	Recorrido
$x$	$A$
0	0
5	250 000

3. Responde.

El dominio de la función corresponde al intervalo continuo  $[0, 5]$  h y el recorrido, al intervalo continuo  $[0, 250\,000]$   $m^2$ .

## EJEMPLO 3 >> Aplicación de la función potencia para predecir escenario.

De acuerdo con la expresión determinada por los estudiantes, ¿en cuántas horas la mancha de petróleo cubrirá una superficie marina equivalente a un círculo de 200 m de diámetro?

### Paso a Paso

1. Calcula el área del círculo de 200 m de diámetro. Considera  $\pi \approx 3,14$ .

Área  $S$  de un círculo de 200 m de diámetro:

$$S = \pi \cdot (100 \text{ m})^2 \approx 3,14 \cdot 10\,000 \text{ m}^2 = 31\,400 \text{ m}^2$$

2. Determina el valor de  $x$  para  $A = S = 31\,400 \text{ m}^2$  en la expresión  $A(x) = 2000x^3$ .

$$\begin{aligned} 31\,400 &= 2000 \cdot x^3 \\ 15,7 &= x^3 \\ \sqrt[3]{15,7} &= x \\ 2,5039\dots &= x \end{aligned}$$

3. Responde aproximando por redondeo a la décima el resultado anterior.

La mancha de petróleo cubrirá una superficie equivalente a un círculo de 200 m de diámetro en 2,5 h, aproximadamente.

- 3  ¿Pensan que la función potencia determinada por los estudiantes predice correctamente la realidad?, ¿por qué? Si el modelo propuesto no fuera exacto, ¿qué rescatarían de él? Discutan, investiguen en internet y propongan conjeturas acerca de la utilidad de un modelo.

### EJEMPLO 4 >> Gráfica de una función potencia de exponente par.

¿Cómo es la gráfica de la función  $f(x) = 6x^2$  cuyo dominio corresponde a los números reales?

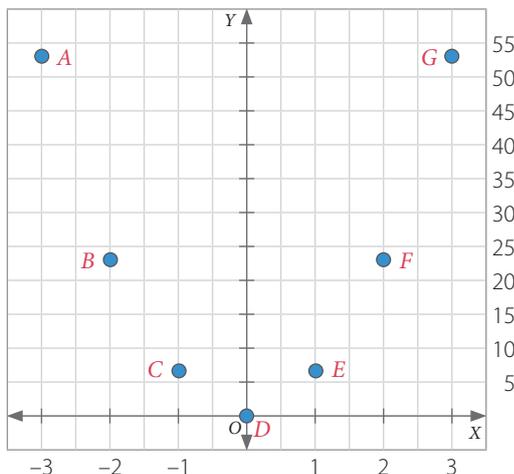
#### Paso a Paso

1. Confecciona una tabla para distintos valores de  $x$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$6 \cdot (-3)^2 = 54$	$6 \cdot (-2)^2 = 24$	$6 \cdot (-1)^2 = 6$	$6 \cdot 0^2 = 0$	$6 \cdot 1^2 = 6$	$6 \cdot 2^2 = 24$	$6 \cdot 3^2 = 54$

2. Dibuja en el plano cartesiano los puntos definidos por los pares ordenados  $(x, f(x))$ .

Par ordenado	Punto
$(-3, 54)$	A
$(-2, 24)$	B
$(-1, 6)$	C
$(0, 0)$	D
$(1, 6)$	E
$(2, 24)$	F
$(3, 54)$	G



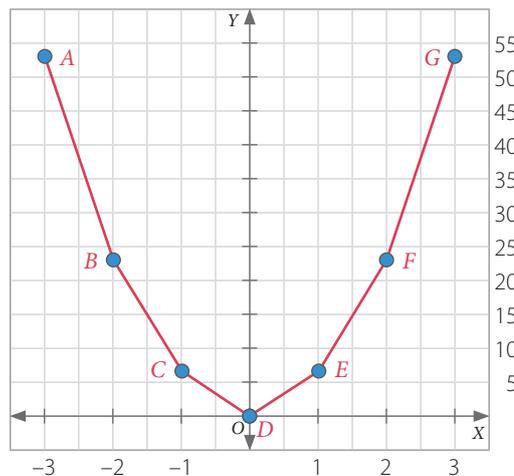
Ingresa al siguiente link  
<https://www.desmos.com/calculator/fbro2qenjj?lang=es>  
 para apreciar de mejor forma la gráfica.



3. Responde.

Al unir los puntos definidos en el paso anterior, obtienes la forma aproximada de la gráfica, cuyas características principales son:

- $f(x) = 6x^2$  es una función potencia del tipo  $f(x) = ax^n$  en que  $a > 0$  y  $n$  es par.
- Esta función cuadrática,  $f(x) = 6x^2$ , es un caso particular de la función potencia.
- El dominio de  $f(x)$  es  $\mathbb{R}$  y su recorrido,  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .
- Su gráfica es simétrica respecto del eje de las ordenadas, ya que  $f(x) = f(-x)$ .
- Su vértice es el origen.
- Las ramas de la gráfica se orientan hacia arriba.
- La función es decreciente en  $\mathbb{R}^-$  y creciente en  $\mathbb{R}^+$ .



4. ¿Cómo puedes concluir que una función es creciente o decreciente en parte de su dominio? Explica.
5. ¿Cómo se denomina la curva obtenida al graficar la función  $f(x) = 6x^2$ ? ¿Cómo se le llama al punto  $(0, 0)$  en la gráfica de la función anterior? En este caso, ¿es un máximo o es un mínimo de la curva? Investiga y responde.
6. ¿Qué ocurre con las ramas de las gráficas de la función potencia de exponente par a medida que aumenta el valor del exponente?, ¿se acercan o se alejan? Responde junto con un compañero o una compañera y propongan una conjetura.

## EJEMPLO 5 >> Gráfica de una función potencia de exponente impar.

¿Cómo es la gráfica de la función  $f(x) = x^3$  cuyo dominio corresponde a los números reales?

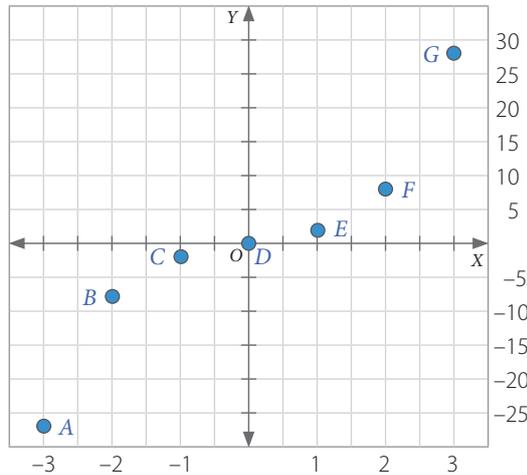
### Paso a Paso

1. Elabora una tabla para distintos valores de  $x$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$(-3)^3 = -27$	$(-2)^3 = -8$	$(-1)^3 = -1$	$0^3 = 0$	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$

2. Dibuja en el plano cartesiano los puntos definidos por los pares ordenados  $(x, f(x))$ .

Par ordenado	Punto
$(-3, -27)$	A
$(-2, -8)$	B
$(-1, -1)$	C
$(0, 0)$	D
$(1, 1)$	E
$(2, 8)$	F
$(3, 27)$	G



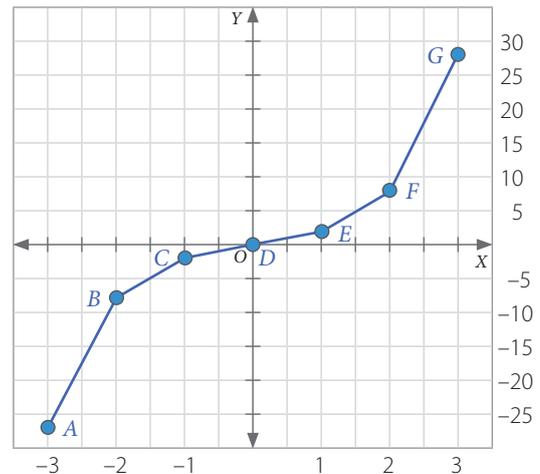
Ingresa al siguiente link  
<https://www.desmos.com/calculator/fbro2qenjj?lang=es>  
 para apreciar de mejor forma la gráfica.



3. Responde.

Al unir los puntos del paso anterior, obtienes la forma aproximada de la gráfica, cuyas características principales son:

- $f(x) = x^3$  es una función potencia del tipo  $f(x) = ax^n$  en que  $a > 0$  y  $n$  es impar.
- El dominio y el recorrido de  $f(x)$  son  $\mathbb{R}$ .
- Su gráfica es simétrica respecto del origen, ya que  $f(-x) = -f(x)$ .
- La función es creciente en todo  $\mathbb{R}$ .



7 De acuerdo con la expresión de la función potencia  $f(x) = ax^n$ , ¿cuáles son los valores de  $a$  y  $n$  en  $f(x) = x^3$ ?

8 En el dominio de la función anterior, ¿hay un crecimiento o un decrecimiento en los valores de  $f$ ? ¿cómo lo sabes?

9 ¿Hay alguna similitud entre las gráficas de las funciones  $f(x) = 6x^2$  y  $f(x) = x^3$ ? ¿en qué punto coinciden? Para responder, consideren las gráficas de ambas funciones para  $x \geq 0$ . Pueden visualizar las gráficas accediendo a un software matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy>



## » Uso responsable del agua

### Ciencias de la Salud

La escasez hídrica toma cada vez mayor importancia a nivel mundial, y Chile no es la excepción.

Aunque las tres cuartas partes de la superficie de la Tierra están cubiertas por agua, solo 2,5 % de esta es agua dulce. A medida que la población mundial aumenta, la falta de agua se ha ido transformando en un problema global de la mayor gravedad.

El agua es un recurso muy preciado para la salud y para la sobrevivencia humana, por lo que es deber de todos valorarla y no malgastarla.

En Chile, el consumo promedio diario de agua por habitante en 2021 se estimó en 171 L (calculado a partir del Informe de Gestión de 2021 de la Superintendencia de Servicios Sanitarios de Chile, disponible en <https://bit.ly/441scrx>), superior al promedio en Europa. Este consumo incluye las comidas y bebidas que ingerimos y las distintas actividades que realizamos cada día, como asearnos, lavar la ropa, lavar la loza, etc.



GettyImages/jayk7

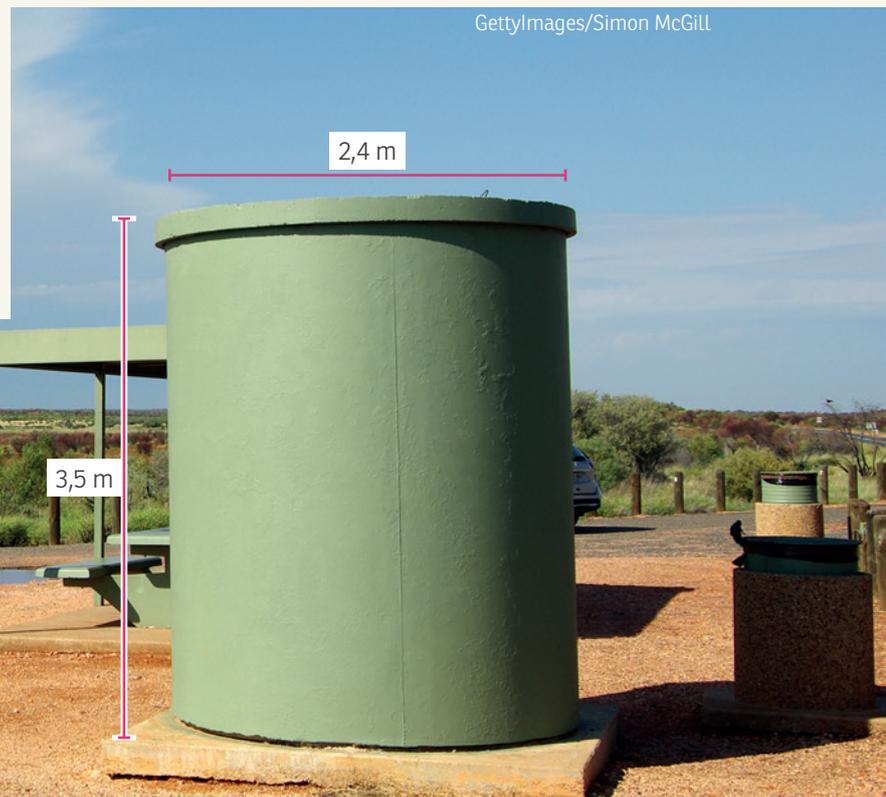
Fuente: Gobierno de Chile. (14 de enero de 2015).  
Cuidemos el agua: Cifras y recomendaciones.  
<https://www.gob.cl/noticias/cuidemos-el-agua-cifras-y-recomendaciones/>



### Apliquemos lo estudiado

Cierta comunidad sufre una importante carencia de agua debido a la sequía que se arrastra hace varios años. Los habitantes reciben semanalmente agua en camiones aljibe y la almacenan para consumo doméstico en el estanque cilíndrico que se muestra en la imagen adjunta.

GettyImages/Simon McGill



## EJEMPLO 6 >> Análisis de situación usando la función potencia.

Supón que los habitantes de la comunidad evalúan adquirir un estanque cuyo volumen sea un 50 % mayor que el actual y de la misma altura. Considerando la gráfica de la función que modela el volumen del cilindro, ¿cuáles son los puntos  $E_1$  y  $E_2$  que representan el volumen del estanque actual y el del proyectado, respectivamente?

### Paso a Paso

1. Determina la función potencia que modela el volumen del cilindro.

La fórmula del volumen  $V$  del cilindro de altura  $h$  y radio  $r$  es la siguiente:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Como la altura  $h$  y  $\pi$  son constantes, su producto  $\pi \cdot h = k$  también lo es; y la función  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  se puede escribir así:

$$V(r) = k \cdot r^2$$

2. Accede a una calculadora científica *online* en <https://bit.ly/3MlnSNt> y calcula el volumen  $V_1$  (para  $r_1 = 1,2$  m), el volumen  $V_2$ , mayor en un 50 % que  $V_1$  (por lo tanto, se cumple que  $V_2 = 1,5 \cdot V_1$ ) y el valor correspondiente de  $r_2$ .



Primero, calculas el valor de la constante  $k$  considerando la aproximación  $\pi \approx 3,14$ .

$$k = \pi \cdot h \approx 3,14 \cdot 3,5 \text{ m} = 10,99 \text{ m} \approx 11 \text{ m}$$

Luego, calculas los valores de  $V_1$ ,  $V_2$  y  $r_2$ .

$$V_1 = 11 \text{ m} \cdot (1,2 \text{ m})^2 = 11 \text{ m} \cdot 1,44 \text{ m}^2 = 15,84 \text{ m}^3$$

$$V_2 = 1,5 \cdot V_1 = 1,5 \cdot 15,84 \text{ m}^3 = 23,76 \text{ m}^3$$

Finalmente, reemplazas este último valor en la expresión  $V(r) = 11r^2$ :

$$23,76 = 11r_2^2$$

$$\sqrt{2,16} \approx r_2$$

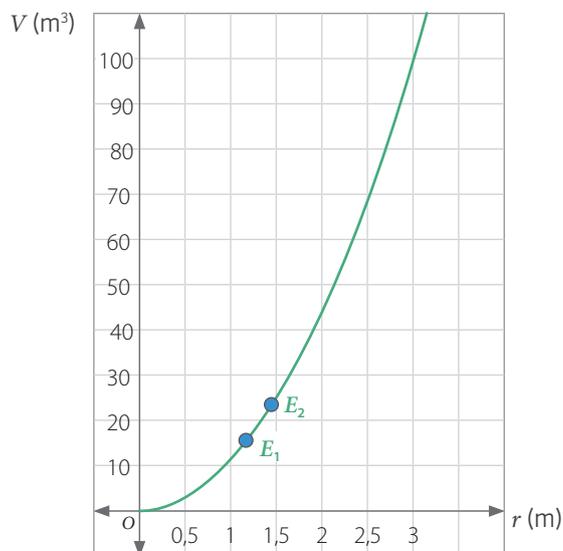
$$1,47 \approx r_2$$

3. Responde construyendo una tabla de datos, graficando y marcando los puntos solicitados  $E_1$  y  $E_2$ .

Construye una tabla con algunos pares de datos.

$r$ (m)	$V$ (m <sup>3</sup> )
0	0
1	11
1,2	15,84
1,47	23,76
2	44
3	99

Para terminar, construye la gráfica y marca los puntos  $E_1(1,2; 15,84)$  y  $E_2(1,47; 23,76)$



- 10 ¿Qué cambios habría que realizar a la estructura si el radio del estanque es 3 metros? Según el contexto del problema, ¿es posible que el radio ( $r$ ) sea de 350 metros?

## Modificando parámetros de la función potencia

Considera los cubos de madera del mismo tamaño que se muestran en la imagen. Tanto el área total que se ha pintado como el volumen que ocupan aumenta de izquierda a derecha en la medida que se incrementa de uno en uno el número de cubos.

- ¿De qué manera aumenta el área de la superficie total de los cubos al pasar de la torre 1 a la 2?, ¿se duplica, se triplica, etc.? ¿Y en el paso de la torre 2 a la 3?
- ¿Cómo cambia el volumen total de los cubos al pasar de la torre 1 a la 2? ¿Ocurre de la misma forma que el área de la superficie total o de manera diferente? Explica.
- ¿Cómo cambia la función que modela el área de la superficie total de los cubos al pasar de la torre 1 a la 2 si consideras la medida de la arista como la variable? ¿Qué parámetro se modifica en la expresión? ¿Y para el caso de la función que modela el volumen total? Comenta con una compañera o un compañero y elaboren una respuesta en conjunto.
- Intuitivamente, ¿cómo crees que cambian las gráficas de las funciones del área de la superficie y del volumen total en los casos anteriores? Explica y justifica tu respuesta.



Torre 1



Torre 2



Torre 3

Archivo editorial.

## EJEMPLO 7 >> Variación de la función potencia $f(x) = ax^n$ al modificar el parámetro $a$ .

¿Cómo varían las funciones potencia de exponente par y las de exponente impar al variar el parámetro  $a$ ? Considera que su dominio y recorrido corresponde a los números reales.

### Paso a Paso

- Para analizar la variación, considera como iniciales las funciones definidas anteriormente:  $f(x) = 6x^2$  y  $g(x) = x^3$ . Confecciona una tabla para distintos valores de  $a$ .

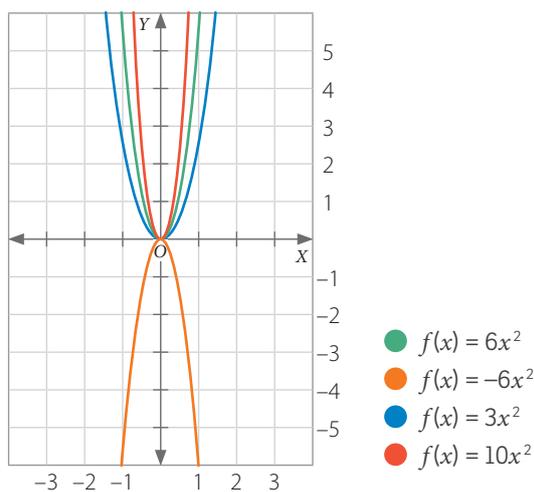
Función potencia de exponente par	
Función $f(x) = ax^2$	Valor del parámetro $a$
$6x^2$	6
$-6x^2$	-6
$3x^2$	3
$10x^2$	10

Función potencia de exponente impar	
Función $g(x) = ax^3$	Valor del parámetro $a$
$x^3$	1
$-x^3$	-1
$0,5x^3$	0,5
$4x^3$	4

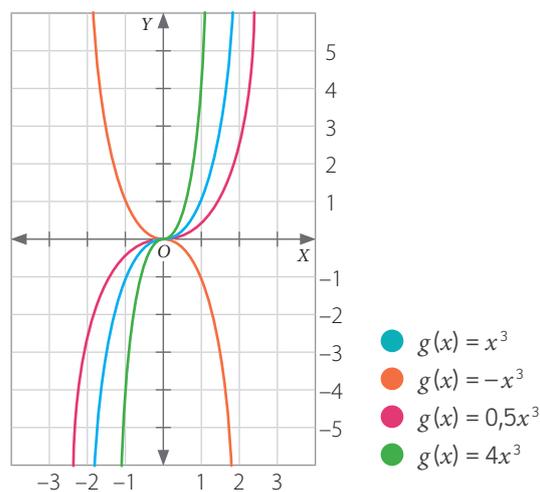
- Usa un *software* matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy> para graficar las funciones definidas en el paso anterior.



#### Función potencia de exponente par



#### Función potencia de exponente impar



- Responde.

De acuerdo con lo que se observa en las gráficas, se concluye lo siguiente:

#### Función potencia de exponente par

- Función inicial  $f(x) = 6x^2$ .
- Función  $f(x) = -6x^2$ : su gráfica corresponde a una reflexión respecto del eje  $X$  de la gráfica de la función inicial. Sus ramas se orientan hacia abajo ( $\cap$ ).
- Función  $f(x) = 3x^2$ : su gráfica es similar a la de la función inicial, pero sus ramas están más separadas entre sí.
- Función  $f(x) = 10x^2$ : su gráfica es similar a la de la función inicial, pero sus ramas están más juntas.

#### Función potencia de exponente impar

- Función inicial  $g(x) = x^3$ .
- Función  $g(x) = -x^3$ : su gráfica corresponde a una reflexión respecto del eje  $Y$  de la gráfica de la función inicial.
- Función  $g(x) = 0,5x^3$ : su gráfica es similar a la de la función inicial, pero sus ramas están más alejadas del eje  $Y$ .
- Función  $g(x) = 4x^3$ : su gráfica es similar a la de la función inicial, pero sus ramas están más cerca del eje  $Y$ .

## « Modificación del parámetro $a$ en funciones potencia del tipo $f(x) = ax^n$

Al modificar el parámetro  $a$  en una función potencia  $f(x) = ax^n$ , tenemos los siguientes casos:

<p><b><math>n</math> par y <math>a &gt; 0</math></b></p> <p>Al aumentar el valor de <math>a</math>, las ramas de la gráfica (que tiene forma de U) se acercan progresivamente una a la otra y también al eje <math>Y</math>.</p>	<p><b><math>n</math> par y <math>a &lt; 0</math></b></p> <p>Al aumentar el valor de <math>a</math>, las ramas de la gráfica (que tiene forma de <math>\cap</math>) se alejan progresivamente una de la otra y también del eje <math>Y</math>.</p>
<p><b><math>n</math> impar y <math>a &gt; 0</math></b></p> <p>Al aumentar el valor de <math>a</math>, las ramas de la gráfica se acercan progresivamente al eje <math>Y</math>.</p>	<p><b><math>n</math> impar y <math>a &lt; 0</math></b></p> <p>Al aumentar el valor de <math>a</math>, las ramas de la gráfica se alejan progresivamente del eje <math>Y</math>.</p>



### EJEMPLO 8 » Variación de la función potencia $f(x) = ax^n$ al modificar el parámetro $n$ .

¿Cómo varían las funciones potencia de exponente par y las de exponente impar al modificar el parámetro  $n$ ?

#### Paso a Paso

1. Considera algunas funciones potencia de exponente par e impar.

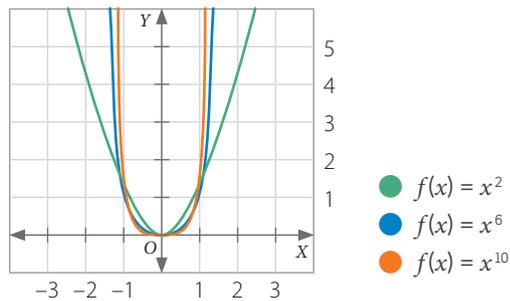
Exponente par:  $f(x) = x^2$        $f(x) = x^6$        $f(x) = x^{10}$   
 Exponente impar:  $g(x) = x^3$        $g(x) = x^7$        $g(x) = x^{11}$

Ingresa al siguiente link <https://www.desmos.com/calculator/fbro2qenj?lang=es> para apreciar de mejor forma la gráfica.

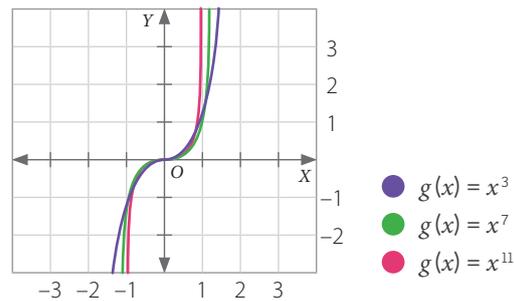


2. Usa un *software* geométrico para obtener las gráficas de las funciones anteriores.

#### Función potencia de exponente par



#### Función potencia de exponente impar



3. Responde.

Para una función potencia de exponente **par** y  $a > 0$ , se responde dividiendo el dominio en dos:

**Caso 1:** Intervalos reales  $]-1, 0[$  y  $]0, 1[$ .

Un aumento en el valor de  $n$  aleja las ramas de la gráfica del eje  $Y$ .

**Caso 2:** Intervalo real  $]-\infty, -1[$  y  $]1, +\infty[$ .

Un aumento en el valor del parámetro  $n$  acerca las ramas de la gráfica al eje  $Y$ .

Para una función potencia de exponente **impar** y  $a > 0$ , también se divide el dominio en dos:

**Caso 1:** Intervalos reales  $]-1, 0[$  y  $]0, 1[$ .

Un aumento en el valor de  $n$  aleja las ramas de la gráfica del eje  $Y$ .

**Caso 2:** Intervalo real  $]-\infty, -1[$  y  $]1, +\infty[$ .

Un aumento en el valor del parámetro  $n$  acerca las ramas de la gráfica al eje  $Y$ .

- 1 ¿Qué función crece más rápido:  $f(x) = x^2$  o  $f(x) = x^{10}$ ?, ¿y si comparan  $g(x) = x^3$  y  $g(x) = x^{11}$ ?

Definan grupalmente qué criterio usarán para determinar la rapidez de crecimiento de una función y respondan. Pueden visualizar las gráficas accediendo a un *software* matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy>



## « Modificación del parámetro $n$ en funciones potencia del tipo $f(x) = ax^n$

Al modificar el parámetro  $n$  en una función potencia  $f(x) = ax^n$ , tenemos los siguientes casos:

### Caso 1

En  $] -1, 0[$  y  $] 0, 1[$ , al aumentar el valor de  $n$  las ramas de la gráfica se alejan del eje  $Y$ .

### Caso 2

En  $] -\infty, -1[$  y  $] 1, +\infty[$ , al aumentar el valor de  $n$  las ramas de la gráfica se acercan al eje  $Y$ .



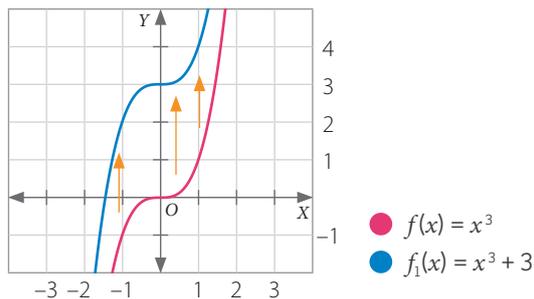
## EJEMPLO 9 » Traslaciones de la función potencia.

¿Qué variación provoca en la gráfica de  $f(x) = x^3$  la adición del número 3?

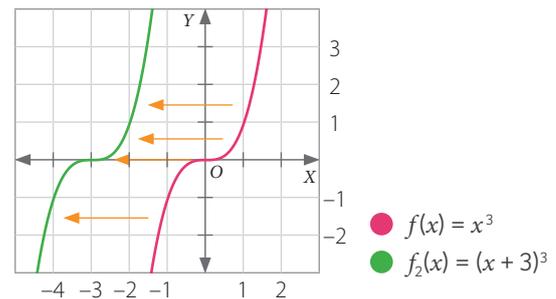
### Paso a Paso

1. Considera la adición a la función y la adición al término  $x$  y grafica.

**Caso 1:** la nueva función es  $f_1(x) = x^3 + 3$ .



**Caso 2:** la nueva función es  $f_2(x) = (x + 3)^3$ .



2. Responde.

- Sumar 3 a la función provoca una traslación vertical de la gráfica en el sentido positivo del eje  $Y$ .
- Sumar 3 al término  $x$  provoca una traslación horizontal de la gráfica en el sentido negativo del eje  $X$ .

Ingresa al siguiente link <https://www.desmos.com/calculator/fbro2qenjj?lang=es> para apreciar de mejor forma la gráfica.



## « Traslaciones en el plano de la función potencia

La adición de un número a la función potencia provoca una traslación de su gráfica.

**Caso 1:** adición de un número real  $k$  a  $f(x) = x^n$ .

Se obtiene la función  $f_1(x) = x^n + k$ , cuya gráfica corresponde a la original trasladada  $k$  unidades a lo largo del eje  $Y$  (traslación vertical).

**Caso 2:** adición de un número real  $h$  al término  $x$  en  $f(x) = x^n$ .

Se obtiene la función  $f_2(x) = (x + h)^n$ , cuya gráfica corresponde a la original trasladada  $(-h)$  unidades a lo largo del eje  $X$  (traslación horizontal).



## Para terminar la Lección 3...

- ¿Qué características tienen los fenómenos que pueden modelarse usando la función potencia?
- ¿Qué simplificaciones realizaste para modelar la realidad con la función potencia?
- ¿Cuánto apoyó tu trabajo en la lección el uso de herramientas tecnológicas?

# Aplicación de modelos con las funciones seno y coseno

## Caracterizando las funciones seno y coseno

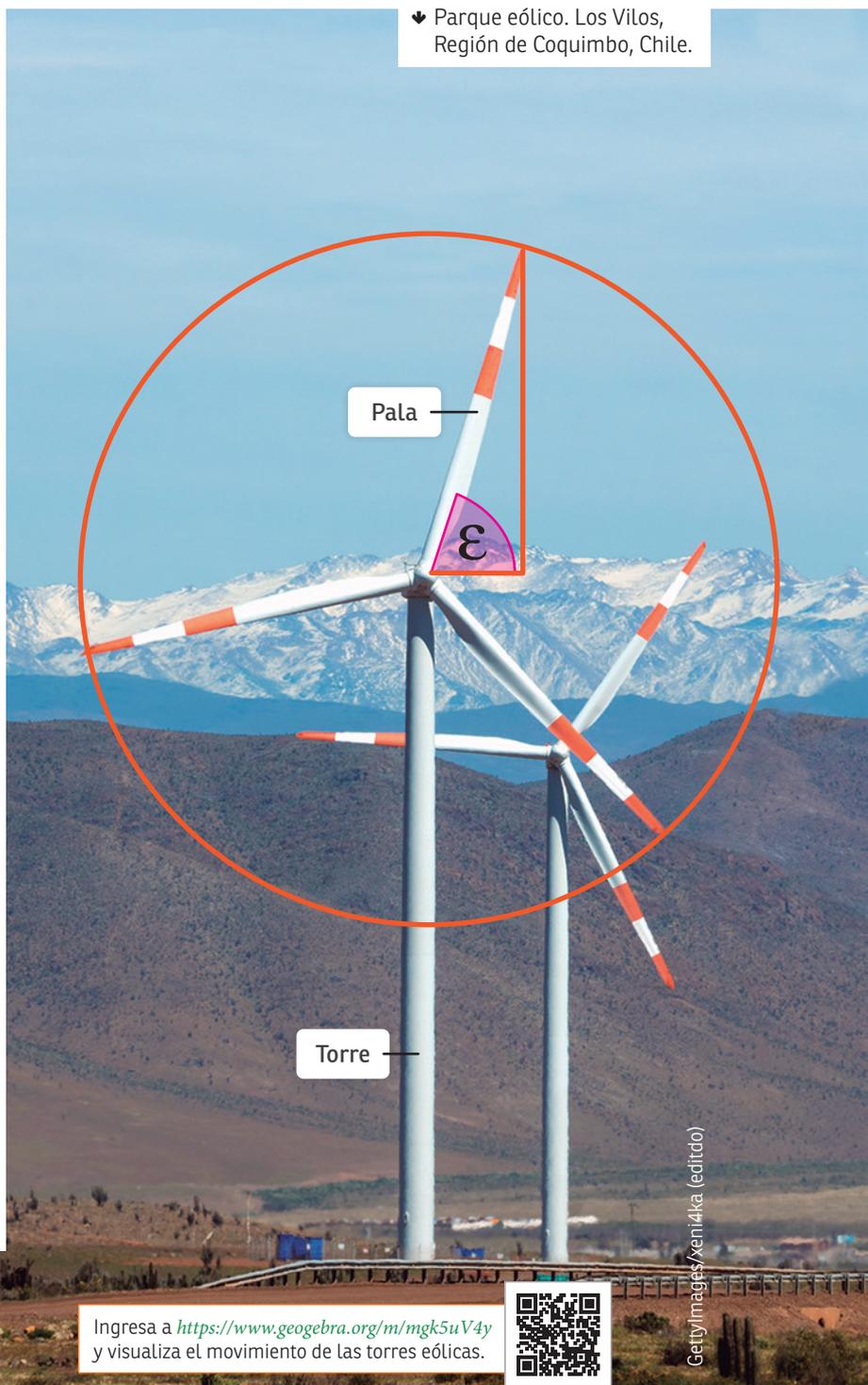
La energía eólica se obtiene del viento. En la actualidad, este tipo de energía se utiliza para generar electricidad mediante aerogeneradores.

En Chile, las regiones con mayor capacidad de generación de este tipo de energía son las de Coquimbo, Atacama y Antofagasta.

En la imagen se destaca un aerogenerador con su torre principal de 95 m y con sus palas de 50 m de longitud.

- ¿Hay parques eólicos en tu región?, ¿cuáles son sus nombres? Investiga y da un motivo que explique la presencia o ausencia de parques de este tipo en la región en que vives.
- ¿Cuál es la medida del ángulo que forman dos palas contiguas del aerogenerador destacado en la imagen? Considera que las palas se distribuyen en forma equidistante.
- ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el extremo superior de la pala destacada en la imagen? ¿Qué razón trigonométrica ocupaste para responder la pregunta anterior?
- ¿Cómo puedes expresar esta altura para un valor cualquiera de  $\epsilon$ ?
- ¿Cuál es el valor mínimo que puede adquirir  $\epsilon$  al ir girando las palas del aerogenerador?, ¿y el máximo? Trabaja con una compañera o con un compañero y propongan un intervalo de valores posibles.

↓ Parque eólico. Los Vilos, Región de Coquimbo, Chile.



Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/mgk5uV4y> y visualiza el movimiento de las torres eólicas.



Getty Images/Xeni4ka (editao)

## « Razones trigonométricas seno y coseno



Las **razones trigonométricas seno y coseno** permiten describir y estudiar fenómenos periódicos, tales como el movimiento de los cuerpos celestes, los latidos del corazón, la vibración de un instrumento de cuerdas, entre otros. Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/HdnfNmWA>, para visualizar lo anteriormente descrito.



- 1 ¿Qué fenómenos, distintos a los mencionados, poseen periodicidad? Da dos ejemplos y descríbelos.

Para analizar las funciones seno y coseno, primero revisaremos el radián como unidad de medida de ángulos.

## « Radián

El **radián** es una unidad de ángulo plano del Sistema Internacional equivalente a un ángulo cuyo arco de circunferencia tiene igual longitud que el radio. La medida de un ángulo de  $360^\circ$  expresada en radianes es  $2\pi$ .



- 2 ¿Cuántas veces cabe la medida del radio de una circunferencia en su perímetro? ¿Depende la respuesta de la medida del radio?
- 3 ¿Cuál es el valor numérico de  $2\pi$  redondeado a la centésima?

### EJEMPLO 1 » Medición de ángulos en radianes.

¿Cuántos radianes mide un ángulo de  $30^\circ$ ?

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/tEj9mZ3R> para visualizar qué es un radián.

#### Paso a Paso

1. Aplica la igualdad entre grados sexagesimales y radianes.

Radianes	Grados sexagesimales
$2\pi$	$360^\circ$
$\alpha$	$30^\circ$

2. Calcula el valor de  $\alpha$ .

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{360^\circ}{30^\circ} \quad \triangleright \quad \alpha = \frac{30^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$$

3. Responde.

Un ángulo de  $30^\circ$  es congruente a uno de  $\frac{\pi}{6}$  radianes.

- 4 En la situación del aerogenerador, ¿cuál es el valor de  $\epsilon$  expresado en radianes?
- 5 La relación entre la medida de ángulos en grados sexagesimales y en radianes, ¿es directamente proporcional o no lo es? Respondan proponiendo dos ejemplos numéricos.
- 6 ¿Cómo pueden utilizar un conversor *online* para establecer equivalencias entre grados sexagesimales y radianes? Conéctense a <https://bit.ly/3nkN4JB> y comprueben las equivalencias anteriores.



## EJEMPLO 2 >> Construcción de modelos con la función seno.

¿Qué modelo permite describir la altura  $H$  del extremo de la pala del aerogenerador de la situación inicial?

### Paso a Paso

1. Dibuja un esquema de la situación que muestre el significado geométrico de las variables de interés.

Las variables involucradas son:

$\epsilon$ : medida del ángulo que forma la pala destacada y la horizontal.

$H$ : altura del extremo de la pala destacada respecto del suelo (m).

Además, se tiene que:  $H = h + b$ , en que  $h$  representa la longitud de la torre del aerogenerador.

2. Determina el valor de  $h$ .

Como  $h$  es la longitud de la torre del aerogenerador, su valor es 95 m.

3. Calcula el valor de  $b$  (medido en metros).

Considerando que la longitud de la pala es 50 m, escribe la relación entre

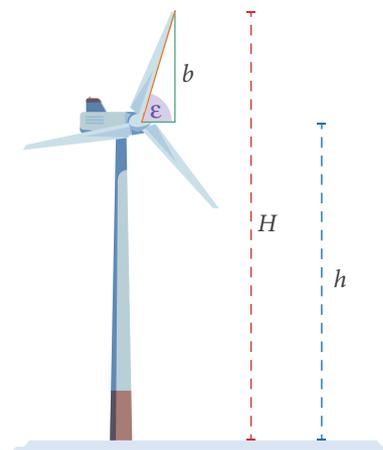
$\epsilon$  y  $b$  usando la razón trigonométrica seno:  $\blacktriangleright \text{sen } \epsilon = \frac{b}{50}$

Multiplicando por 50, queda:  $\blacktriangleright b = 50 \cdot \text{sen } \epsilon$

4. Responde.

El modelo se obtiene reemplazando en la ecuación deducida en el **Paso 1** los valores hallados

en los **Pasos 2 y 3**:  $\blacktriangleright H = 95 + 50\text{sen } \epsilon$



Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/Qa98yv8F> para visualizar la gráfica de la función seno.

- 7 ¿Cuál es la altura máxima y cuál la mínima que alcanza el extremo de la pala del aerogenerador?
- 8 ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función  $H(\epsilon)$  en el contexto del problema?
- 9 ¿Cuál es el valor de  $H$  en la posición del generador que se muestra en el esquema? Considera  $\epsilon = 60^\circ$ .

### << Función seno

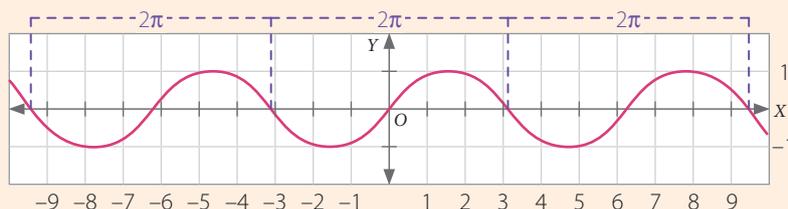
La **función seno** se puede expresar a través de la siguiente ecuación:

$$f(x) = \text{sen } x$$

En ella,  $x$  es un ángulo medido en radianes y adquiere valores en todo el conjunto  $\mathbb{R}$ , y  $f$  toma valores en el intervalo real  $[-1, 1]$ .

Algunas de sus características son:

- Es periódica y su período es  $2\pi$ . Por tanto, en unos tramos crece y en otros decrece.
- Se cumple que  $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$ .



¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función seno?

Que el período sea  $2\pi$  significa que se cumple  $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2n\pi)$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ .

A esta curva se le denomina senoide o senoide.



### EJEMPLO 3 >> Construcción de modelos con la función coseno.

¿Qué magnitud podría modelarse con la función coseno en la situación del aerogenerador?

#### Paso a Paso

1. Define la magnitud que se modelará.

La magnitud que se modelará será  $a$ , definida como la longitud en metros de la proyección horizontal de la pala del aerogenerador.

2. Dibuja un esquema del aerogenerador y las variables que se definirán en el modelo.

Las variables que se consideran son:

$\epsilon$ : medida del ángulo que forma la pala destacada y la horizontal.

$a$ : medida de la proyección horizontal de la pala destacada (m).

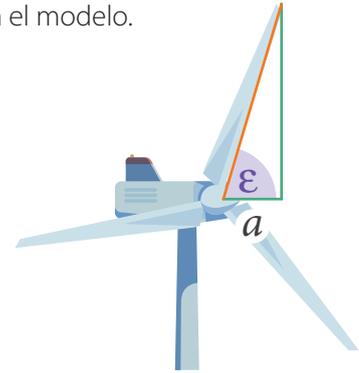
3. Determina el valor de  $a$  (medido en metros).

Considerando que la longitud de la pala es 50 m, escribe la relación entre  $\epsilon$  y  $a$  usando la razón trigonométrica coseno:  $\cos \epsilon = \frac{a}{50}$

Multiplicando por 50, queda:  $a = 50 \cdot \cos \epsilon$

4. Responde.

La magnitud es  $a$ , definida como la longitud de la proyección horizontal de la pala y se modelará mediante la siguiente ecuación:  $a = 50 \cos \epsilon$



Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/xxhnSXDp> para visualizar la gráfica de la función coseno.

10 ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función  $a(\epsilon)$  en el contexto del problema?

11 ¿Cuál es el valor de  $a$  en la posición del generador que se muestra en el esquema? Considera  $\epsilon = 60^\circ$

### << Función coseno

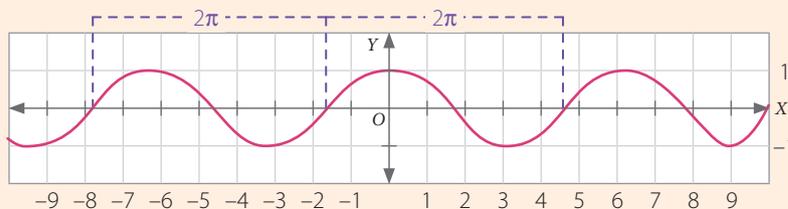
La **función coseno** se puede expresar a través de la siguiente ecuación:

$$f(x) = \cos x$$

En ella,  $x$  es un ángulo medido en radianes y adquiere valores en todo el conjunto  $\mathbb{R}$ , y  $f$  toma valores en el intervalo real  $[-1, 1]$ .

Algunas de sus características son:

- Es periódica y su período es  $2\pi$ . Por tanto, en unos tramos crece y en otros decrece.
- Se cumple que  $\cos(-x) = \cos x$ .



La periodicidad de la función coseno es similar a la de la función seno, es decir:  $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

A esta curva se le denomina cosinusoide.

12 ¿Qué diferencias notan en las gráficas de las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$ ? Describanlas e identifiquen los tramos del eje  $X$  en que la función coseno crece y en los que decrece.

## » Aumento del nivel del mar. Efecto de la atracción gravitacional.

Ciencias para la Ciudadanía (Ambiente y sostenibilidad)



La marea oceánica es el movimiento de ascenso o descenso del agua en las costas del mar, según la Agencia Espacial Europea (ESA, por sus siglas en inglés). El comportamiento de esta depende de **la atracción gravitatoria entre la Luna y, en menor medida, del Sol.**

La Luna se encuentra a **385 mil kilómetros de distancia con la Tierra** y ambos objetos ejercen una fuerza gravitatoria el uno sobre el otro, indica ESA. Considerando que el satélite tiene una órbita elíptica (circunferencia achatada y alargada, en vez de un círculo), **la fuerza gravitatoria ejercida se comporta de acuerdo a la distancia** en la que se encuentren:

- **Cuando la Luna está en perigeo** (más cerca de la Tierra), "la fuerza productora de mareas es un 20 % mayor que el promedio". Según ESA, los niveles de agua de las superficies más cercanas a la Luna **aumentan unos diez metros.**

- **Cuando la Luna está en apogeo** (más lejos de la Tierra) "la fuerza es un 20 % menor que el promedio" y **los niveles de agua se normalizan.**

Otro condicionamiento de la fuerza de marea lo provoca el Sol. NASA explica que no ejerce tanta fuerza gravitacional como sí lo hace la Luna. Según la agencia norteamericana, "cuando la Tierra, la Luna y el Sol se alinean (luna llena o luna nueva) **las mareas lunares y solares se refuerzan entre sí**, dando lugar a las mareas vivas".

Fuente: National Geographic, disponible en:  
<https://www.nationalgeographic.com/espacio/2022/12/por-que-la-luna-afecta-el-estado-del-mar>



### Apliquemos lo estudiado

En una zona costera se está realizando un estudio para determinar cuánto ha aumentado el nivel del mar en los últimos años. Las mediciones muestran que la profundidad del mar puede ser modelada por la siguiente función  $h$ :

$$h(t) = -2,5 \cdot \cos \left[ \frac{\pi}{6} \cdot (t - 2) \right] + 3,5$$

Esta función es experimental y modela de mejor forma lo descrito anteriormente, la variable  $h$  es la profundidad medida en metros y  $t$  es el tiempo, tal que  $t = 0$  corresponde a las 12 a. m.

#### EJEMPLO 4 >> Modelamiento de fenómenos usando la función coseno.

De acuerdo con la función que modela la profundidad del mar en la zona costera, ¿a qué hora  $h$  adquiere su valor mínimo (marea baja) y a qué hora asume su valor máximo (marea alta)?

#### Paso a Paso

1. Determina el valor mínimo de  $h$ .

Para visualizar mejor el valor de la función, escríbela así:  $\blacktriangleright h(t) = 3,5 - 2,5 \cdot \cos \left[ \frac{\pi}{6} \cdot (t - 2) \right]$

De acuerdo con esta expresión, se puede deducir que el valor mínimo para  $h$  es de 1 m y se produce cuando el valor de  $\cos \left[ \frac{\pi}{6} \cdot (t - 2) \right]$  es máximo, es decir, 1. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \cos \left[ \frac{\pi}{6} \cdot (t - 2) \right] &= 1 \\ \frac{\pi}{6} \cdot (t - 2) &= 0 \quad \leftarrow \text{ dado que } \cos 0 = 1. \\ t - 2 &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Ingresa a <https://www.geogebra.org/classic?lang=es> para realizar la gráfica de la función anteriormente descrita.

Es decir, el valor mínimo de  $h$  se produce a las 2 a. m.

2. Determina el valor máximo de  $h$ .

A partir de la expresión reescrita, se puede deducir que el valor máximo para  $h$  es de 6 m y se produce cuando el valor de  $\cos \left[ \frac{\pi}{6} \cdot (t - 2) \right]$  es mínimo, es decir,  $-1$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \cos \left[ \frac{\pi}{6} \cdot (t - 2) \right] &= -1 \\ \frac{\pi}{6} \cdot (t - 2) &= \pi \quad \leftarrow \text{ dado que } \cos \pi = -1. \\ t - 2 &= 6 \\ t &= 8 \end{aligned}$$

Entonces, el valor máximo para  $h$  se produce a las 8 a. m.

3. Responde.

Dado que  $t = 0$  corresponde a las 12 a. m., la marea baja se produce a las 2 a. m. (y 2 p. m.) y la marea alta, a las 8 a. m. (y 8 p. m.).

13  ¿Por qué en la respuesta se agregan los valores 2 p. m. para la marea baja y 8 p. m. para la marea alta? Respondan a partir del concepto de periodicidad de la función coseno.

## Prácticas ancestrales

### Medicinas yagán y mapuche



📍 Parque El Boldo (Zapallar). Región de Valparaíso.

inaturalist.mma.gob.cl/Italo Pérez Codern

Los pueblos Originarios han recurrido a lo que su entorno les ofrece para enfrentar las dolencias físicas y mentales que los aquejan. Es así como yaganes y mapuche realizaron diversas prácticas medicinales a partir de principios basados en sus experiencias y en sus creencias.

**Boldo:** planta usada en la medicina mapuche para combatir dolores estomacales y como sedante.

A continuación se describen parte de las técnicas ocupadas por cada cultura:

### Medicina yagán

Los yaganes sufrían pocas enfermedades y esto era una ventaja considerando la poca variedad de elementos curativos que les entregaba la naturaleza. Normalmente la familia del enfermo era quien asumía los cuidados, recurriendo a diversos tratamientos en los que la aplicación de masajes y calor resultaban ser la solución ante problemas respiratorios, de indigestión, de dolor de cabeza y de dolores musculares.

Una práctica común era el ayuno completo durante un día, con el objeto de curar cualquier indisposición. De esta forma, el enfermo se acurrucaba en su choza cubierto por varias pieles al calor del fuego con el objeto de transpirar al máximo.

### Medicina mapuche

Las condiciones botánicas fueron fundamentales para el desarrollo de un conjunto de conocimientos y tratamientos contra enfermedades basados en plantas medicinales que se transmitieron por tradición oral hasta la época de la conquista. Los machi eran los médico-sacerdotes que se encargaban de tratar los males corporales y del alma, preparando cataplasmas, infusiones y baños para los enfermos.

A través del conocimiento profundo de las propiedades botánicas, este pueblo logró transmitir una rica tradición de infusiones y tratamientos perfectamente conocidos y aplicados hasta el día de hoy.

**Fuente:** Medicina ancestral de los pueblos originarios, Carlos Vega Cacabelos, Región de Magallanes y Antártica Chilena 2020.

Averigua más sobre la medicina de las culturas yagán y mapuche conectando con <https://bit.ly/3G0wvZJ>  
¿Qué diferencia y qué similitud identificas en la forma de aplicar la medicina de estas dos culturas originarias?



### Apliquemos lo estudiado

El Ministerio de Salud financia un centro de salud mapuche al que llegan personas a complementar su tratamiento tradicional con la medicina ancestral de este pueblo.

Considera que la presión arterial normal de una persona puede modelarse en el tiempo de acuerdo con la siguiente función:

$$f(t) = 20 \cdot \text{sen}(160\pi t) + 100$$

En que  $f$  es la presión arterial medida en milímetros de mercurio (mmHg) y  $t$  es el tiempo medido en minutos (min).

### EJEMPLO 5 >> Modelamiento de fenómenos usando la función seno.

Considera que una persona enferma llega al centro médico mapuche y en el chequeo inicial registra una presión arterial de 130 mmHg. ¿Se encuentra este valor dentro del rango de presión normal determinado por el modelo propuesto?

#### Paso a Paso

1. Determina el valor mínimo de  $f$ .

Como el valor mínimo de la función seno es  $-1$ , entonces, el valor mínimo de  $f$  es el siguiente:

$$f_{\text{mín}} = 20 \cdot (-1) + 100$$

$$f_{\text{mín}} = -20 + 100$$

$$f_{\text{mín}} = 80$$

Por lo tanto, el valor mínimo de  $f$  es 80 mmHg.

2. Determina el valor máximo de  $f$ .

Como el valor máximo de la función seno es  $1$ , entonces, el valor máximo de  $f$  es el siguiente:

$$f_{\text{máx}} = 20 \cdot 1 + 100$$

$$f_{\text{máx}} = 20 + 100$$

$$f_{\text{máx}} = 120$$

Por lo tanto, el valor máximo de  $f$  es 120 mmHg.

3. Responde.

Como la presión arterial del paciente es mayor que el valor máximo de la función  $f$ , se encuentra fuera del rango normal establecido.

## Modificando parámetros de las funciones seno y coseno

Para describir la velocidad de un avión es útil descomponer este vector en sus componentes horizontal y vertical. En la imagen se aprecia el despegue de un aparato, la dirección de su velocidad ( $v$ ) y sus componentes horizontal ( $v_x$ ) y vertical ( $v_y$ ). Con el transcurso del tiempo la velocidad va variando y, por lo tanto, también lo hacen  $v_x$  y  $v_y$ .

Las rapidez habituales de vuelo son de alrededor de 70 m/s al despegar y de 250 m/s cuando se ha estabilizado el aparato.

✚ Despegue de avión en Aeropuerto Internacional Haneda, Tokio, Japón.

- ¿Has viajado en avión? ¿Qué es lo que más te llama la atención de las maniobras durante su vuelo?
- Dado que tras su despegue un avión va aumentando progresivamente su velocidad, ¿cómo cambia la medida de sus componentes? ¿De qué depende el aumento o disminución de estos valores? Explica.
- ¿Cómo expresarías las medidas de  $v_x$  y  $v_y$ ? ¿De qué variables dependen?
- ¿Qué funciones trigonométricas usarías para calcular las medidas de  $v_x$  y  $v_y$ ? Compara tu respuesta con las de tus compañeras y compañeros.



GettyImages/Taro Hama

## « Generalizaciones de las funciones seno y coseno

Las **funciones seno** y **coseno** se pueden escribir en forma más general de la siguiente manera:

- **Función seno:**  $f(x) = A \operatorname{sen}(Kx)$
- **Función coseno:**  $g(x) = A \operatorname{cos}(Kx)$

en que  $A$  y  $K$  son números reales distintos de cero.



### EJEMPLO 6 » Variación de la función $f(x) = A \operatorname{sen} x$ al modificar el parámetro $A$ .

¿Cómo varía la gráfica de  $f(x) = A \operatorname{sen} x$  al modificar el valor del parámetro  $A$ ?

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/GW93BJ9e> y visualiza de mejor forma lo explicado.

#### Paso a Paso

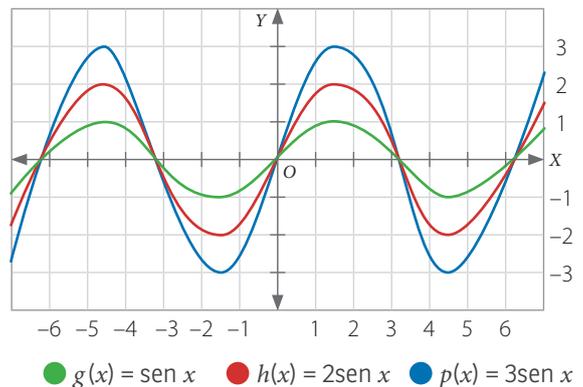
1. Considera funciones en que  $A$  varíe y adquiera tanto valores positivos como negativos.

**Caso 1** ( $A = 1, 2$  y  $3$ ):  $g(x) = \operatorname{sen} x$      $h(x) = 2 \operatorname{sen} x$      $p(x) = 3 \operatorname{sen} x$

**Caso 2** ( $A = 1, -1, -2$  y  $-3$ ):  $g(x) = \operatorname{sen} x$      $q(x) = -\operatorname{sen} x$      $r(x) = -2 \operatorname{sen} x$      $s(x) = -3 \operatorname{sen} x$

2. Responde.

Conéctate a un *software* matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy>, grafica las funciones definidas en el paso anterior y descríbelas.



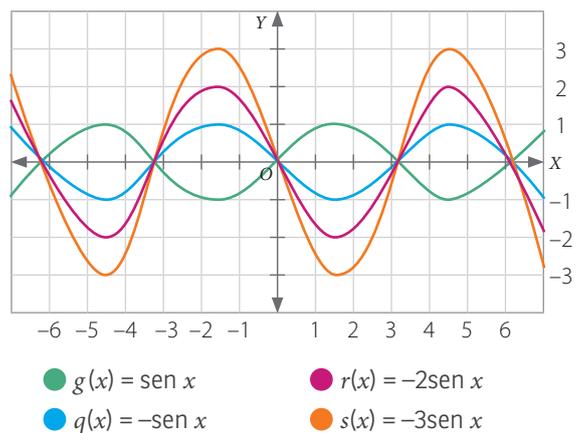
¿Cuáles son las amplitudes de las gráficas verde, roja y azul?, ¿qué concluyes a partir de esto?

#### Caso 1:

- En la medida en que se incrementa el valor del parámetro  $A > 0$ , partiendo de 1, aumenta el desplazamiento vertical de la función (se dilata). Es decir, aumenta la amplitud de su gráfica.
- La longitud horizontal y el período se conservan.
- Los cortes con el eje  $X$  coinciden.

#### Caso 2:

- Al dibujar las gráficas para  $A = 1$  y  $A = -1$ , se observa que se ha producido una traslación en  $\pi$  unidades a lo largo del eje  $X$ , es decir, cuando en la curva original había un máximo, ahora hay un mínimo y viceversa. También puede verse como una reflexión respecto del eje  $X$ . Esto se justifica tomando en consideración la propiedad  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ .
- Para los casos en que  $A < 0$ , se puede ver que en la medida que se incrementa el valor del parámetro  $A$ , empezando de  $-3$ , disminuye la amplitud de la gráfica (se contrae).
- La longitud horizontal y el período se conservan.
- Los cortes con el eje  $X$  coinciden.



- 1 En la situación inicial del avión que despeg, ¿qué expresiones representan las medidas de las componentes vertical y horizontal,  $v_x$  y  $v_y$ , cuando el módulo de la velocidad es  $70 \text{ m/s}$  y el ángulo de despegue mide  $30^\circ$ ? Explica cómo obtuviste la respuesta.

## « Modificación del parámetro $A$ en las funciones $f(x) = A \operatorname{sen} x$ y $g(x) = A \operatorname{cos} x$

Al modificar el parámetro  $A$  en las funciones  $f(x) = A \operatorname{sen} x$  y  $g(x) = A \operatorname{cos} x$ , tenemos los siguientes casos:

Incremento del valor de $A > 0$ :	Incremento del valor de $A < 0$ :
<ul style="list-style-type: none"> <li>La amplitud (desplazamiento vertical) de las curvas aumenta.</li> <li>La longitud horizontal y el período se conservan.</li> <li>Los cortes con el eje <math>X</math> ocurren en los mismos puntos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La amplitud (desplazamiento vertical) de las curvas disminuye.</li> <li>La longitud horizontal y el período se conservan.</li> <li>Los cortes con el eje <math>X</math> ocurren en los mismos puntos.</li> </ul>



### EJEMPLO 7 » Variación de la función $g(x) = \operatorname{cos}(Kx)$ al modificar el valor del parámetro $K$ .

¿Cómo varía la gráfica de  $g(x) = \operatorname{cos}(Kx)$  al modificar el valor del parámetro  $K$ ?

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/zgztjm3> y visualiza de mejor forma lo explicado.

#### Paso a Paso

1. Considera funciones en que  $K$  varíe y adquiera tanto valores positivos como negativos.

**Caso 1** ( $K = 1, 2$  y  $3$ ):  $g(x) = \operatorname{cos} x$      $h(x) = \operatorname{cos}(2x)$      $p(x) = \operatorname{cos}(3x)$

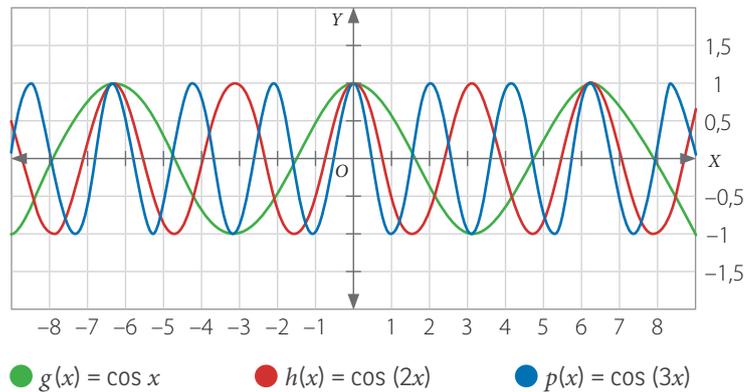
**Caso 2** ( $K = 1, -1, -2$  y  $-3$ ):  $g(x) = \operatorname{cos} x$      $q(x) = \operatorname{cos}(-x)$      $r(x) = \operatorname{cos}(-2x)$      $s(x) = \operatorname{cos}(-3x)$

2. Responde.

Conéctate a un *software* matemático en <https://bit.ly/2N8oBRy>, grafica las funciones definidas en el paso anterior y descríbelas.

#### Caso 1:

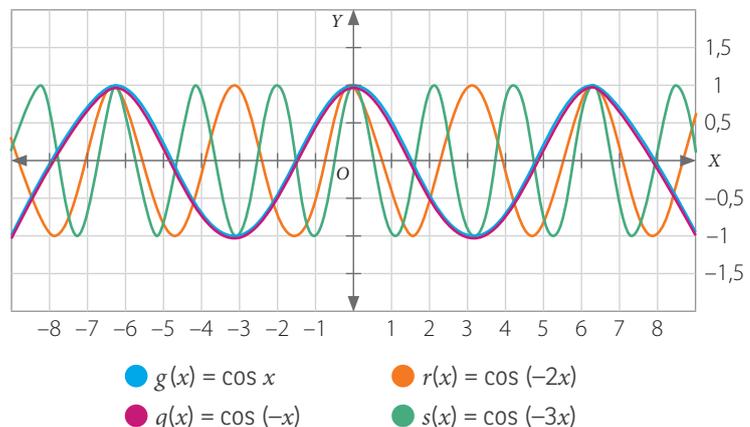
- En la medida en que se incrementa el valor del parámetro  $K > 0$ , partiendo de 1, disminuye el desplazamiento horizontal de la curva (se contrae). Esto ocurre dado que el período varía en forma inversamente proporcional a  $K$ . Así, por ejemplo, el período de la curva azul es  $2\pi$ , el de la curva anaranjada es  $\pi$  y el de la curva gris es  $\frac{2\pi}{3}$ .



- La amplitud de las curvas se conserva.

#### Caso 2:

- Al dibujar las gráficas para  $K = 1$  y  $K = -1$ , se observa que coinciden. Esto ocurre debido a la propiedad  $\operatorname{cos}(-x) = \operatorname{cos} x$ .
- Para los casos con  $K < 0$ , se puede ver que en la medida en que se incrementa el valor del parámetro  $K$ , empezando de  $-3$ , aumenta la longitud horizontal de la curva (se dilata).
- La amplitud de las curvas se conserva.



## « Modificación del parámetro $K$ en las funciones $f(x) = \text{sen}(Kx)$ y $g(x) = \text{cos}(Kx)$

Al modificar el parámetro  $K$  en las funciones  $f(x) = \text{sen}(Kx)$  y  $g(x) = \text{cos}(Kx)$ , tenemos los siguientes casos:

### Incremento del valor de $K > 0$ :

- El período disminuye, ya que varía en forma inversamente proporcional a  $K$ .
- La amplitud se conserva.

### Incremento del valor de $K < 0$ :

- El período aumenta, ya que varía en forma directamente proporcional a  $K$ .
- La amplitud se conserva.



## EJEMPLO 8 » Traslaciones de la función seno.

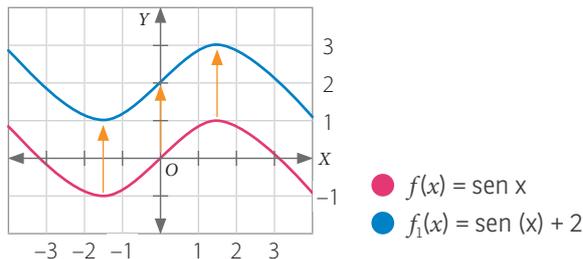
¿Qué variación provoca en la gráfica de  $f(x) = \text{sen } x$  la adición de 2 unidades?

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/ZQCPBzt2> y visualiza de mejor forma lo explicado.

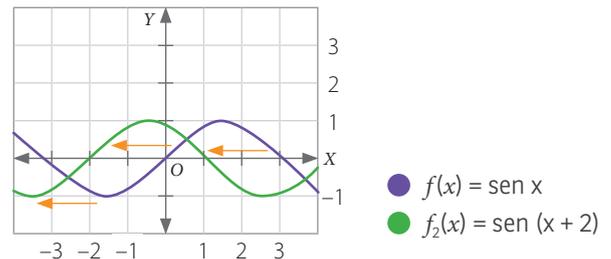
### Paso a Paso

1. Considera la adición a la función y la adición al término  $x$  y grafica.

**Caso 1:** La nueva función es  $f_1(x) = \text{sen}(x) + 2$ .



**Caso 2:** La nueva función es  $f_2(x) = \text{sen}(x + 2)$ .



2. Responde.

Sumar 2 a la función provoca una traslación de la gráfica 2 unidades en el sentido positivo del eje  $Y$ .

Sumar 2 al término  $x$  provoca una traslación de la gráfica 2 unidades en el sentido negativo del eje  $X$ .

## « Traslación en el plano de las funciones seno y coseno

La adición de un número en las funciones  $\text{sen } x$  y  $\text{cos } x$  provoca una traslación de sus gráficas:

**Caso 1:** Adición de un número  $k$  a  $f(x) = \text{sen } x$  o a  $g(x) = \text{cos } x$ .

Se obtienen las funciones  $f_1(x) = \text{sen}(x) + k$  o  $g_1(x) = \text{cos}(x) + k$ , cuyas gráficas corresponden a las originales trasladadas  $k$  unidades a lo largo del eje  $Y$  (traslación vertical).

**Caso 2:** Adición de un número  $h$  al término  $x$  en  $f(x) = \text{sen } x$  o en  $g(x) = \text{cos } x$ .

Se obtienen las funciones  $f_2(x) = \text{sen}(x + k)$  o  $g_2(x) = \text{cos}(x + k)$ , cuyas gráficas corresponden a las originales trasladadas  $(-h)$  unidades a lo largo del eje  $X$  (traslación horizontal).



### Para terminar La Lección 4...

- ¿Qué fenómenos de tu entorno son o parecen periódicos?
- ¿Qué errores cometiste al trabajar con funciones trigonométricas?
- ¿Cómo verificas que una información de internet es verdadera o precisa?

# Síntesis de Unidad 2

## LECCIÓN 3 >> Aplicación de modelos con la función potencia

### Aprendiste...

#### Función potencia

Expresada como ecuación:

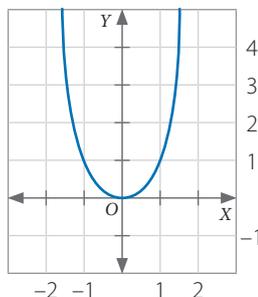
$$f(x) = ax^n$$

en que  $a$  es un número real y  $n$  es un número natural mayor o igual que 2.

#### Gráficas de la función potencia

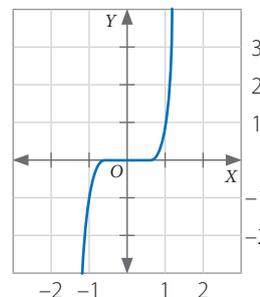
Caso  $n$  par:

$$f(x) = x^4$$



Caso  $n$  impar:

$$f(x) = x^7$$



#### Modificación de parámetros

- Al modificar los parámetros  $a$  y  $n$  en  $f(x) = ax^n$  las ramas de sus gráficas se acercan o alejan del eje  $Y$ .
- La gráfica de la función  $f_1(x) = x^n + k$  corresponde a una traslación en  $k$  unidades a lo largo del eje  $Y$  de la función  $f(x) = x^n$ .
- La gráfica de la función  $f_2(x) = (x + k)^n$  corresponde a una traslación en  $(-k)$  unidades a lo largo del eje  $X$  de la función  $f(x) = x^n$ .

¿Cuáles fueron los principales problemas que tuviste con estos contenidos?, ¿cómo los resolviste?

### Aplicaste...

- Características de la función potencia para construir modelos y predecir posibles escenarios de solución a un problema y para tomar decisiones fundamentadas.
- Modificación de parámetros para evaluar modelos que describen fenómenos de crecimiento y decrecimiento.

← ¿Qué ejemplo propondrías para mostrar la importancia de esta habilidad?

← ¿Cómo explicarías con tus propias palabras esta habilidad?

### Desarrollaste...

La conciencia de aceptar que muchas veces los errores ofrecen oportunidades para autocorregirse y para profundizar los aprendizajes.

← ¿Qué argumentos podría ofrecer una persona que no considere esta actitud como algo positivo?

## LECCIÓN 4 » Aplicación de modelos con las funciones seno y coseno

### Aprendiste...

#### Funciones seno y coseno

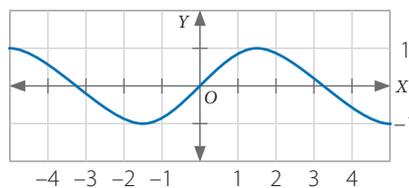
Expresadas como ecuaciones:

$$f(x) = \text{sen } x \quad g(x) = \text{cos } x$$

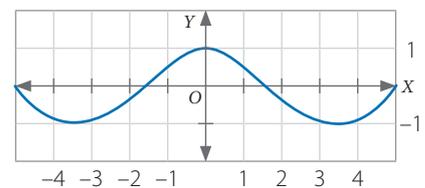
en que  $x$  es un ángulo medido en radianes.

#### Gráficas de las funciones seno y coseno

$$f(x) = \text{sen } x$$



$$g(x) = \text{cos } x$$



#### Modificación de parámetros

- Si aumenta  $|A|$  en  $f(x) = A \text{sen}(Kx)$  y  $g(x) = A \text{cos}(Kx)$ , se incrementa la amplitud de sus gráficas.
- Si aumenta  $|K|$  en  $f(x) = A \text{sen}(Kx)$  y  $g(x) = A \text{cos}(Kx)$ , se incrementa el período.
- La adición de  $p$  unidades a  $x$  en  $f(x) = \text{sen } x$  y  $g(x) = \text{cos } x$  provoca una traslación de sus gráficas en  $p$  unidades a lo largo del eje  $Y$ .
- La adición de  $h$  unidades a  $x$  en  $f(x) = \text{sen } x$  y  $g(x) = \text{cos } x$  provoca una traslación de sus gráficas en  $(-h)$  unidades a lo largo del eje  $X$ .

¿Qué similitudes y qué diferencias reconociste en las dos funciones trigonométricas estudiadas?

### Aplicaste...

- Características de las funciones seno y coseno para estudiar y modelar fenómenos, teniendo en consideración las simplificaciones realizadas.
- Modificación de parámetros para evaluar modelos que describen fenómenos periódicos.

← ¿Qué sabías de las razones seno y coseno?, ¿qué aprendizaje nuevo adquiriste sobre ellas?

← ¿Cómo explicarías las características de un fenómeno periódico?

### Desarrollaste...

Estrategias para gestionar el tiempo en forma responsable y así poder cumplir con las tareas asignadas.

← ¿Qué beneficios crees que puede traer el llevar un estilo de vida ordenado?



ALTO EN  
AZÚCARES

Ministerio  
de Salud

ALTO EN  
GRASAS  
SATURADAS

Ministerio  
de Salud

ALTO EN  
SODIO

Ministerio  
de Salud

ALTO EN  
CALORÍAS

Ministerio  
de Salud

Unidad

# 3

## Decido por mi salud y mi bienestar

### Modelos binomial y normal

- Cuando vas a un supermercado, ¿en qué pones atención al elegir un producto?, ¿por qué?
- ¿A qué señal de tránsito se asemeja la forma de los sellos de la imagen?, ¿con qué intención crees que se les asignó esa forma?

### Evaluando críticamente la Ley de alimentos

En 2016, se implementaron en Chile los sellos de advertencia en alimentos para prevenir enfermedades y frenar el aumento de la obesidad y el sobrepeso en la población.

- Selecciona 10 alimentos y elabora una tabla con la cantidad de ellos que tienen 0, 1, 2, 3 y 4 sellos. ¿Cuál de estos valores es más probable que obtengas si eliges al azar uno de estos alimentos?
- ¿Qué aspecto cuestionarías de la llamada «ley de sellos»? ¿por qué? Conéctate al *link* <https://bit.ly/3JTRLl3> y describe la principal objeción planteada allí.





Archivo editorial.



Encuentra en <https://bit.ly/2WpjsHB> el manual de etiquetado nutricional del Ministerio de Salud.

¿Cuáles son los dos principales factores que deberían influir en la elección de un alimento?

## Conocimientos previos

### Probabilidad

Es la medida de la certidumbre de que ocurra un suceso o evento en un experimento aleatorio. Se puede calcular con la regla de Laplace como el cociente entre la cantidad de resultados favorables al suceso y la cantidad total de resultados posibles.

### Azar

Comportamiento de un fenómeno o de una variable que no puede predecirse, pero que puede modelarse a partir de análisis estadísticos o probabilidades.

### Variable aleatoria finita o discreta

Función que asigna valores numéricos a los resultados de un experimento aleatorio. Se dice que es discreta porque esta asignación se hace a un número finito de valores entre dos valores dados de una característica. Ejemplo: la puntuación obtenida en un dado.

La función de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta corresponde a la probabilidad de que la variable asuma un valor dado.

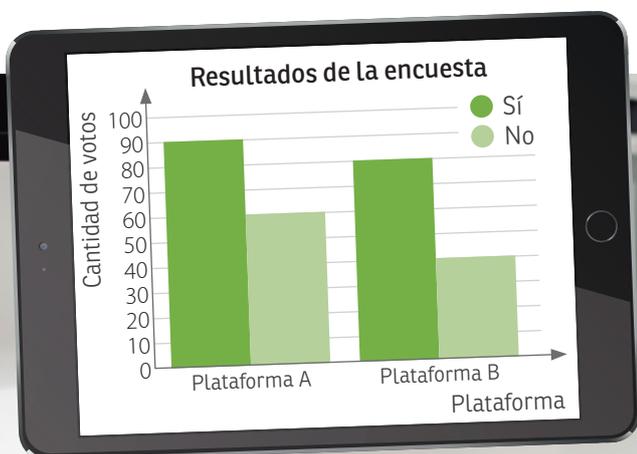
# Toma de decisiones con el modelo binomial

## Calculando probabilidades con la distribución de Bernoulli

En una reunión de pauta de un programa de televisión analizaron la opción de invitar a un grupo de expertos en alimentación saludable, pero no saben si este tema es del interés de su audiencia. Para tomar la decisión, realizaron una votación a través de dos plataformas digitales distintas, en la que cada persona puede responder solo una vez a la interrogante «¿Te gustaría recibir recomendaciones para una alimentación saludable?».

Carlos y Paulina están muy interesados en recibir recomendaciones para alimentarse saludablemente, así que deciden votar.

- ¿Por qué piensas que es importante tener una alimentación saludable?
- ¿Crees que tu alimentación es saludable? ¿Qué alimentos incluirías o quitarías de tu alimentación?
- Si se selecciona a un votante al azar de los que contestaron la encuesta por una de las dos plataformas, ¿cuál es la probabilidad de que haya marcado Sí?
- El programa quiere regalar un libro muy cotizado por los interesados en la alimentación saludable y deciden hacerlo entre los votantes de la plataforma A. ¿Estimas que es una buena decisión?, ¿por qué? Fundamenta.



Archivo editorial.

## « Distribución de Bernoulli

Un experimento aleatorio de Bernoulli presenta solo dos resultados posibles: éxito o fracaso. La variable aleatoria discreta  $X$  que indica el éxito en un experimento de Bernoulli si  $X = 1$  y su fracaso si  $X = 0$ , tiene **distribución de Bernoulli** cuando su función de probabilidad está definida por:

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \text{ para } x = \{0, 1\} \text{ (fracaso o éxito)}$$

en que  $p$  es la probabilidad de éxito y  $(1 - p)$  es la probabilidad de fracaso. »

- 1 Si la probabilidad del suceso éxito es igual a  $p$ , ¿qué condiciones debe cumplir este valor?
- 2 ¿Cuánto suman la probabilidad de éxito  $p$  y la de fracaso  $(1 - p)$ ?
- 3 Si  $Y$  es la variable aleatoria discreta asociada a la votación en la plataforma B e  $Y = 1$  significa que un voto fue Sí, ¿cómo interpretarías  $P(Y = 0)$ ?

### EJEMPLO 1 » Cálculo de probabilidad en una distribución de Bernoulli.

¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a una persona de la plataforma A que marcó Sí en la votación?

#### Paso a Paso

1. Define el experimento de Bernoulli.

Seleccionar a una persona que contestó en la plataforma A y registra su respuesta en Sí.

2. Define el suceso éxito.

Seleccionar a una persona que respondió Sí en la plataforma A.

3. Calcula la probabilidad de éxito y la de fracaso.

Una manera de calcular la probabilidad de éxito es utilizar la regla de Laplace. Al mirar el gráfico se aprecia que la cantidad total de personas que votaron en la plataforma A son 150 y que de ellas 90 respondieron Sí. Por lo tanto, se cumple lo siguiente:

La probabilidad de éxito es  $p = \frac{90}{150} = 0,6$ .

La probabilidad de fracaso es  $(1 - p) = 1 - 0,6 = 0,4$ .

4. Determina la función de probabilidad del experimento de Bernoulli.

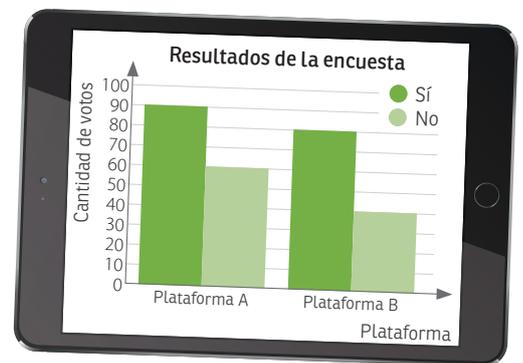
Llamemos  $X$  a la variable aleatoria asociada a la votación en la plataforma A. Entonces, su función de probabilidad es  $f(x) = P(X = x) = 0,6^x \cdot 0,4^{1-x}$ , para  $x = \{0, 1\}$ .

5. Calcula  $P(X = 1)$ .

$$f(1) = P(X = 1) = 0,6^1 \cdot 0,4^{1-1} = 0,6$$

6. Responde.

La probabilidad de que una persona que votó en la plataforma A haya marcado Sí es 0,6.



- 4 ¿Qué otra pregunta podrían responder a partir del resultado anterior? Redáctenla y soliciten a otro grupo que la responda justificando matemáticamente su respuesta.

## » Créditos hipotecarios y sus costos

### Historia, Geografía y Ciencias Sociales

El costo de las viviendas en Chile tuvo un incremento sostenido en los últimos años. Por ejemplo, en 2021 nuestro país se posicionó entre los 25 países del mundo con mayor crecimiento de precios (de acuerdo con la consultora internacional Knight Frank).

Las explicaciones más frecuentes para las alzas son variadas: la falta de suelo disponible, el exceso de regulaciones, el alto precio de los materiales de construcción y la escasez de mano de obra por las medidas restrictivas durante la pandemia por COVID-19. Un factor que podría presionar los precios a la baja es que, debido a la dificultad para acceder a créditos hipotecarios, la intención de compra podría verse reducida.

En la actualidad la mayoría de los créditos hipotecarios financian solo un 80 % del precio, por lo que las familias deben tener ahorros para costear el 20 % restante del valor de la vivienda.



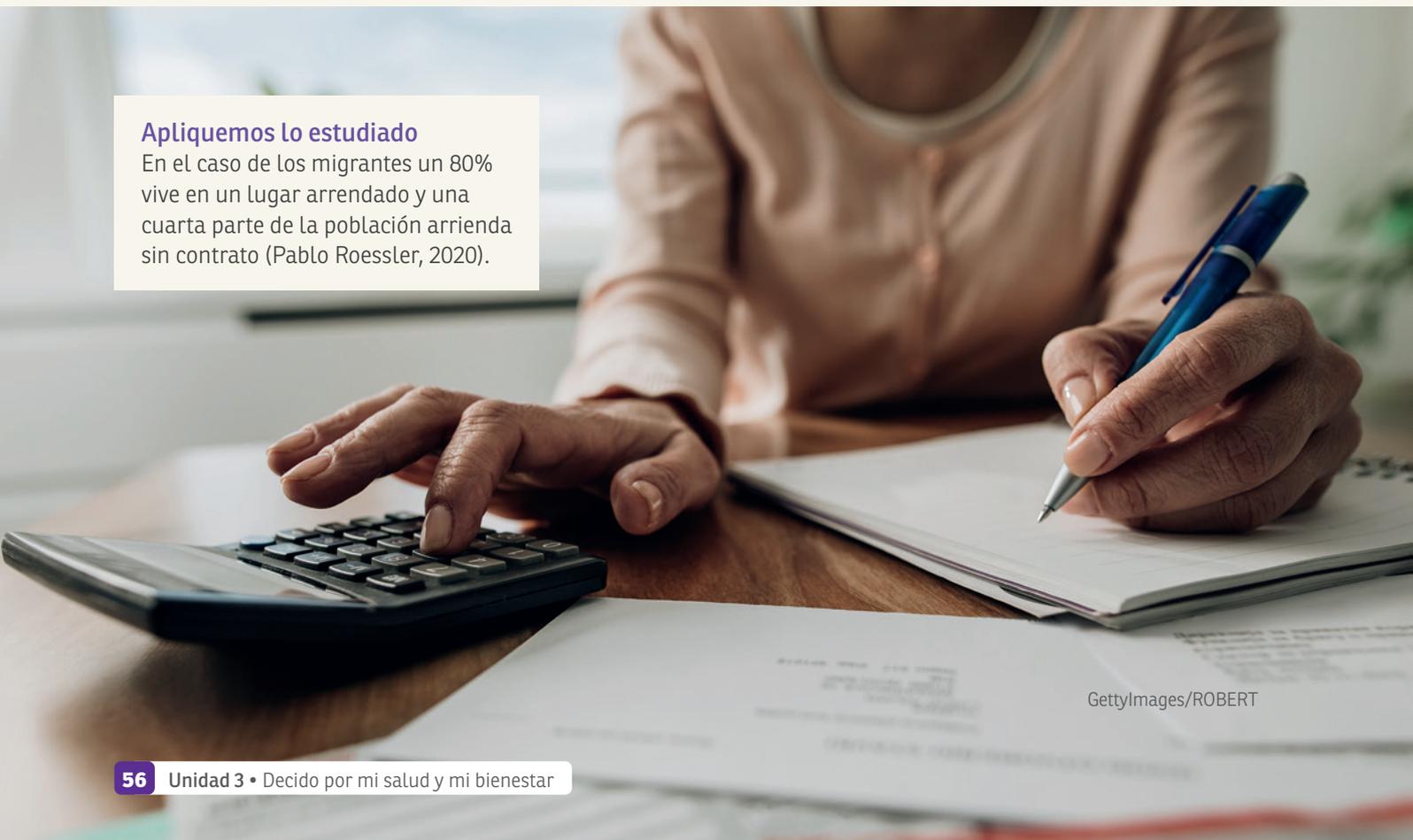
Para profundizar en el concepto de crédito hipotecario, conéctate a <https://bit.ly/42NBNSc>  
¿A qué se denomina hipoteca?



**Fuente:** Troncoso, J. (21 de marzo de 2022). Chile terminó 2021 entre los 25 países del mundo con mayor alza en el precio de la vivienda. *Diario financiero*. <https://bit.ly/3LS2K0G>

### Apliquemos lo estudiado

En el caso de los migrantes un 80% vive en un lugar arrendado y una cuarta parte de la población arrienda sin contrato (Pablo Roessler, 2020).



GettyImages/ROBERT

## EJEMPLO 2 >> Modelamiento de situaciones utilizando el modelo de Bernoulli.

¿Cómo se puede aplicar el modelo de Bernoulli para calcular la probabilidad de que una persona migrante arriende una vivienda y que sea con contrato?

### Paso a paso

1. Define el experimento de Bernoulli.

- **Éxito:** Persona migrante que arrienda con contrato.
- **Fracaso:** Persona migrante que arrienda sin contrato o que no arrienda.

2. Determina la probabilidad  $p$  de éxito.

Para calcularla, se usa como dato que el 80% arrienda, luego las que no arriendan corresponden a un 20%. De las que arriendan, el 25% es sin contrato, las que tienen contrato corresponde a la diferencia, es decir,  $80\% - 25\% = 55\%$ .

$$p = P(\text{éxito}) = 0,55$$

3. Calcula la probabilidad de fracaso.

Se calcula como  $(1 - p) = P(\text{fracaso}) = 1 - 0,55 = 0,45$

4. Determina la variable aleatoria asociada al experimento de Bernoulli.

Se puede definir la variable aleatoria  $X$  de la siguiente manera.

$$X \begin{cases} \leftarrow 0, & \text{si la persona migrante arrienda sin contrato o que no arriende.} \\ \leftarrow 1, & \text{si la persona migrante arrienda con contrato.} \end{cases}$$

5. Determina la función de probabilidad  $X$ .

La función es la siguiente:

$$P(X = x) = f(x) = 0,55^x \cdot 0,45^{1-x}$$

6. Calcula  $P(X = 1)$ .

$$P(X = 1) = f(1) = 0,55^1 \cdot 0,45^{1-1} = 0,55 \cdot 0,45^0 = 0,55$$

7. Responde.

Tras aplicar el modelo de Bernoulli, la probabilidad de que una persona migrante arriende con contrato corresponde a 0,55.

- 5 ¿Coincide la probabilidad calculada con la que hubieras obtenido aplicando la regla de Laplace directamente? Haz el cálculo, comenta y comparte tu resultado con tu curso.

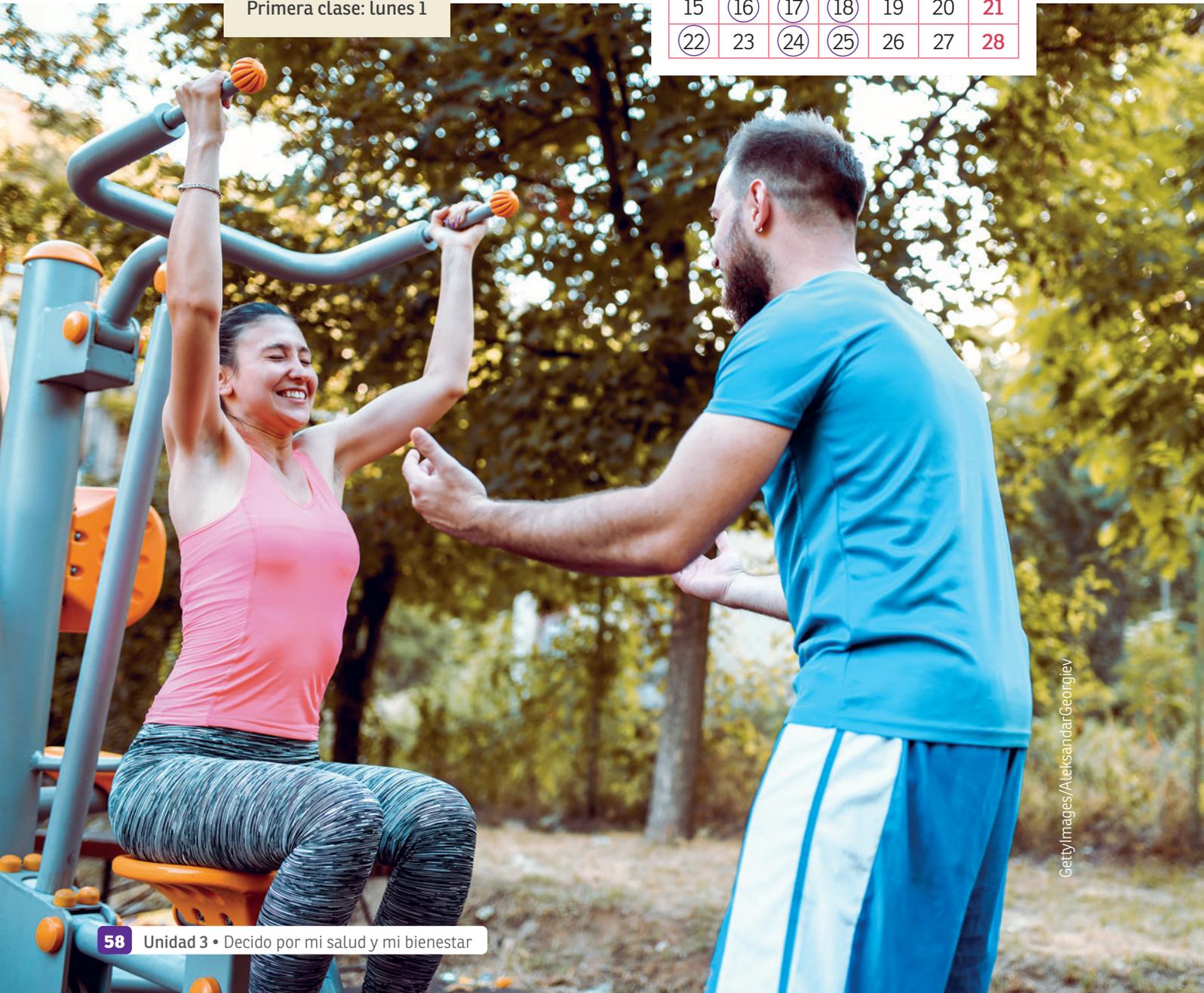
## Decidiendo con la distribución binomial

Sofía cree que lleva una vida sedentaria, pero tiene dudas al respecto, así que contacta a Joaquín, un amigo que es preparador físico, quien le realiza una serie de pruebas de resistencia y luego analiza junto con ella sus indicadores físicos. La conclusión a la que llega es que efectivamente Sofía necesita llevar una vida más activa para no poner en riesgo su salud. Joaquín le ofrece un plan de entrenamiento que consiste en asistir 3 veces por semana a la clase de ejercicios que imparte a un grupo de personas. Los días en que se realizarán las clases ese mes se muestran en el calendario adjunto.

- ¿Qué riesgos para la salud piensas que conlleva tener una vida sedentaria?
- Si se selecciona al azar un día del calendario, ¿cuál es la probabilidad de que Sofía deba asistir a la clase ese día?
- Si se selecciona al azar un día laboral (de lunes a viernes) del calendario, ¿cuál es la probabilidad de que Sofía no deba asistir a la clase ese día?

Calendario						
L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

Primera clase: lunes 1



Gettyimages/AleksandarGeorgiev

## « Distribución binomial

Se realizan  $n$  experimentos de Bernoulli de probabilidad de éxito  $p$ . La variable aleatoria  $X$ , asociada al número de éxitos que ocurren en  $n$  experimentos de Bernoulli independientes, tiene **distribución binomial**, con parámetros  $n$  y  $p$ , que se simboliza  $X \sim B(n, p)$  si la probabilidad de obtener exactamente  $x$  éxitos en las  $n$  repeticiones viene dada por la expresión:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$$

en que

- $f(x)$  es la probabilidad de  $x$  éxitos en  $n$  intentos.
- $x$  puede tomar los valores  $0, 1, 2, \dots, n$  y  $P(X = x) = 0$  para otros valores de  $x$ .
- Coeficiente binomial  $\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}$ , en que el factorial de un número  $a$  es  $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a$ . >>

- 1 ¿Qué condiciones debe cumplir un experimento que se modela con la variable aleatoria discreta  $X$  para que tenga una distribución de probabilidad binomial? Explica.

### EJEMPLO 3 >> Uso de la distribución binomial para calcular probabilidades.

Si se eligen al azar 4 días de una de las semanas del calendario, ¿cuál es la probabilidad de que solo en 1 Sofía deba asistir a entrenamiento?

#### Paso a Paso

1. Define el experimento aleatorio.

Seleccionar al azar un día de la semana y registrar si Sofía debe asistir o no a entrenamiento.

2. Define las condiciones del experimento.

El experimento se repite 4 veces de forma independiente. Por otro lado, como Sofía va a la clase 3 días de cada 7, la probabilidad de asistir es  $p = \frac{3}{7}$ .

3. Define la variable aleatoria y su distribución.

$X$ : cantidad de días que Sofía va a entrenamiento de los 4 seleccionados al azar.

En consecuencia, se cumple que  $X \sim B\left(4, \frac{3}{7}\right)$ .

4. Define la función de probabilidad y calcula la probabilidad. Aproxima tu resultado por redondeo a la centésima.

Función de probabilidad  $\blacktriangleright f(x) = P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right)^{4-x}$

$$P(X = 1) \blacktriangleright f(x) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{4-1} = \frac{768}{2401} \approx 0,32$$

5. Responde.

La probabilidad teórica de que deba asistir solo 1 día a entrenamiento de los 4 días seleccionados al azar es 0,32, aproximadamente.

- 2  ¿Cómo pueden calcular un coeficiente binomial usando una calculadora *online*? Conéctense a <https://bit.ly/4lowwio>, ingresen los valores de  $n$  y  $x$  y calculen el valor de  $\binom{n}{x}$ .



## « Función de distribución acumulada de una distribución binomial

Consideremos la variable aleatoria  $X$  con  $X \sim B(n, p)$ . La probabilidad de obtener a lo más  $k$  éxitos en las  $n$  repeticiones, es decir, la **función de distribución acumulada** de una variable aleatoria binomial, viene dada por la expresión:

$$F(k) = P(X \leq k) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + \dots + P(x=k)$$

Con  $0 \leq k \leq n$ .



- 3 ¿Por qué piensas que debe cumplirse la condición  $0 \leq k \leq n$ ? Explica.

### EJEMPLO 4 » Uso de la función de distribución acumulada para calcular probabilidades.

Si se eligen al azar 4 días de una de las semanas del calendario, ¿cuál es la probabilidad de que Sofía deba asistir a lo más 1 día a entrenamiento?

#### Paso a Paso

1. Reescribe la función de probabilidad de la variable aleatoria.

$$f(x) = P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{4-x}$$

2. Define la función de distribución acumulada de la variable aleatoria para  $k = 1$ .

Ya que se quiere saber la probabilidad de que a lo más asista 1 día a la clase, se tiene que:

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(x=0) + P(x=1)$$

3. Calcula la probabilidad. Aproxima tu resultado por redondeo a la centésima.

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(x=0) + P(x=1) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{4-0} + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{4-1} \\ &= \frac{4!}{(4-0)! \cdot 0!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \frac{4!}{(4-1)! \cdot 1!} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 \\ &= \frac{4!}{4! \cdot 1} \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \frac{4!}{3! \cdot 1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^4 + 4 \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^3 \\ &= \frac{4^4}{7^4} + \frac{12}{7} \cdot \frac{4^3}{7^3} \\ &= \frac{256}{2401} + \frac{768}{2401} = \frac{1024}{2401} \approx 0,43 \end{aligned}$$

4. Responde.

La probabilidad teórica de que Sofía deba asistir a entrenamiento a lo más 1 día de los 4 días seleccionados al azar es 0,43, aproximadamente.

- 4  ¿Cómo calcularían la probabilidad de que Sofía deba asistir a entrenamiento más de 1 día de los 4 seleccionados al azar? Expliquen su razonamiento y comparen el resultado que obtengan con los del resto del curso.

## » Exactitud de las pruebas rápidas de COVID-19

### Ciencias de la Salud

Las pruebas rápidas en el lugar de atención tienen como objetivo confirmar o descartar la infección por COVID-19 en personas con síntomas o sin ellos. Las personas con sospecha de COVID-19 necesitan saber con rapidez si están infectadas para poder aislarse, recibir tratamiento e informar sobre sus contactos cercanos.

Actualmente la infección por COVID-19 se confirma con una prueba de laboratorio llamada RT-PCR, que utiliza un equipo especializado y a menudo tarda al menos 24 horas en producir un resultado.

Las pruebas rápidas en el lugar de atención podrían abrir el acceso a realizar pruebas a muchas más

personas, con síntomas y sin ellos, potencialmente en otros lugares distintos de los centros sanitarios. Si este tipo de pruebas son exactas, un diagnóstico más rápido podría permitir que las personas tomen las medidas adecuadas más rápidamente, con el consecuente potencial de reducir la propagación de la enfermedad.

Un grupo de investigadores se propuso averiguar si las pruebas rápidas de antígenos y moleculares realizadas en el lugar de atención son lo suficientemente exactas como para diagnosticar la infección por COVID-19 de forma fiable y averiguar si la exactitud varía entre personas con síntomas y sin ellos.

Lee este estudio en forma íntegra en <https://bit.ly/3TZCovZ>

¿Qué utilidad le asignas a esta clase de estudios?, ¿por qué?



↑ Personal médico realiza una prueba de hisopado para COVID-19 a una paciente.

GettyImages/SimpleImages

BDA U3\_ACT\_3 y 4

### Apliquemos lo estudiado

Uno de los resultados del estudio anterior señala que en personas con COVID-19 confirmada, las pruebas de antígeno identificaron correctamente la infección en un 72 % de las personas con síntomas.

Considera que un grupo de 50 personas confirmadas con COVID-19 y que presentan síntomas se realiza el test de antígeno.

## EJEMPLO 5 >> Uso de la distribución binomial para calcular probabilidades.

¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 35 de las 50 personas del grupo den positivo en el test de antígeno?

### Paso a Paso

1. Define el experimento aleatorio.

El experimento aleatorio corresponde a la repetición 50 veces de un experimento de Bernoulli. Aquí se pueden definir las probabilidades de éxito y fracaso de la siguiente manera:

- **Éxito** ▶ Prueba de antígeno es positiva en persona con COVID-19 confirmada.
- **Fracaso** ▶ Prueba de antígeno es negativa en persona con COVID-19 confirmada.

2. Determina la probabilidad  $p$  de éxito y  $(1 - p)$  de fracaso.

De acuerdo con los resultados del estudio, las probabilidades son:

$$P(\text{éxito}) = p = 0,72$$

$$P(\text{fracaso}) = 1 - p = 1 - 0,72 = 0,28$$

3. Define la variable aleatoria, su distribución y su función de probabilidad.

$X$ : cantidad de éxitos en las 50 repeticiones del experimento.

$$X \sim B(50; 0,72)$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{50}{x} \cdot 0,72^x \cdot (1 - 0,72)^{50-x}$$

4. Calcula la probabilidad. Aproxima tu resultado por redondeo a la centésima.

$$\begin{aligned} f(35) = P(X = 35) &= \binom{50}{35} \cdot 0,72^{35} \cdot 0,28^{50-35} \\ &\approx 0,12 \end{aligned}$$

5. Responde.

La probabilidad teórica de que exactamente 35 de las 50 personas del grupo den positivo en el test de antígeno es 0,12, aproximadamente.

## << Propiedades de la distribución binomial

Consideremos la variable aleatoria  $X$  con  $X \sim B(n, p)$ . La **esperanza** o valor esperado ( $\mu$ ), **varianza** ( $\sigma^2$ ) y **desviación estándar** ( $\sigma$ ) de la variable  $X$  son:

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$



5 ¿Qué signo tienen las tres medidas estadísticas anteriores?, ¿cómo lo sabes?

6 ¿Cómo definirías el concepto de esperanza de una variable aleatoria? Consulta en <https://bit.ly/3om6gal> y complementa tu respuesta con lo allí expuesto.



## Linao El «rugby» mapuche

El juego de linao proviene de ling, que significa batallar, y de naln que quiere decir bola. Literalmente, batallar con la bola. La pelota se confeccionaba de algas como cochayuyo o sargazo, que se cubrían con lana o cuero. Las canchas eran rectangulares y planas, cubiertas de pasto natural de aproximadamente 120 m de largo por 60 m de ancho y se marcaban con rayas y una franja neutral en el centro de alrededor de 5 m de ancho. En las líneas cortas de la cancha se colocaban los arcos para la entrada de la pelota, formados por dos varas clavadas en el suelo que se encontraban separadas por 2 a 6 m entre sí. Los «capitanes» de ambos equipos sorteaban el lado de la cancha en que jugarían. El objetivo es llevar una pelota de cochayuyo hasta la línea de meta del equipo rival, demarcada por dos palos verticales.

Si quieres saber más sobre el juego de linao, como por ejemplo su propósito visita el siguiente link <https://www.rugbychile.cl/2018/03/07/linao-rugby-los-pueblos-origenarios-chile/>.

### Apliquemos lo estudiado

El profesor de Educación Física y Salud de un colegio va a organizar durante el año una serie de juegos deportivos tradicionales de pueblos originarios de nuestro país. Para su desarrollo, cotizó balones para las distintas disciplinas y registró las siguientes opciones:

**Opción 1:** Set de 9 balones a \$135 000, es decir, cada balón costará \$15 000.

**Opción 2:** Set de 7 balones a \$105 000, es decir, cada balón también costará \$15 000.

**Fuente:** Olaya Becerra y Guillermo Mora, Concepción, Región del Biobío. Recuperado del programa de Estudio Lengua y cultura de los pueblos originarios ancestrales. <https://peib.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/03/ProgMapuche-4to-2022web.pdf>



↗ Balón de linao hecho de algas marinas.

### EJEMPLO 6 >> Toma de decisiones usando la esperanza de una variable aleatoria.

Si la probabilidad de que un balón del set de la opción 1 se conserve en buen estado durante el año de competencias es 0,7 y la probabilidad de que uno del set de la opción 2 se conserve en buen estado el mismo tiempo es 0,95, ¿cuál de las dos opciones es más conveniente?

#### Paso a Paso

1. Define la variable aleatoria de cada opción y su distribución.

Las variables aleatorias de las opciones 1 y 2, que llamaremos  $X_1$  y  $X_2$ , se definen como la cantidad de balones que se conservan en buen estado durante 1 año, y sus distribuciones son:

$$X_1 \sim B(9; 0,7) \qquad X_2 \sim B(7; 0,95)$$

2. Calcula las esperanzas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de las variables  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente.

$$\mu_1 = 9 \cdot 0,7 = 6,3 \qquad \mu_2 = 7 \cdot 0,95 = 6,65$$

3. Responde.

Dado que el costo unitario de cada balón es el mismo y que la esperanza de la variable aleatoria que representa la opción 2 es mayor que la esperanza que representa la opción 1, se debe optar por el set de la opción 2.

### Para terminar la Lección 5...

- ¿Qué fenómenos de tu entorno cotidiano se comportan como el modelo binomial?
- ¿En qué tipo de situaciones hay que basarse en modelos probabilísticos para tomar decisiones?
- ¿Qué ventajas tiene encontrar soluciones innovadoras a los problemas?

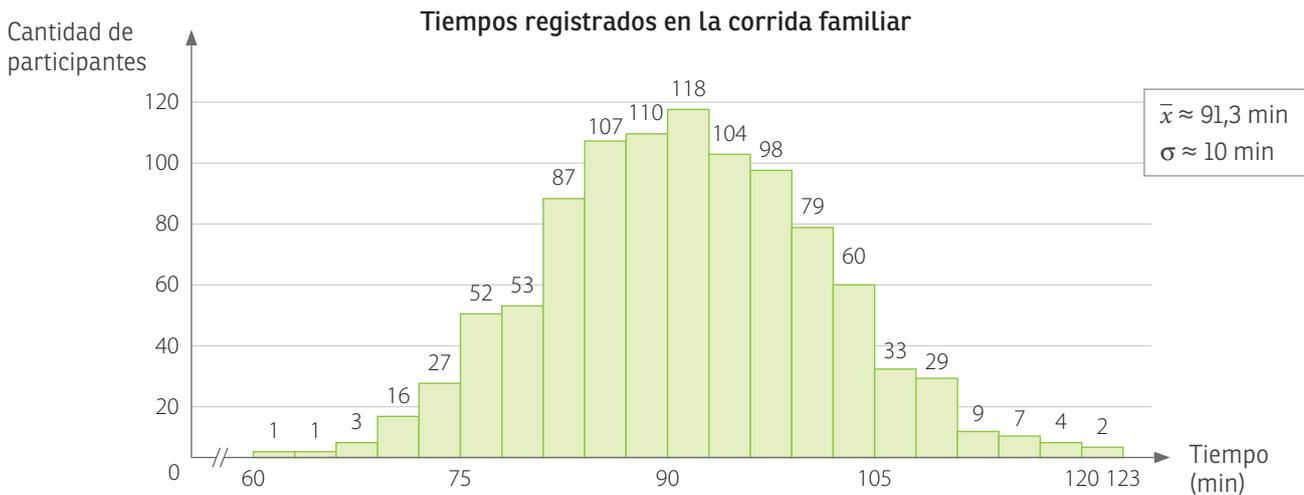
# Toma de decisiones con el modelo normal

## Caracterizando la distribución normal

En el sur de nuestro país se realizó una corrida familiar para fomentar el deporte y la vida sana. Durante el desarrollo de la actividad, los organizadores registraron la cantidad de deportistas que cruzaron la meta cada 3 min y con estos datos construyeron el histograma adjunto.

• ¿Cómo crees que se sienten los participantes de la corrida?, ¿cómo te sentirías tú?

- En el histograma, ¿cuáles fueron los tiempos mínimo y máximo registrados?
- En el histograma, ¿cuál es el intervalo modal?, ¿cuál es su frecuencia?
- Si dibujas el polígono de frecuencias correspondiente al histograma, ¿se obtiene una figura aproximadamente simétrica?, ¿por qué?



↓ Patagonia Running 2022. Parque Nacional Torres del Paine.



Facebook/Mindép Magallanes

## « Distribución normal

Las variables aleatorias continuas pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo de números reales, por lo que la probabilidad se distribuye entre infinitos valores, lo que implica que  $P(X = x) = 0$  para cualquier valor de  $x$ . Para este tipo de variables, la función de probabilidad es llamada **función de densidad de probabilidad** la cual describe la probabilidad relativa según dicha variable aleatoria tomará un determinado valor, se denota por  $f(x)$ .

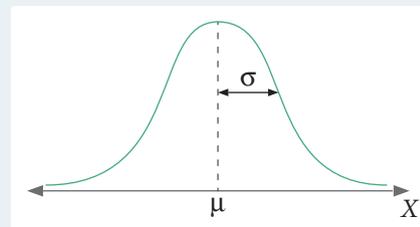
Si  $f$  es la función de densidad de una variable aleatoria continua  $X$ , se cumple que:

- $f(x) \geq 0$  y el área bajo su representación gráfica es 1.
- $P(X \leq a) = P(X < a)$

Sea  $X$  una variable aleatoria continua. Se dice que su distribución corresponde a una distribución normal, que se denota  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , si su función de densidad tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ en que } \mu \text{ es la media, } \sigma \text{ es la desviación estándar; } x, \mu, \sigma \in \mathbb{R} \text{ y } \sigma > 0.$$

El **gráfico** de la función es una curva con forma de campana que **nunca corta al eje  $X$**  y es **simétrica** respecto de la recta vertical  $x = \mu$ . Además, como en la distribución normal coinciden la media, la mediana y la moda, en  $x = \mu$  se registra su máximo.



- 1 ¿Por qué crees que para una variable aleatoria continua se cumple que  $P(X = x) = 0$ ?  
Comparte tu respuesta con el resto del curso.

### EJEMPLO 1 » Aproximación de una distribución de datos mediante una normal.

¿Es una buena aproximación utilizar la distribución normal para los tiempos registrados en el histograma inicial?

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/SujgnzRy> para visualizar de mejor forma el gráfico de la función.

#### Paso a Paso

1. Reescribe los valores del promedio y de la desviación estándar de los tiempos de los atletas.

$$\bar{x} \approx 91,3 \text{ min} \quad \sigma \approx 10 \text{ min}$$

2. Determina la ubicación de las medidas de tendencia central.

- Media aritmética: es 91,3 min, por lo tanto, pertenece al intervalo [90, 93[.
  - Moda: se encuentra en el intervalo modal, que es [90, 93[.
  - Mediana: pertenece al intervalo [90, 93[, ya que los datos en las posiciones 500 y 501 están en él.
- Por lo tanto, la media, la moda y la mediana pertenecen al mismo intervalo en el histograma.

3. Determina el porcentaje de datos ubicados en torno al promedio.

Calculemos el porcentaje de datos ubicados en el intervalo  $[x - k\sigma, x + k\sigma[$  para  $k \in \{1, 2\}$ .

$k = 1$  ► En [81,3; 101,3[ se ubican aproximadamente 703 datos, es decir, un 70,3 %.

$k = 2$  ► En [71,3; 111,3[ se ubican aproximadamente 957 datos, es decir, un 95,7 %.

4. Responde.

En principio, la distribución de los tiempos de los atletas cumple algunas de las condiciones de una distribución normal y podría aproximarse por ella.

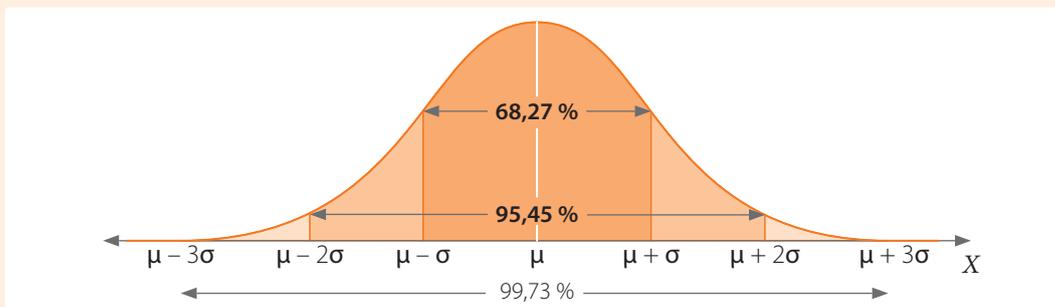
## « Cálculo de probabilidades de una variable con distribución normal

Si una variable aleatoria continua tiene función de distribución normal  $f(x)$ , la **probabilidad** de que  $X$  pertenezca al intervalo  $[a, b]$  está dada por el área bajo la curva de  $f$  entre  $a$  y  $b$ .

Teniendo como referencia la desviación estándar de la distribución respecto de la media, algunas **probabilidades aproximadas** conocidas son las siguientes:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,6827$ , lo que significa que el 68,27 % de los valores de una variable aleatoria normal están ubicados en el intervalo  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ .
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$ , lo que significa que el 95,45 % de los valores de una variable aleatoria normal están ubicados en el intervalo  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ .
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$ , lo que significa que el 99,73 % de los valores de una variable aleatoria normal están ubicados en el intervalo  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ .

El siguiente gráfico resume lo anterior:



2 ¿Cuánto es  $P(X \leq \mu)$ ?, ¿cómo lo sabes?

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/rZ7NHCsS> para visualizar la distribución normal.

### EJEMPLO 2 » Estimación de probabilidades usando la distribución normal.

Considerando los tiempos de llegada registrados por los atletas de la situación inicial, si se selecciona una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su tiempo de llegada esté entre 91,3 min y 101,3 min?

#### Paso a Paso

1. Determina la variable en estudio y su distribución.

La variable aleatoria  $X$  corresponde al tiempo de llegada de los atletas (medido en minutos), cuya distribución teórica es normal con media de 91,3 min y desviación estándar de 10 min. Es decir,  $X \sim N(91,3; 10)$ .

2. Utilizando las probabilidades aproximadas ya definidas, determina la probabilidad pedida.

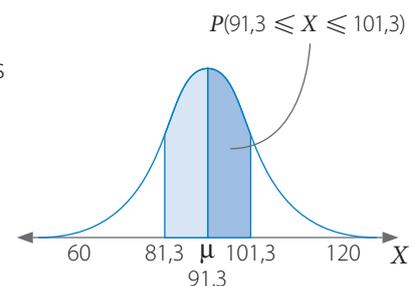
$$P(91,3 - 10 \leq X \leq 91,3 + 10) = P(81,3 \leq X \leq 101,3) \approx 0,6826$$

Por simetría respecto de la media, se cumple lo siguiente:

$$P(91,3 \leq X \leq 101,3) = \frac{0,6826}{2} \approx 0,3413$$

3. Responde.

La probabilidad es 0,3413, aproximadamente.



Utiliza una calculadora de distribución normal accediendo en <https://bit.ly/2oSuFlu>



## » Distinciones a las trayectorias educativas

### Educación Ciudadana

El sistema de reconocimiento del mérito llamado Distinciones a las Trayectorias Educativas (DTE) tiene como objetivo principal apoyar económicamente a las personas que ingresan a la Educación Superior considerando sus identidades, trayectorias y contextos. Estas distinciones benefician a los estudiantes en situación de discapacidad, a los pertenecientes a pueblos originarios, a los que viven en

cada una de las regiones del país y, además, en el territorio insular y a los que cursen diferentes modalidades de enseñanza.

En el proceso PSU solo se distinguía a los estudiantes con puntaje máximo en cada una de las pruebas. En cambio en la PAES, con una escala entre 100 y 1000 puntos, se distingue también de acuerdo con las trayectorias educativas.

**Fuente:** Subsecretaría de Educación Superior. (s.f.). *Distinciones a las trayectorias educativas*. Ministerio de Educación de Chile. <https://acceso.mineduc.cl/distinciones-a-las-trayectorias-educativas/>

### Apliquemos lo estudiado

Para la asignación de puntajes en el proceso PSU se consideraba un promedio de 500 puntos y una desviación estándar de 110 puntos, estableciéndose así la escala estándar de puntajes.

### EJEMPLO 3 » Cálculo de probabilidades usando la distribución normal.

Considerando que los puntajes PSU tenían una distribución normal, ¿cuál era la probabilidad de obtener un puntaje superior a 720 puntos?

#### Paso a Paso

1. Determina la variable en estudio y su distribución.

Se define la variable  $X$  como el puntaje PSU con distribución teórica normal:

$$X \sim N(500, 110)$$

2. Expresa la probabilidad en términos de la media y la desviación estándar.

Hay que calcular la probabilidad de que  $X > 720$  usando las aproximaciones  $\mu = 500$  y  $\sigma = 110$ :

$$P(X > 720) = P(X > 500 + 2 \cdot 110) = P(X > \mu + 2\sigma)$$

3. Utiliza la información conocida de la distribución normal.

Para una variable  $X$  que se distribuye normal se cumple lo siguiente:

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545 = 1 - (P(X < \mu - 2\sigma) + P(X > \mu + 2\sigma))$$

4. Aplica las propiedades de la distribución normal.

Como la gráfica de la distribución normal es simétrica, entonces  $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$ . Además, como  $P(X > \mu + 2\sigma) = P(X > 720)$ , se tiene que:

$$0,9545 \approx 1 - 2 \cdot P(X > 720)$$

$$2 \cdot P(X > 720) \approx 0,0455$$

$$P(X > 720) \approx 0,02275$$

5. Responde.

La probabilidad de obtener un puntaje superior a 720 puntos en la PSU era de 0,02275, aproximadamente.

## Decidiendo con la distribución normal estándar

El departamento de Educación Física y Salud de un colegio, preocupado por fomentar el deporte como un hábito de vida saludable, diseñó un estudio para evaluar la aptitud física que consiste en 2 pruebas distintas. Inicialmente, estas se aplican a dos cursos. Lucas pertenece a uno de ellos y Carla, al otro.

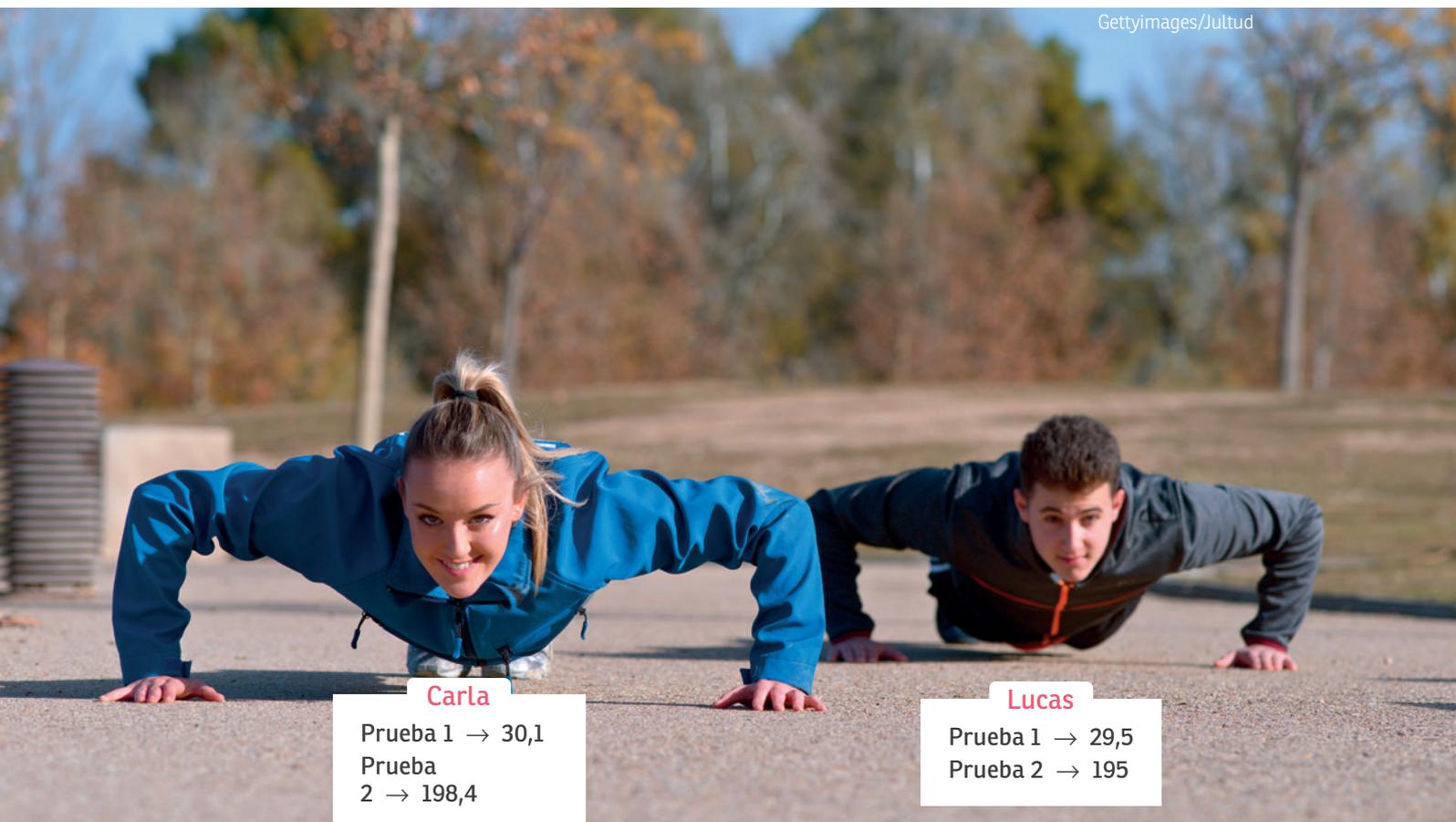
Las puntuaciones obtenidas por ambos cursos en las pruebas presentan distribuciones normales con los siguientes parámetros:

### Parámetros de las distribuciones normales de los cursos

Prueba	Curso de Lucas		Curso de Carla	
	Media	Desviación estándar	Media	Desviación estándar
1	27,6	1,7	33	2,3
2	165,7	26,4	190	25

- ¿Por qué crees que en los colegios y universidades se promueve la práctica regular de actividad física?
- ¿Qué acciones permitirían impulsar la práctica deportiva en tu colegio?
- En las pruebas aplicadas en los cursos de Carla y Lucas, ¿cuáles son las puntuaciones límites del intervalo que concentra aproximadamente el 68 % de los valores en torno a la media?

Los puntajes obtenidos por Carla y Lucas se muestran en las siguientes imágenes:



**Carla**

Prueba 1 → 30,1  
Prueba  
2 → 198,4

**Lucas**

Prueba 1 → 29,5  
Prueba 2 → 195

## « Distribución normal estándar

Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , es decir,  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Se define la variable aleatoria  $Z$  de la siguiente manera:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Esta nueva variable aleatoria  $Z$  tiene una distribución normal con media 0 y desviación estándar 1, es decir,  $Z \sim N(0, 1)$ . A esta distribución se le conoce como **distribución normal estándar**. »

- 1 ¿Qué signo tiene un valor  $z$  de la variable  $Z$  correspondiente a un valor puntual  $x$  de la variable  $X$  si se cumple que  $x > \mu$ ?, ¿y si  $x < \mu$ ? Comparte con el curso tus respuestas y justifícalas.

### EJEMPLO 4 » Determinación del valor estandarizado de una variable con distribución normal.

¿Cuál es el valor estandarizado de los puntajes obtenidos por Carla y Lucas en la prueba 1 de acuerdo con la distribución existente en sus respectivos cursos?

#### Paso a Paso

1. Define la variable aleatoria con distribución normal de cada curso.

Llamando  $X_L$  y  $X_C$  a las variables aleatorias que representan los puntajes obtenidos en la prueba 1 por los cursos de Lucas y Carla, respectivamente, se tiene que:

$$X_L \sim N(27,6; 1,7)$$

$$X_C \sim N(33; 2,3)$$

2. Aplica la definición de la variable estandarizada. Aproxima los resultados por redondeo a la centésima.

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/vTvB6XG2> para visualizar la distribución normal.

#### Lucas

Prueba	Media ( $\mu$ )	Desviación estándar ( $\sigma$ )	Puntaje de Lucas ( $x$ )	Puntaje estandarizado ( $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ )
1	27,6	1,7	29,5	$z = \frac{29,5 - 27,6}{1,7} \approx 1,12$

#### Carla

Prueba	Media ( $\mu$ )	Desviación estándar ( $\sigma$ )	Puntaje de Carla ( $x$ )	Puntaje estandarizado ( $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ )
1	33	2,3	30,1	$z = \frac{30,1 - 33}{2,3} \approx -1,26$

3. Responde.

Los valores estandarizados aproximados de los puntajes de Lucas y Carla en la prueba 1 son 1,12 y -1,26, respectivamente.

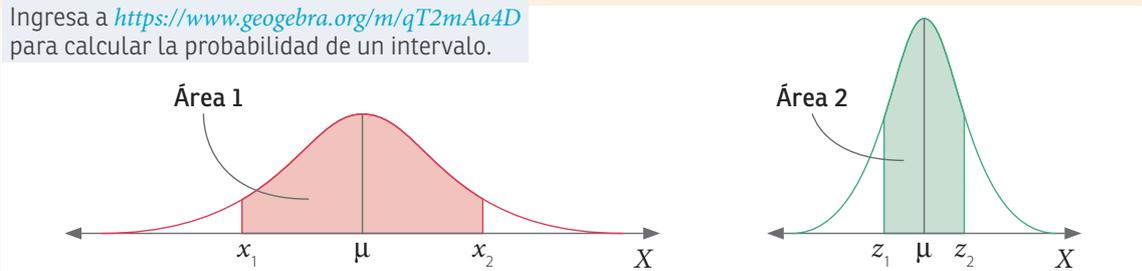
- 2 ¿Cuál de los jóvenes obtuvo un puntaje mayor que la media de su curso en la prueba 1?, ¿cómo puedes saberlo directamente de los signos del puntaje estandarizado que obtuvieron? Explica.

## « Cálculo de probabilidades utilizando la distribución normal estándar

Si  $X \sim N(\mu, \sigma)$  y  $Z \sim N(0, 1)$  es la estandarización de  $X$ , determinar  $P(x_1 \leq X \leq x_2)$  equivale a calcular  $P(z_1 \leq Z \leq z_2)$ , en que  $z_1$  y  $z_2$  corresponden a los valores estandarizados de  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente.

Gráficamente, el área entre dos valores  $x_1$  y  $x_2$  en la distribución original (Área 1) es igual al área entre los puntos estandarizados  $z_1$  y  $z_2$  (Área 2), como se muestra a continuación:

Ingresa a <https://www.geogebra.org/m/qT2mAa4D> para calcular la probabilidad de un intervalo.



Para variables aleatorias con distribución normal estándar se utiliza una tabla que permite conocer el valor aproximado de la probabilidad de obtener un valor menor o igual que un número real positivo o cero. A continuación, se muestra la parte superior de esta tabla:

**Tabla de distribución normal estándar (fragmento superior)**

$z$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169



### EJEMPLO 5 >> Uso de la tabla de distribución normal estándar.

¿Cuál es la probabilidad de que la variable  $Z \sim N(0, 1)$  adquiera un valor menor o igual que 0,21?

#### Paso a Paso

1. Expresa simbólicamente la probabilidad buscada e interpreta el contenido de la tabla.

La probabilidad se representa como  $P(Z \leq 0,21)$  y la tabla se estructura de manera que

- el encabezado de una fila contiene la parte entera y el primer decimal de  $z$ .
- el encabezado de una columna contiene el segundo decimal de  $z$ .

2. Busca en la tabla la probabilidad solicitada.

El encabezado de la fila debe ser **0,2** y el de la columna, **0,01**.

3. Responde.

La probabilidad de que  $Z$  adquiera un valor menor o igual que 0,21 es  $P(Z \leq 0,21) \approx 0,58317$ .

$z$	0	0,01	0,02
0	0,5	0,50399	0,50798
0,1	0,53983	0,5438	0,54776
0,2	0,57926	0,58317	0,58706
0,3	0,61791	0,62172	0,62552

- 3  Para un número  $a > 0$ , ¿cómo calcularían  $P(Z \leq -a)$ ? Elaboren un procedimiento y compártanlo con el resto del curso.

### EJEMPLO 6 >> Cálculo de probabilidades con la distribución normal estándar.

Si se selecciona al azar a un integrante del curso de Lucas en la situación inicial, ¿cuál es la probabilidad de que su puntaje en la prueba 1 sea menor o igual que 30?

#### Paso a paso

1. Recuerda la variable aleatoria y su distribución.

La variable aleatoria que representa los puntajes obtenidos en la prueba 1 por el curso de Lucas se definió de la siguiente manera:

$$X_L \sim N(27,6; 1,7)$$

2. Estandariza la probabilidad buscada.

$$P(X \leq 30) = P\left(Z \leq \frac{30 - 27,6}{1,7}\right) \approx P(Z \leq 1,41)$$

3. Busca la probabilidad usando la tabla.

$z$	0	0,01	0,02
1,4	0,91924	0,92073	0,9222

4. Responde.

La probabilidad de que el puntaje en la prueba 1 sea menor o igual que 30 es 0,92073, aproximadamente.

- 4  ¿Cómo pueden comprobar las probabilidades anteriores? Conéctense a una calculadora de la distribución normal estándar en <https://bit.ly/4125wVG> y verifiquen las probabilidades  $P(Z \leq 0,21)$  y  $P(Z \leq 1,41)$  y cualquier otra que deseen.



## La dieta de los changos

### Y las enfermedades asociadas a ella

Los Changos fue un pueblo nómada, cuyo grado de permanencia en un determinado lugar dependía de la actividad productiva que estuviesen desarrollando y por sobre todo de los recursos de agua existentes en la zona.

A través del estudio de huesos y dientes provenientes de los sitios Chacaya y Punta Blanca, el equipo de investigación del Museo de Antofagasta determinó cuáles fueron las principales enfermedades ligadas a la dieta de los grupos que habitaron la costa del desierto de Atacama, algunas son:

- Cálculo dental ligado al sobreconsumo de proteínas.
- Porosidad del hueso orbital asociado a la anemia.
- Caries dentales debidas al consumo de azúcares.



Fernando Maldonado

- ◆ Balsa de cuero de lobo con la que los changos conseguían su alimento.

**Fuente:** Museo de Antofagasta. (s.f.). *Dieta de etnias costeras del norte: una mirada bio-antropológica*. Ministerio de las Culturas, las Artes y el Patrimonio de Chile. <https://www.museodeantofagasta.gob.cl/coleccion/indigenas-de-la-costa-norte-practicas-y-tecnicas-alimenticias/dieta-de-etnias-costeras>

### Apliquemos lo estudiado

Un estudio indica que el número de dientes permanentes cariados observado en un grupo de personas fue 3, con una desviación estándar de 4.

### EJEMPLO 7 »» Uso de la distribución normal estándar para calcular probabilidades.

Si se considera que la distribución del número de dientes permanentes cariados es normal, ¿cuál es la probabilidad de escoger al azar una persona del grupo con más de 5 caries, aproximadamente?

#### Paso a Paso

1. Define la variable aleatoria en estudio y su distribución.

Sea  $X$  la cantidad de dientes permanentes cariados en el grupo estudiado. ►  $X \sim N(3, 4)$

2. Calcula la probabilidad usando la tabla de distribución normal estándar que puedes consultar en <https://bit.ly/3L46qfu>

$$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-3}{4}\right) = P(Z > 0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) \approx 1 - 0,69146 = 0,30854$$

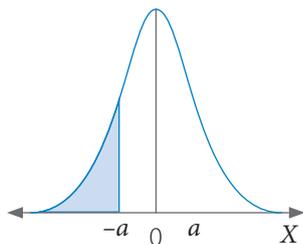
3. Responde.

La probabilidad de escoger al azar una persona del grupo con más de 5 caries es 0,30854.

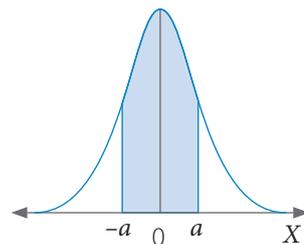
### «« Propiedades de la distribución normal estándar

Sea la variable aleatoria  $Z$  con distribución normal estándar, es decir,  $Z \sim N(0, 1)$ . Para  $a > 0$ , se cumplen las siguientes **propiedades**:

$$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$$



$$P(-a \leq Z \leq a) = 2P(Z \leq a) - 1$$



## » URGENCIA CLIMÁTICA

### Educación para revertir el cambio climático

La Unesco (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura) organizó y participó en un conjunto de eventos sobre educación relativa al cambio climático en la Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático (COP27) que tuvo lugar en 2022 en Egipto. Allí se subrayó el papel clave que desempeña la educación para hacer frente al cambio climático y se presentó el informe de la encuesta «Los jóvenes exigen una educación de calidad sobre el cambio climático», que revela que el 70 % de los jóvenes cuestionan la calidad de la educación que reciben sobre las cuestiones relativas al cambio climático.

Los detalles de la encuesta los encuentras conectándote a <https://bit.ly/3MQmylJ>



#### Apliquemos lo estudiado

Los estudiantes de un colegio participaron en una prueba para averiguar cuánto saben sobre el cambio climático. Los puntajes de dos cursos presentaron distribuciones normales con los siguientes valores para la media  $\mu$  y para la desviación estándar  $\sigma$ :

Parámetros de las distribuciones

4° A		4° B	
$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
24,8	5,4	23,7	3

#### EJEMPLO 8 » Fundamentar decisiones con la distribución normal estándar.

El colegio decidió llevar a una granja educativa al curso que tuviera menor cantidad de estudiantes con un puntaje inferior o igual que 20 en la prueba. Tras analizar los resultados, seleccionó al 4° B para la visita. ¿Cómo podrías fundamentar matemáticamente su decisión a partir de los datos de la tabla?

#### Paso a Paso

1. Determina las variables aleatorias y su distribución.

$X$ : puntajes obtenidos por el 4° A. ▶  $X \sim N(24,8; 5,4)$

$Y$ : puntajes obtenidos por el 4° B. ▶  $Y \sim N(23,7; 3)$

Ingresa a <https://bit.ly/4125wVG> para acceder a una calculadora de la distribución normal estándar.

2. Calcula las probabilidades usando la tabla de distribución normal estándar que puedes consultar en <https://bit.ly/3L46qfu>

$$4^\circ \text{ A} \quad \blacktriangleright \quad P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20 - 24,8}{5,4}\right) \approx P(Z \leq -0,89) = 1 - P(Z \leq 0,89) \approx 1 - 0,81327 = 0,18673$$

$$4^\circ \text{ B} \quad \blacktriangleright \quad P(Y \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20 - 23,7}{3}\right) \approx P(Z \leq -1,23) = 1 - P(Z \leq 1,23) \approx 1 - 0,89065 = 0,10935$$

3. Responde.

Como la probabilidad de obtener un puntaje menor o igual que 20 es menor en el 4° B que en el 4° A, la decisión de llevar al 4° B a la granja educativa está justificada.

#### Para terminar la Lección 6...

- ¿Qué ejemplos se te ocurren de situaciones de incerteza en que puede ser útil usar la distribución normal?
- ¿Qué dificultades tuviste con el uso de la tabla de la distribución normal estándar?, ¿cómo las superaste?
- ¿Qué conductas crees que afectan la propiedad y la privacidad de las personas al usar la tecnología?

# Síntesis de Unidad 3

## LECCIÓN 5 » Toma de decisiones con el modelo binomial

### Aprendiste...

Función de probabilidad de Bernoulli

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

Con  $x = \{0, 1\}$ .

Función de distribución acumulada  
de una distribución binomial

$$F(k) = P(X \leq k)$$

Con  $0 \leq k \leq n$ .

Función de probabilidad binomial

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$$

En que  $x$  puede tomar los valores de  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Propiedades de una distribución binomial

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

¿Cuánto llegaste a comprender de estos contenidos?, ¿qué te gustaría repasar?

### Aplicaste...

- La distribución de Bernoulli para estudiar fenómenos y calcular probabilidades analizando las simplificaciones requeridas.
- La distribución binomial como modelo probabilístico para tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística.

← ¿Qué características tienen los fenómenos en cuyo estudio podrías utilizar esta habilidad?

← ¿Qué dificultades tuviste para aplicar esta habilidad?, ¿cómo las superaste?

### Desarrollaste...

La perseverancia y proactividad para solucionar problemas aplicando estrategias innovadoras.

← ¿Qué otro elemento relacionado con esta actitud desarrollaste en la lección?

## LECCIÓN 6 » Toma de decisiones con el modelo normal

### Aprendiste...

#### Distribución normal

Una distribución normal se denota  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Su función de densidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu$  es la media,  $\sigma$  es la desviación estándar;  $x, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ .

#### Distribución normal estándar

Si  $X \sim N(\mu, \sigma)$  entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

#### Probabilidades con la distribución normal

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,9973$$

#### Propiedades de la distribución normal estándar

$$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$$

$$P(-a \leq Z \leq a) = 2P(Z \leq a) - 1$$

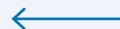
¿Cómo se relacionan los modelos normal y normal estándar?, ¿cómo podrías ejemplificar tu respuesta?

### Aplicaste...

- Propiedades de la distribución normal para estimar probabilidades y estudiar fenómenos estadísticos.
- La distribución normal estándar para calcular probabilidades y fundamentar decisiones a partir de los resultados obtenidos.



¿Qué sabías sobre estas propiedades?, ¿qué más te gustaría saber sobre ellas?



¿Qué otra utilidad podría tener el aplicar esta habilidad?

### Desarrollaste...

La valoración de principios éticos al usar información estadística.



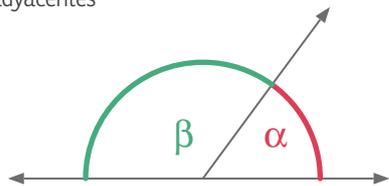
¿Cómo podría reflejarse esta actitud en tu quehacer diario?

# Glosario

## A

**Adyacentes:** par de ángulos que comparten el vértice y uno de sus lados (son consecutivos) y, además, son suplementarios (la suma de sus medidas es  $180^\circ$ ).

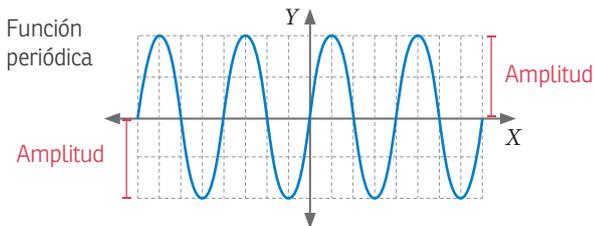
Ángulos adyacentes



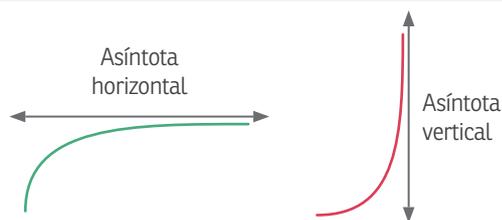
**Aleatorio:** que depende del azar.

**Amortización:** reducción gradual de una deuda a través de pagos periódicos iguales.

**Amplitud:** distancia positiva existente entre el valor máximo (o el mínimo) de una función periódica y el eje X.



**Asíntota:** recta a la cual la gráfica de una función se aproxima indefinidamente sin llegar a cortarla.



## B

**Binomial:** distribución asociada a un experimento aleatorio que tiene dos posibles resultados: éxito o fracaso.

## C

**Congruencia ( $\cong$ ):** relación en que dos figuras tienen la misma forma y las mismas medidas.

## D

**Dispersión:** variabilidad existente entre un grupo de datos respecto de su media aritmética o promedio.

**Distribución:** función que asigna a cada evento definido de una variable aleatoria la probabilidad de que dicho evento ocurra.

## E

**Estándar:** que sirve de patrón, modelo o punto de referencia para medir o valorar cosas de la misma especie.

**Estimación:** valor cercano o aproximado al valor real que se quiere conocer.

9,998 puede estimarse en 10

## F

**Factorial (!):** para un número  $n$ , es el producto de todos los números enteros desde 1 hasta  $n$ .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

**Frecuencia:** cantidad de veces que se repite un valor en un conjunto de datos.

## G

**Grado sexagesimal ( $^\circ$ ):** medida de un ángulo central que determina un arco cuya longitud equivale a  $\frac{1}{360}$  de la longitud de la circunferencia.

## H

**Homogéneo:** noción que, aplicada a un conjunto de datos, indica que sus valores son cercanos entre si y poco dispersos.

## M

**Marca de clase:** valor representativo de un intervalo real que se calcula como el promedio de sus valores extremos.

La marca de clase de [4, 8] es 6

**Modelo:** representación simplificada de un fenómeno que permite comprenderlo e interactuar con él.

## N

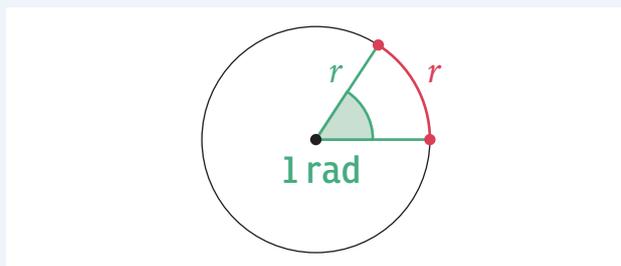
**Normal:** distribución de probabilidades de variable continua cuya función de densidad tiene una gráfica con forma de campana y es simétrica respecto de su media.

**P**

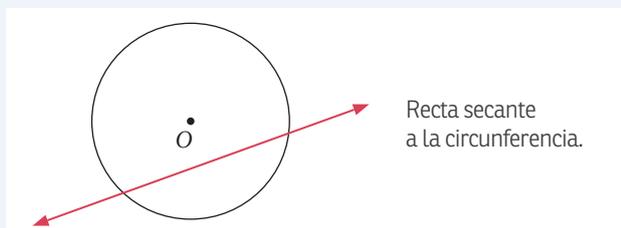
**Periódico:** que ocurre a intervalos regulares de tiempo o con cierta frecuencia.

**R**

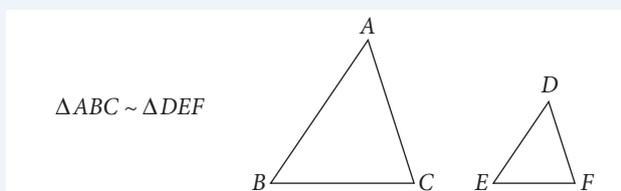
**Radián (rad):** unidad que equivale a la medida de un ángulo central que determina un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Equivale a  $57,3^\circ$ , aproximadamente.

**S**

**Secante:** recta que corta a una circunferencia en dos puntos diferentes.



**Semejanza ( $\sim$ ):** relación en que dos figuras tienen la misma forma, ya que sus medidas correspondientes mantienen la misma proporción.



**Simétrica:** correspondencia entre las partes de una figura o entre dos figuras respecto de un punto o una línea.

**T**

**Tangente:** recta que corta una circunferencia en un único punto.

**V**

**Valor absoluto ( $||$ ):** para un número real, representa su distancia al origen de la recta numérica. Es un valor no negativo.

## Páginas web

- <https://www.mineduc.cl>
- <https://www.bcentral.cl>
- <https://ine.cl>
- <https://www.mintrab.gob.cl>
- <https://www.mindep.cl>
- <https://www.geogebra.org/classic>
- <https://www.wolframalpha.com>
- <https://www.sernac.cl>
- <http://www.csn.uchile.cl/>
- <https://www.minsal.cl>
- <https://www.sii.cl>
- <http://www.alcula.com/es/calculadoras/estadistica/>
- <https://www.herramientasingenieria.com/onlinecalc/spa/matematicas/estadistica.html>
- <https://www.misueldo.cl/calcular-sueldo-liquido/>
- <https://servicios.cmfchile.cl>
- <https://es.khanacademy.org/math>
- <https://pinetools.com/es/conversor-radianes-gradoss/>
- <https://es.symbolab.com>
- <https://www.energia.gob.cl/>
- <https://www.mtt.gob.cl>
- <https://www.curriculumnacional.cl/estudiantes/>

## Bibliografía

- Gardner, H. (2017). *Inteligencias múltiples*. (2da ed. ampliada y revisada). Nueva York: Paidós.
- Larson, R. y Hostetler, R. (2018). *Precálculo*. (Edición e-book). Barcelona: Editorial Reverté S. A.
- Martínez, C. (2019). *Estadística básica aplicada*. Bogotá: Ecoe Ediciones.
- Ross, S. (2018). *Introducción a la Estadística*. (Edición e-book). Barcelona: Editorial Reverté S. A.

El Texto del Estudiante **Matemática 3° - 4° medio** es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana.

**DIRECCIÓN EDITORIAL**

Cristian Gúmera Valenzuela

**COORDINACIÓN EDITORIAL**

Patricio Loyola Martínez

**EDICIÓN**

Daniel Catalán Navarrete

**AUTORÍA**

Natalia Villalobos Silva

Marcela Rojas Carvajal

Mónica Caroca Toro

Lucía Rencoret Bravo

Marco Linares Rodríguez

**ASESORÍA EN PUEBLOS ORIGINARIOS**

Priscila Duath Sepúlveda

Melisa Pacajes Pacajes

Pedro Prado Verdejo

**CORRECCIÓN DE ESTILO**

Rodrigo Olivares de la Barrera

**DOCUMENTACIÓN**

Cristian Bustos Chavarría

**COORDINACIÓN GRÁFICA**

Sergio Pérez Jara

**DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN**

Álvaro Pérez Montenegro

**FOTOGRAFÍAS E ILUSTRACIONES**

Archivo Santillana

Gettyimages.com

Shutterstock.com

**PRODUCCIÓN**

Rosana Padilla Cencever

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

La editorial ha hecho todo lo posible por conseguir los permisos correspondientes para las obras con copyright que aparecen en el presente texto. Cualquier error u omisión será rectificado en futuras impresiones a medida que la información esté disponible.

En este libro se usan de manera inclusiva términos como "los niños", "los padres", "los hijos", "los apoderados", "profesores" y otros que se refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos que formen parte del conjunto. Este uso evita, además, la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

© 2024, by Santillana del Pacífico S. A. de Ediciones.

Avda. Andrés Bello 2299, piso 10, Providencia, Santiago (Chile).

[www.santillana.cl](http://www.santillana.cl) - [infochile@santillana.com](mailto:infochile@santillana.com)

Impreso en Chile por A Impresores S.A.

ISBN: 978-956-15-3941-9 / Inscripción N°: 2023-A-12769

Se terminó de imprimir esta 1ª edición de 227.055 ejemplares en el mes de diciembre del año 2023.

Santillana® es una marca registrada de Grupo Santillana de Ediciones, S. L. Todos los derechos reservados.



NO LO RAYES  
NI SUBRAYES



NO LO RAYES  
NI SUBRAYES



CUIDA SUS  
HOJAS Y NO DOBLES  
SUS ESQUINAS



ÚSALO ALEJADO  
DE COMIDAS  
Y BEBIDAS



GUÁRDALO  
EN UN LUGAR  
ADECUADO



Código PEC

